TREIZIÈME COLLOQUE GRETSI - JUAN-LES-PINS DU 16 AU 20 SEPTEMBRE 1991

MÉTHODES TENSORIELLES CONTRACTÉES POUR LE TRAITEMENT D'ANTENNE AUX ORDRES SUPÉRIEURS

Jean-François Cardoso

Télécom Paris - CNRS URA 820 - GdR TdSI
46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France.
email : cardoso@sig.enst.fr

RÉSUMÉ

Par une *contraction tensorielle*, les tenseurs cumulants du quatrième ordre qui interviennent dans le traitement d'antenne aux ordres supérieurs sont réduits à des matrices cumulantes de taille plus faible. Ces matrices présentent une structure semblable à celle de la covariance, mais elles sont asymptotiquement insensibles aux bruits additifs gaussiens. Elles permettent donc d'appliquer les techniques classiques de l'analyse spectrale du second ordre sans qu'il soit nécessaire de modéliser le spectre de bruit lorsque ce dernier est normalement distribué. On montre d'autre part que ces matrices cumulantes peuvent être vues comme des *covariances pondérées* : elles s'estiment à un coût proportionnel à celui de l'estimation de la covariance. Nous comparons cette approche avec celle plus classique consistant à travailler sur une tranche diagonale de cumulants.

ABSTRACT

We use the process of *tensor contraction* to shrink fourth-order cumulant tensors to matrices. We show that the resulting matrices take the form of *weighted covariance*. Hence, we come with fourth-order, matrix valued statistics having a structure similar to the second-order covariance and inheriting from the cumulants the properties of additivity and insensitivity to additive gaussian noise. This fact allows us to process these statistics with the classical techniques of second order spectral analysis. Also, the estimation cost of weighted covariances is similar to the cost of estimating covariances or cumulant slices. We compare these approaches and illustrate their performances for source localization using the MUSIC technique.

1. INTRODUCTION

Cet article a pour but de présenter une nouvelle approche pour l'exploitation des statistiques d'ordre supérieur en traitement d'antenne à bande étroite. Nous considérons le modèle standard dans lequel le signal d'antenne est un vecteur aléatoire X(t) obéissant au modèle linéaire.

$$Y(t) = A\,S(t) + B(t) \tag{1}$$

où $S(t)$ est un vecteur contenant les signaux émis par des sources à bande étroite dont le nombre N_s est supposé inférieur au nombre N de capteurs. Un bruit additif, indépendant des signaux, est représenté par $B(t)$ de taille $N\times 1$, tandis que A une matrice $N\times N_s$ dont la p-ième colonne est le *vecteur directionnel* de la p-ième source. Nous nous intéressons dans la suite à l'estimation de l'*espace signal*, défini comme l'espace vectoriel engendré par les vecteurs directionnels des sources.

Plusieurs publications récentes [1-6] suggèrent l'emploi de statistiques cumulantes pour l'estimation de l'espace signal lorsque le bruit additif est gaussien et que les signaux sources ne le sont pas. La motivation principale en est donnée par la nullité des cumulants d'ordre supérieur à deux d'une variable gaussienne. Ainsi, lorsque le bruit additif suit une loi normale, il n'est pas nécessaire d'en donner un modèle spatial pour construire des estimées consistantes de l'espace signal de sources non gaussiennes.

L'utilisation de l'ensemble des intercumulants offre certains avantages [6] mais est plus coûteuse que l'utilisation de la matrice interspectrale. Au quatrième ordre par exemple, le nombre d'intercumulants est proportionnel à N^4 (à comparer au nombre N^2 de cumulants du second ordre) pouvant conduire à des coûts d'estimation et de traitement prohibitifs pour des antennes de grande taille, C'est pourquoi plusieurs auteurs ont suggéré l'emploi de statistiques qui, tout en conservant la propriété d'être asymptotiquement insensibles aux bruits gaussiens additifs, présentent une taille identique à celle de la matrice interspectrale, s'estiment à un coût comparable, et permettent de déterminer l'espace signal.

