TREIZIÈME COLLOQUE GRETSI - JUAN-LES-PINS DU 16 AU 20 SEPTEMBRE 1991

CRITERES DE DETECTION DU NOMBRE DE SOURCES CORRELEES POUR LES METHODES "H.R." EN TRAITEMENT D'ANTENNE

O. MICHEL*†, P. LARZABAL*+, H.CLERGEOT*

* :LESiR, ENS CACHAN;
URA CNRS n° 1375
61 ave du pdt Wilson
94235 CACHAN cedex

†: Labo de Physique, ENS LYON;
46 allée d'italie
69364 LYON cedex 07

+ THOMSON-CSF,Div RGS
Service traitement du signal
66, rue du fossé blanc
92231 GENNEVILIERS

RÉSUMÉ

En traitement d'antenne, une forte corrélation et un faible ecart angulaire entre les sources rendent inefficace la majorité des tests de detection actuellement utilisés. Nous proposons dans cet article un nouveau critére de detection du nombre de sources fondé sur le profil de décroissance des valeurs propres de la matrice de corrélation des signaux reçus sur les capteurs. Les simulations effectuées viennent confirmer son bon comportement .

ABSTRACT

In array processing, strong correlation and small angular separation between sources are making traditionnal tests inefficient. We propose in this paper a new test of detection based on the decreasing profile of the correlation matrix spectrum of signals impinging on the array. The simulations confirm its good behavior.

Introduction

Le problème de localisation de sources par des antennes réseaux a connu un regain d'intérêt pendant ces dernières années, en partie suscité par l'introduction de lissages spatiaux, puis fréquentiels, qui permettent d'accroître sensiblement la robustesse de ces algorithmes en présence de corrélations entre sources. De nombreux critères ont été développés et étudiés pour estimer le nombre de sources "perçues" par l'antenne, la connaissance de ce dernier étant d'une importance considérable dans le cadre des méthodes de localisation à haute résolution. Utilisant le spectre des valeurs propres (VP) de la matrice de covariance des observations, la majorité de ces critères ne peut être étendue au cas où la matrice de covariance est estimée par lissage, spatial ou fréquentiel.

Après avoir rappelé le lien entre le problème de détection du nombre de sources et la détection du nombre de valeurs propres non nulles de la matrice de covariance de signal seul, nous proposons une modélisation de la distribution des valeurs propres de bruit (additif, blanc, circulaire, gaussién) de la matrice de covariance, permettant de mettre en oeuvre un critère de détection simple. Le calcul exact de la répartition des valeurs propres de matrices aléatoires a été étudié par certains auteurs mais conduit à des résultats trop complexes pour être simplement exploitables. Le critère présenté est fondé sur des observations expérimentales de spectres de valeurs propres ordonnées et postule une certaine stabilité statistique de la distribution de ces dernières. Ce critère "semi-empirique" est étudié en simulation et pour différentes estimées de la matrice de covariance, avec ou sans lissages. Ce critère reposant sur un modèle de décroissance exponentielle du spectre de valeurs propres ordonnées est comparé au test proposé par A.Ouamri[1], qui faisait l'hypothèse d'une distribution linéaire des valeurs propres de bruit seul. Les simulations sont réalisées pour des signaux fortement corrélés et dans le cas où l'on ne dispose que de peu d'observations. La simplicité et l'efficacité de ce critère en font son intérêt.

En marge de cette approche statistique, de nombreux auteurs ont proposé des critères heuristiques de détection du nombre de sources, plus faciles à mettre en oeuvre, visant simplement à séparer les grandes VP des petites VP. Nous proposons dans ce même esprit un critère de détection empirique, qui apparaît comme une simplification du critère proposé précédent : l'influence de la dimension des vecteurs d'observations sur le modèle de décroissance du spectre de valeurs propres de la matrice de covariance est ici négligée. Ces critères sont comparés en simulations.