Pan et Nikias proposent l'emploi d'une "tranche" de cumulants [1] tandis que Jacovitti et Scarano [2] considèrent l'intercorrélation entre le signal et une transformation non linéaire de lui-même. La validité de ces deux approches a été démontrée pour des antennes linéaires et des sources indépendantes mais est en fait plus large [6]. Nous souhaitons montrer ici comment l'utilisation de "covariances pondérées" permet d'obtenir une estimée de l'espace signal pour une géométrie quelconque de l'antenne et sous de larges hypothèses sur les statistiques des sources. Notre approche se base sur la notion de *covariance pondérée*.

Dans cet article nous définissons les covariances pondérées, en donnons quelques propriétés et la structure pour le modèle (1), et établissons le lien avec le cumulant du quatrième ordre. Nous comparons cette approche avec celle consistant à utiliser des "tranches" de cumulants et concluons avec quelques expériences comparatives de localisation de sources basées sur la technique MUSIC.

2. COVARIANCES PONDÉRÉES

Soit X un vecteur aléatoire complexe de dimension n, de coordonnées x_i , $i=1, \cdots, n$. Nous le supposons ici distribué circulairement au sens large, c'est-à-dire vérifiant pour tout i et j: $E\{x_i^p x_j^{*q}\}=0$ si $p \neq q$. L'hypothèse de circularité nous permet ici une présentation simplifiée mais elle est levée plus loin. La covariance, notée R_X est $R_X = E\{XX^*\}$, où nous utilisons indifféremment le symbole "*" pour noter le conjugué d'un nombre complexe ou le transposé conjugué d'un vecteur.

2.1 Définition et propriétés

Soit W une matrice hermitienne. La covariance pondérée (par W) de la variable X est la matrice $n \times n$ hermitienne notée C_X^W, définie par :

$$C_X^W = E\{X^*WX\ XX^*\} - R_X W R_X - R_X \mathrm{Tr}(WR_X) \qquad (2)$$

où Tr(.) est l'opérateur "trace". La covariance pondérée est une statistique du 4ème ordre qui existe si les moments de X sont finis jusqu'à l'ordre 4. Elle possède, pour tout W, les deux propriétés suivantes.

P1 La covariance pondérée est additive pour des composantes indépendantes : $C_{X_1+X_2}^W = C_{X_1}^W + C_{X_2}^W$ si X_1 et X_2 sont statistiquement indépendants.

P2 Si X suit une loi normale, sa covariance pondérée est nulle.

Par ces propriétés, une covariance pondérée s'apparente à une statistique cumulante du quatrième ordre. Le rapport avec les cumulants au sens usuel est établi plus loin, ce qui permettra d'obtenir directement P1 et P2.

2.2 Statistiques du signal d'antenne

L'indépendance statistique entre le bruit et les signaux sources permet d'écrire, partant de (1)

$$R_Y = AR_S A^{\mathrm{H}} + R_B \qquad (3)$$

Lorsque les signaux sources sont mutuellement décorrelés, la matrice R_S de covariance des sources est diagonale : ses coefficients sont les puissances des sources. Tant que R_S reste définie positive, l'espace image de AR_SA^{H} est celui des colonnes de A. L'estimation de R_Y et R_B permet donc d'obtenir l'espace signal grâce à la relation (3).

Cette approche s'étend aux ordres supérieurs par l'utilisation de covariances pondérées. La clé d'utilisation de la covariance pondérée est donnée par l'expression :

$$C_Y^W = A\ C_S^V A^{\mathrm{H}} + C_B^W \quad \text{avec} \quad V = A^{\mathrm{H}}WA \qquad (4)$$

où la contribution du bruit est additive (grâce à la propriété P1) pour un bruit indépendant des sources. Elle est de plus **nulle** : $C_B^W = 0$ si ce bruit est gaussien (propriété P2).

L'expression (4) de la covariance pondéré est la forme matricielle de l'expression tensorielle (43) de [6]. Si la matrice C_S^V, covariance (des sources) pondérée par $V=A^{\mathrm{H}}WA$ est de rang plein, alors (4) permet, tout comme au second ordre, d'estimer l'espace signal **sans** disposer d'un modèle spatial du bruit si celui-ci est gaussien.

Pour obtenir l'espace signal comme l'image d'une covariance pondérée, il faut cependant s'assurer de la régularité de la matrice C_S^V. La condition de régularité est facile à établir dans le cas de sources statistiquement indépendantes. Grâce à P1 et à P2, la covariance pondérée s'obtient dans ce cas en sommant les contributions de chaque source. D'après la définition (2), on obtient aisément que la covariance pondérée des sources C_S^V est alors diagonale, de terme générique $k_p\ a_p^* W a_p$, où a_p est le vecteur directionnel de la p-ième source et k_p le kurtosis de la p-ième source, donné, dans l'hypothèse circulaire par

$$k_p = E\{\,|s_p|^4\} - 2E\{\,|s_p|^2\}^2 \qquad (5)$$

Dans ce cas, une condition suffisante de régularité de C_S^V est donc la non nullité des kurtosis des sources et la positivité de la matrice W de pondération.

La condition de régularité de C_S^V est difficile à discuter dans le cas général car elle fait intervenir l'ensemble des intercumulants du quatrième ordre des sources. Or nous ne disposons pas de modèles généraux de corrélation au quatrième ordre : nous renvoyons à [6] pour une discussion de quelques exemples qui montrent que C_S^V est "en général" non singulière. On peut cependant dire que la singularité du second ordre, i.e. la singularité de R_S, implique une dépendance linéaire entre les signaux source qui entraine à son tour la singularité de C_S^V. Par conséquent, la singularité du second ordre entraine ici celle du quatrième ordre. Une autre cause fondamentale de singularité de C_S^V est, bien entendu, l'existence d'un sous groupe de sources conjointement gaussiennes et indépendantes statistiquement des autres sources.

2.3 Covariances ponddérées et contraction tensorielle

Nous établissons ici le lien entre les covariances pondérées et les cumulants du quatrième ordre. Ceci permet d'obtenir les propriétés P1 et P2 et d'étendre notre approche au cas non circulaire.

Nous notons a_i^j l'élément de la i-ème ligne et de la j-ième colonne d'une matrice A de taille $n \times n$. Pour un vecteur aléatoire complexe X de dimension n, nous notons Q_X une application linéaire qui transforme une matrice M en une matrice $N = Q_X(M)$ selon :

$$n_i^j = \sum_{k,l} q_{il}^{jk}\, m_k^l \qquad (6)$$

$$\text{avec} \quad q_{il}^{jk} \triangleq \mathrm{Cum}\,(x_i\,, x_j^*\,, x_k^*\,, x_l) \qquad (7)$$

L'ensemble des n^4 nombres complexes qui définissent l'application Q_X est aussi l'ensemble des cumulants du quatrième ordre de la variable X faisant intervenir deux fois la variable conjuguée et deux fois la variable non conjuguée. L'application Q_X est ce que nous avons appelé ailleurs le *tenseur cumulant du quatrième ordre* ou encore la *quadricovariance* de X. Lorsque Q_X est interprété comme un tenseur, l'opération définie par (6) est appelée *contraction* *tensorielle* du tenseur avec la matrice M, d'où le titre de cette article.

Lorsque la variable X est circulaire au sens large, l'expression de ses cumulants se réduit à

$$\mathrm{Cum}\,(x_i, x_j^*, x_k^*, x_l) = E\{x_i x_j^* x_k^* x_l\} - E\{x_i x_j^*\}\, E\{x_k^* x_l\} - E\{x_i x_k^*\}\, E\{x_j^* x_l\} \quad (8)$$

En combinant les équations 6,7,8, la définition (2) de la covariance pondérée par W apparait comme l'*image* par l'application Q_X de la matrice W: $C_X^W = Q_X(W)$. Une covariance pondérée hérite donc des cumulants du quatrième ordre les propriétés P1 et P2. La structure (4) s'obtient simplement en utilisant les notations indicées de [6].