Présentation du problème

Nous disposons d'une antenne de N capteurs sur laquelle nous observons les signaux provenant de M sources. Dans le cas où les sources ne sont pas parfaitement corrélées, en l'absence de bruit sur les observations, M est aussi le rang de la matrice de corrélation des observations. En pratique, la présence de bruit sur les observations conduit à obtenir une matrice de corrélation de rang plein (=N), ne permettant plus une détection immédiate de M.

La détermination de M est un problème qui a été abordé de plusieurs façons : Ce dernier peut être appréhendé comme un problème de sélection d'ordre de modèle pour lequel des critères issus de la théorie de l'information , cf [2,3], ont été étudiés. Ce problème peut aussi être envisagé comme un test d'hypothèses multiples, où le nombre M de sources doit être choisi entre 0 et N-1. L'inconvénient majeur de ces méthodes vient de la difficulté qu'il y a à les étendre au cas de sources corrélées et au cas dans lequel la matrice de corrélation des observations est estimée par lissage spatial ou fréquentiel[4]. De plus ces critères sont peu performants quand on dispose de peu d'observations. Pour pallier à ces inconvénients, certains auteurs ont proposé des critères purement heuristiques pour l'estimation de M (par ex.[5]).

Ces différentes démarches conduisant à des critères n'utilisant que les valeurs propres de la matrice de covariance des observations, il semble judicieux d'utiliser le profil de décroissance du spectre (supposé ordonné) des valeurs propres de bruit seul, pour déterminer M.

Dans l'hypothèse (que nous supposerons désormais toujours vérifiée) où le bruit sur les observations est un bruit blanc, gaussien, circulaire, additif, la fonction de distribution de la matrice de covariance associée au bruit seul, estimée sans lissage, est une distribution de Wishart complexe à Q degrés de liberté (on fera l'hypothèse supplémentaire que l'on a toujours T>N). Dans [6], l'auteur a étudié la distribution théorique des valeurs propres, mais obtient des résultats trop compliqués pour être utilisables en pratique. D'autre part, lorsque l'on considère une estimation lissée spatialement de la matrice de covariance, la fonction de cette dernière n'a, à notre connaissance, pas été étudiée, et nous ne disposons d'aucun résultat théorique quand à la distribution des valeurs propres d'une telle matrice aléatoire. Les méthodes présentées dans le paragraphe suivant, pour lesquelles une modélisation heuristique du spectre de valeurs propres de bruit est proposée, relèvent d'une approche analogue à celle évoquées ci-dessus.

Méthodes utilisant un modèle de décroissance du spectre.

a. Méthode de Ouamri.

Dans [1], l'auteur propose une approche basée sur la stabilité de la répartition statistique des valeurs propres de bruit ordonnées, postulant une décroissance linéaire des valeurs propres de bruit seul. Le calcul de la pente théorique de cette décroissance et la confrontation avec les valeurs propres expérimentales permettent de construire un test de détection.

Dans le cas où l'on considère des vecteurs de bruit seul, de covariance σ^2.I, l'auteur établit que la variance des valeurs propres considérées comme N tirages d'une variable aléatoire, s'écrit :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i-\sigma^2)^2 = \frac{N.\sigma^4}{Q} \qquad (1)$$

Q =K*T , où K représente le nombre de lissage spatiaux ou fréquentiels effectué dans l'estimation de la matrice de covariance. Q est par conséquent le nombre total d'observation utilisées, non indépendantes du fait du lissage. Dans l'hypothèse où les valeurs propres de bruit ordonnées dans le sens décroissant, présentent une décroissance linéaire, l'égalité :

$$\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = \sigma^2 \qquad (2)$$

impose :

$$\lambda_N = \sigma^2 - \frac{N-1}{2}.\Delta\lambda$$

où $\Delta\lambda$ est la pente de la décroissance linéaire. Des équations précédentes, on déduit :

$$\Delta\lambda = \sqrt{\frac{12.N}{(N^2-1).Q}}.\sigma^2.$$

En présence de M sources, l'espace propre associé à la matrice de covariance peut être décomposé en deux sous espaces supplémentaires : l'espace source de dimension M, et l'espace bruit de dimension (N-M). Dans l'hypothèse ou la distribution des valeurs propres de bruit seul peut être considérée indépendante des M plus grandes valeurs propres (associées au signal), la dispersion globale des valeurs propres de bruit s'obtient en remplaçant N dans l'équation ci-dessus par (N-M). Le critère de détection consiste alors en un test multi-hypothèse sur la dimension (N-M) de l'espace bruit : il s'agit de detecter une rupture dans le profil de décroissance du spectre de VP. Si λ_{N-k} est une valeur propre de bruit, le calcul de la dispersion globale à partir des VP de bruit déjà connues et la valeur de λ_{N-k+1} permettent d'estimer une valeur $\hat{\lambda}(N\text{-}k)$ de λ_{N-k} [1]:

$$\hat{\lambda}(N\text{-}k) = \lambda_{N-k+1} + \Delta\lambda(N\text{-}k)$$

$$\text{avec } \Delta\lambda = \left(\sqrt{\frac{(k+1)((k+1)^2-1)Q}{12}}-1\right)^{-1}.\left(\lambda_{N-k+1}+\sum_{p=0}^{k-1}\lambda_{N-k}\right)$$

La décision "λ_{N-k} est une VP de bruit" est prise en comparant $(\lambda_{N-k} - \hat{\lambda}(N\text{-}k))$ à un seuil. A défaut de connaître la variance de λ_{N-k} dans l'hypothèse où c'est une VP de bruit, cette dernière est reliée à l'écart type de λ_{N-k} dans l'hypothèse où c'est une VP de signal :

$$(\lambda_{N-k} - \hat{\lambda}(N\text{-}k)) \underset{H(\text{signal})}{\overset{H(\text{bruit})}{\lesssim}} \eta.\frac{\lambda_{N-k}}{\sqrt{Q}} \qquad (3)$$

η est un paramètre de réglage de la probabilité de détection. Les performances de ce test, ainsi que l'hypothèse sur la forme de l'écart type de $\hat{\lambda}(N\text{-}k)$ sont testées en simulation dans les paragraphes suivants.

b. Modèle exponentiel de la décroissance

L'observation des spectres de VP, obtenus à partir de signaux de simulations ou de signaux réels nous a conduit à abandonner l'hypothèse de répartition linéaire des VP ordonnées, pour proposer un modèle à décroissance exponentielle. Ce dernier présente une meilleure approximation de la distribution des valeurs propres de bruit, surtout lorsque Q n'est pas grand devant N (figure-1-) .

On considère d'abord le cas où il n'y a que des VP de bruit.

$$\lambda_i = \lambda_1 .r^{i-1} ; r<1. \qquad (4)$$

A partir des équations (2) et (4), l'identification des moyennes des VP de bruit conduit à :

$$\lambda_1 = N.H_N.\sigma^2 \quad \text{où} \quad H_N = \frac{1-r}{1-r^N}$$

De même, l'identification des moments d'ordre deux de la distribution des VP, à partir des équations (1) et (4) permet d'établir:

$$\frac{N+Q}{NQ} = \frac{(1-r)(1+r^N)}{(1+r)(1-r^N)} \qquad (5)$$

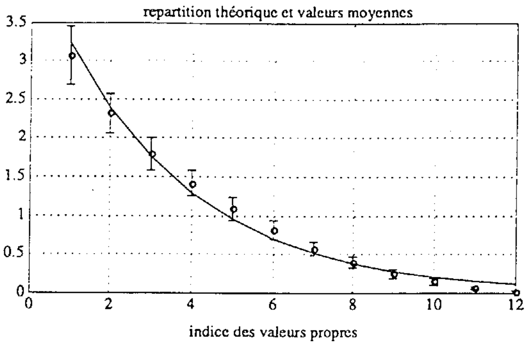

figure-1-. Valeur moyenne ('o') du spectre obtenu pour une matrice de covariance de dimension (12*12) estimée à partir de 13 observations. Les barres d'erreurs représentent l'écart type obtenu pour chaque valeur propre d'indice donné, au cours d'une série de 2500 estimations de la matrice de covariance. La courbe en trait continu représente le modèle exponentiel du spectre, r étant calculé par (5) (Q=13,N=12).