L'extension au cas non circulaire s'obtient en retranchant à l'expression (8) un autre terme du second ordre égal à $E\{x_i x_l\}\, E\{x_j x_k\}^*$. La définition (2) doit être modifiée en conséquence ainsi que l'expression (5) du kurtosis des sources.

2.4 Tranches de cumulants

Rappelons que la proposition de Pan et Nikias pour obtenir une estimation de l'espace signal à partir d'une matrice de cumulants consiste à considérer la *tranche diagonale* ("diagonal slice") du tenseur cumulant, c'est-à-dire la matrice D de terme générique $d_i^j \triangleq q_{ij}^{ij}$. Dans le cas de sources indépendantes et d'une antenne linéaire équirépartie de capteurs omnidirectionnels, ils montrent [1] que la tranche diagonale possède la structure $D = A\Delta A^{\mathrm{H}}$ où Δ est la matrice diagonale ayant k_p pour terme générique. Elle est donc proportionnelle dans ce cas à C_Y^I car on a alors $a_p^* W a_p = |a_p|^2 = constante.$ La tranche diagonale et la covariance pondérée par l'identité sont alors essentiellement identiques en statistiques exactes mais leurs définitions respectives suggèrent deux estimateurs différents. Dans le cas plus général de sources corrélées et pour une antenne de géométrie quelconque, la tranche diagonale n'est pas necessairement hermitienne, mais on peut montrer [6] que son espace colonne correspond encore à l'espace signal. Dans nos simulations, nous travaillerons donc avec DD^{H} (une raison supplémentaire pour ce faire est que, dans tous les cas, les estimateurs naturels de la tranche diagonale ne sont pas hermitiens).

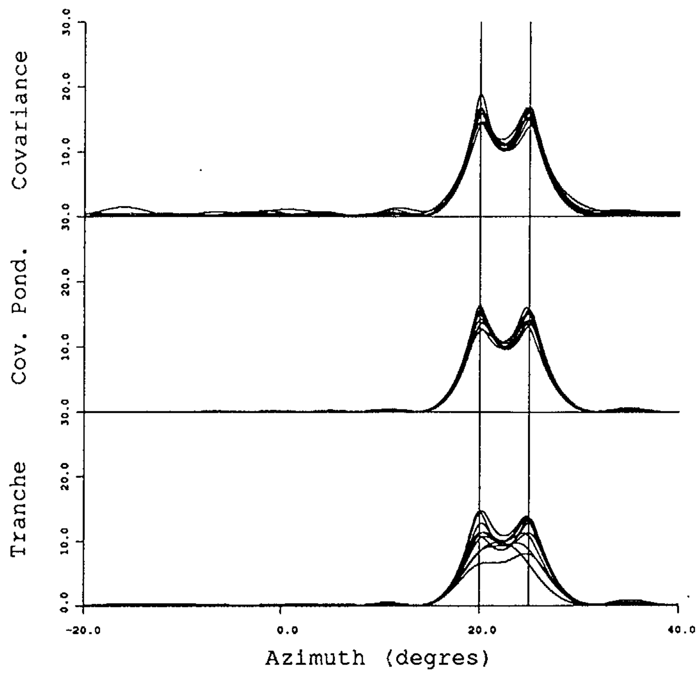
Si l'on utilise pour la pondération une matrice ne comportant qu'un 1 en position (k,k) et des 0s ailleurs, la covariance pondérée correspondante est, d'après (6) et (7), la matrice de terme générique $q_{\cdot k}^{ik}$. On obtient donc ce qui pourrait être appelé, pour des raisons évidentes, une *tranche parallèle*. Cette tranche et ses estimées sont naturellement hermitiennes. Si maintenant c'est l'identité qui est utilisée pour la pondération, on obtient une covariance pondérée de terme générique $\sum_k q_{\cdot k}^{ik}$ qui est donc une somme de tranches parallèles.