Il est important de noter que le paramètre r ne dépend pas de la puissance du bruit additif σ^2, mais uniquement de N et Q. La valeur de r dans l'hypothèse où la dimension de l'espace bruit est k s'obtient directement en résolvant (5) dans laquelle N=k. Les valeurs de r peuvent être calculées et tabulées. Cette propriété permet de simplifier la mise en oeuvre du critère de détection.

Il est cependant intéressant de faire la remarque suivante : si le nombre d'observations est faible, le paramètre r prend des valeurs importantes. En posant $r=e^{-2.a}$, où a est faible, l'équation (5) se réécrit :

$$\frac{N.th(a)-th(N.a)}{Nth(N.a)}=\frac{1}{Q}$$

Un développement limité en N.a, conduit alors à l'expression de r :

$$r\ (N)=\exp\left(-\sqrt{\frac{12.N}{Q(N^2-1)}}\right).$$

Les valeurs de r étant désormais supposées connues, le test de détection du nombre de sources s'exprime alors comme dans le critère de détection proposé par A. Ouamri , en remplaçant l'équation de prédiction par :

$$\hat{\lambda}(N\text{-}k)=\frac{\lambda_{N-k+1}}{r(N-k)}$$

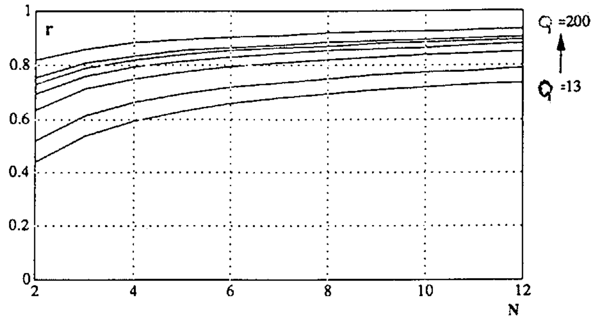

figure-2- Variation du paramètre r en fonction de la dimension N de l'espace bruit, et du nombre Q total d'observations pour l'estimation de la matrice de covariance.

Comparaison des performances des critères "Ouamri" et "exponentiel".

La figure-3- ci-après représente les probabilités de détection de deux sources d'azimut -8 degrés et 2 degrés, pour un ensemble de 200 simulations, reconduites pour différentes valeurs du RSB (0dB, 3dB,10dB, 13dB). La simulation porte sur une antenne de 12 capteurs équidistants (l/d=2.5). La matrice de covariance est estimée par lissage spatial. Les observations sont de dimension 8, le nombre total de ces observations pour chaque estimation est de Q=75.

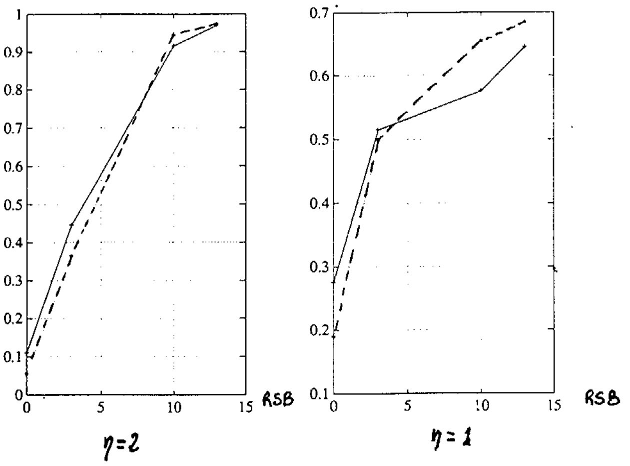

figure-3-. Performances comparées des deux test "Ouamri" et "exponentiel". ('Ouamri' = —+— ; 'exp' = ..x..)