3. SIMULATIONS

Nous présentons quelques résultats de simulations pour le problème de localisation de source. Nous utilisons la technique classique MUSIC pour obtenir une fonction de localisation à partir de l'estimation de l'espace signal obtenue à partir i) de la covariance ii) de la covariance pondérée par l'identité iii) d'une tranche de cumulants. Nous ne présentons pas ici de résultats de la technique non-linéaire de [7] car, pour une comparaison significative, il faudrait utiliser une distortion cubique faisant apparaitre les moments du quatrième ordre : dans ce cas, l'estimateur de [7] est identique à celui de la tranche diagonale.

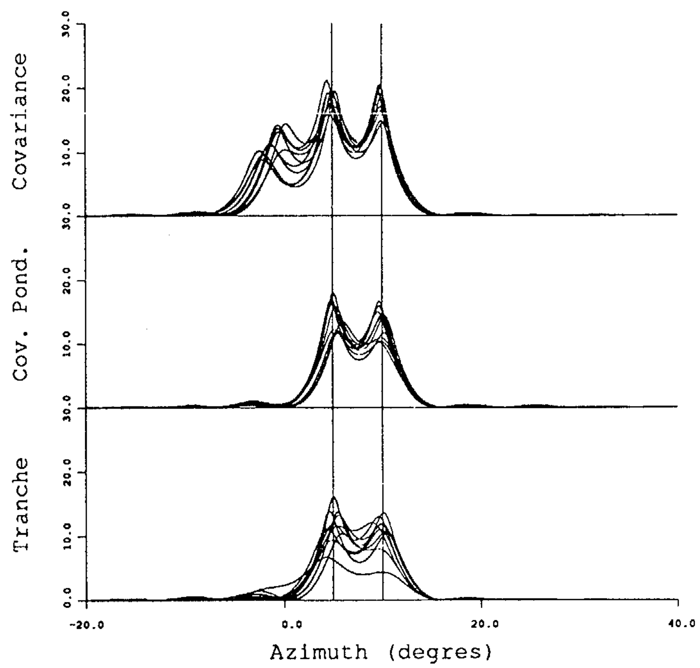
Nous présentons des simulations dans le contexte suivant. Les signaux sources sont de puissances identiques σ^2, de module constant avec une phase aléatoire uniformément répartie sur $[-\pi,\pi]$ donnant un kurtosis égal à -1. Le bruit est gaussien de structure spatiale AR1 : le terme général de sa covariance est $\sigma_b^2\, \rho^{|i-j|}$ Signaux et bruits sont temporellement blancs. L'antenne linéaire comporte 20 capteurs omnidirectionnels séparés d'une demie longueur d'onde. Les coordonnées des vecteurs directionnels sont de module 1.

Dans une première expérience, deux sources sont placées à 20 et 25 degrés du travers de l'antenne, le bruit est spatialement blanc ($\rho = 0$), le rapport signal à bruit défini par σ^2/σ_b^2 est de 0 dB. Les statistiques sont estimées sur 30 échantillons indépendants. On compare (fig. 1) sur 10 expériences, et de haut en bas, les fonctions de localisation obtenues a partir des estimées de i) la covariance ii) la covariance pondérée par l'identité iii) la tranche diagonale. On constate sur cette expérience que la covariance et la covariance pondérée présentent des performances comparables. Ceci est en accord avec le calcul théorique de [7].



La tranche diagonale présente ici une variance plus importante mais nous avons pu constater, dans d'autres expériences, que l'écart de performances entre la tranche diagonale et la covariance pondérée est moins significatif lorsque les sources ne sont pas sous le même lobe.