A fort RSB, le réglage de η=2 donne de très bonnesperformances pour les deux tests. A faible RSB, le réglage de η=1 conduit à une amélioration des performances. De façon générale, les deux tests conduisent à des performances très comparables. Chacun de ces tests présente l'inconvénient de nécessiter un réglage du coefficient η qui restera le plus souvent arbitraire.

Dérivation d'un critère empirique.

Tous les tests empiriques de détermination du nombre de sources à partir de la matrice de covariance ont les propriétés suivantes, ennoncées dans [7] :

- ils ne sont fonctions que des VP de la matrice de densité spectrale estimée.
- ils sont invariants par rapport à la puissance totale reçue par l'antenne. Seule la répartition de cette puissance entre les différentes VP est importante.

Nous proposons dans ce paragraphe un critère empirique original de détection du nombre de sources, basés sur les observations expérimentales du spectre de VP lorsque le nombre Q d'observations pour l'estimation de la matrice de covariance est faible. Dans ce cas le paramètres r de décroissance exponentielle du spectre de VP (équation (4)) semble indépendant de la dimension du sous espace bruit, et ce quelle que soit la façon dont a été estimée la matrice de covariance (estimation directe, directe-inverse, lissage...). Cette approximation semble en contradiction profonde avec l'étude présentée au paragraphe précédent, où nous nous sommes intéressés à la variation de r avec la dimension de l'espace vectoriel bruit. Notre objectif ici est de proposer un critère simplifié, dans lequel les variations de r seront supposées suffisamment faibles pour être négligées. Les performances obtenues avec ce critère simple, totalement empirique, seront la seule justification.

La valeur du paramètre r estimée sur les k+1 plus faibles VP est :

$$\hat{r}(k)=c(k)=\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_{N-k}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Un premier critère de détection pourrait alors consister à calculer les différentes valeurs c(n), puis à comparer le rapport $\frac{c(k+1)}{c(k)}$ à un seuil : si ce rapport reste proche de 1, $\hat{\lambda}(N\text{-}k)$ est encore une VP de bruit, sinon, le nombre de source estimé sera $\hat{M}$=N-k-1; Nous avons déjà souligné les problèmes inhérent à la détermination ou au choix d'un seuil. Ce problème peut ici être contourné de la manière suivante : si λ_{N-k} est une VP de bruit alors :

$c(k+1)-c(k)\cong 0$

D'autre part, si on considère que λ_{N-j} et λ_{N-j-1} sont des VP de signal, la quantité c(j+1)-c(j) est supposée relativement faible. Dans le cas de fortes corrélations entre les sources, cette dernière hypothèse n'est plus vérifiée; il peut cependant être montré que dans ce cas, l'introduction de lissage dans l'estimation de la matrice de covariance produit un "effet de décorrélation" [1] à la suite duquel cette hypothèse est à nouveau valide. Seul le cas où une des deux valeurs propres est un VP de signal doit alors conduire à une différence c(j+1)-c(j) significative. Nous proposons par conséquent le critère suivant :

$\hat{M}$=N-k-1 où k est tel que:

$$\left\{C(k)=\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_{N-k-1}}\right)^{\frac{1}{k+1}}-\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_{N-k}}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}_{max}$$

Il faut noter que ce test ne permet pas d'envisager le cas où M=N-1. D'autre part ce test n'a de sens que si on a la certitude que M est différent de 0.

Résultats de simulation.

Les performances de ce critère empirique sont comparées aux performances du critère proposé dans [5] par C.Latombe. L'antenne simulée est identique à celle de la figure-3- (Q=75, 12 capteurs, lissage spatial). Le comportement est testé dans le cas de 2 sources totalement corrélées ayant des écarts angulaire de 0 à 50 degrés. Pour chaque écart 100 essais ont été faits. Les courbes des figures -4- et -5- représentent la valeur moyenne du nombre de sources détectées pour les 100 essais, en fonction de l'écart angulaire.Les barres d'erreurs sont proportionnelles à l'écart type de l'estimation . Le RSB est de 10 dB.

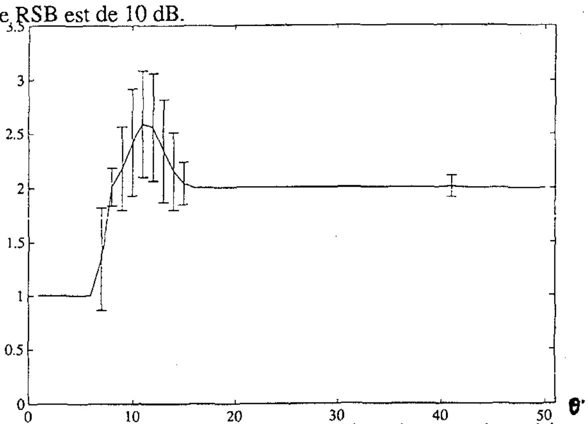

figure-4- Nombre de source détectées par le critère de C.Latombe, en fonction de l'écart angulaire.

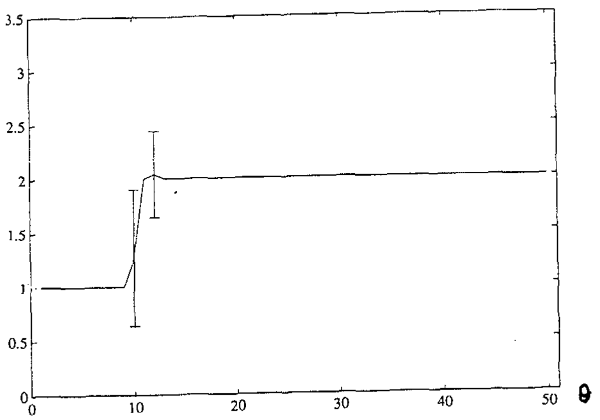

figure-5- Nombre de source détectées par le critère empirique proposé, en fonction de l'écart angulaire.

Conclusion

Nous avons présenté deux nouveaux critères de détection du nombre de sources à partir du spectre de valeurs propres de la matrice de covariance des observations. Le premier, reposant sur une modélisation expérimentale du spectre, présente de bonnes performances, mais nécessite le réglage du seuil de détection, qui paut s'avérer difficile. La limite de détection angulaire (écart angulaire minimal pour des sources de mêmes puissances, permettant de séparer les sources) s'avère, après de nombreuses simulations, être légèrement meilleure que celle obtenue pour les critères empiriques. Le critère empirique proposé démontre cependant une meilleure robustesse vis à vis des fluctuations de bruit, et ne nécessite aucune adaptation.

Bibliographie.

[1] A.Ouamri : "Etudes des performances d'identification à haute résolution et application à l'identification des échos par une antenne multicapteurs." Thèse de doctorat d'Etat, UPS 1986.

[2] H.Akaïke : "A new look at the statistical model identification." Trans. on Automatic Control, vol.1,AC-19,pp 716-723,dec.1974.

[3]J.Rissanen : "Modelling by shortest data description." Automatica, vol.74, pp 465-471.

[4] I.Tas,J.L.Lacoume : "Performance des lissages spatio-fréquentiels pour l'identification de sources corrélées." 12ème colloque GRETSI,Juan-les-Pins,1989.

[5] C.Latombe, F.Glangeaud : Identification of electromagnetic sources." Annales Geophysique, 1983,1,pp 245-252.

[6] A.T.James : "Distribution of matrix variates and latent roots, derived from normal samples." ann. of Math. Stat., vol 35,pp 475-501, 1964.

[7] G.Bienvenu, L. Kopp : OPtimality of high resolution array processing using the eigen-system approach." IEEE tarns. on ASSP, vol.31, n°5,oct.1983,pp1235-1247.