Dans une seconde expérience, on considère un bruit coloré spatialement avec ρ=0.8. Les sources sont situées à 5 et 10 degrés du travers. Le rapport signal à bruit est conservé à la valeur 0 db. Les statistiques sont estimées sur 20 échantillons et 10 expériences sont présentées. La coloration du bruit lui donne une cohérence qui le fait apparaitre comme une quasi source située par le travers de l'antenne.



La capacité de suppression des effets de bruit gaussien par les cumulants est bien apparente sur cette figure.

Dans les deux exemples présentés, la covariance pondérée fournit des résultats supérieurs à la tranche de cumulants. Toutefois cette supériorité n'est pas toujours très nette et n'apparait pas systématiquement dans les autres expériences que nous avons pu mener. Nous pensons qu'elle est néanmoins réelle "en moyenne" car la covariance pondérée intègre un plus grand nombre de cumulants. Une analyse comparative de performances reste à mener dans la ligne de [7].

CONCLUSIONS

Alors que le titre de cette exposé mentionnait la contraction de tenseurs, il en a été fort peu question dans la suite. C'est précisément un des avantages d'une approche tensorielle que de fournir canoniquement des matrices à partir de tenseurs du quatrième ordre par le processus de contraction. En contractant aussi la définition des cumulants, on a obtenu la définition de la covariance pondérée qui n'a plus rien de tensoriel et fait seulement appel à l'algèbre linéaire du second ordre. Les covariances pondérées sont donc des statistiques cumulantes du quatrième ordre qui, étant à valeur matricielle, fournissent un "résumé" du tenseur cumulant complet. Elles héritent des cumulants les propriétés d'additivité et d'insensibilité au bruit gaussien.

Leur structure peut souvent se déduire facilement par contraction du tenseur cumulant sous-jacent. Cette structure, similaire à celle de la covariance mais asymptotiquement insensible aux contributions gaussiennes indépendantes, permet de leur appliquer la plupart des traitements classiques du second ordre. Ceci a été illustré par quelques simulations où l'on a employé, à titre d'exemple, la technique MUSIC de localisation de sources.

Le coût d'estimation des covariances pondérées est du même ordre de grandeur que celui de l'estimation de la covariance. D'autre part, par le choix arbitraire de la matrice de pondération, elles possèdent une capacité intrinsèque de filtrage spatial qui peut être mis à profit pour une focalisation. En choisissant plusieurs matrices de pondération, on obtient des statistiques (généralement) indépendantes dont la combinaison donne une solution au problème de séparation de sources (voir l'article de A. Souloumiac dans ces mêmes Actes). On trouvera une analyse des performances obtenues avec la covariance pondérée dans [7]. Nous cherchons désormais à combiner l'approche non-linéaire de [8] avec la nature "géométrique" des objets de l'algre tensorielle.

REFERENCES

[1] R. Pan, C.L Nikias, "Harmonic Decomposition Methods in Cumulant Domains", Proc. ICASSP'88, pp. 2356-2359, New York, 1988.

[2] G. Jacovitti, G. Scarano, "The MUSIC algorithm with hybrid non-linear statistics", Proc. of EUSIPCO'90, pp. 669-672, Barcelona, September 1990.

[3] B. Porat, B. Friedlander, "Direction Finding Algorithm Based on High-Order Statistics", Proc. ICASSP'90, pp. 2675-2678, Albuquerque, 1990.

[4] J.F. Cardoso, "Localisation par la quadricovariance" Traitement du Signal, special issue "Non Gaussian-Non Linear", Vol. 7, no 5, pp. 397-406, 1990.

[5] A. Ferrari, G. Alengrin, "Estimation of the frequencies of a complex sinusoidal noisy signal using fourth order statistics" Proc. ICASSP'91, , pp. 3457-3460, Toronto, May 1991.

[6] J.F. Cardoso, "Higher order narrow band array processing" Actes de l'Ecole d'été de traitement du signal sur les ordres supérieurs, Chamrousse, juillet 91.

[7] E. Moulines, J.F. Cardoso, "Second-order versus fourth order MUSIC algorithms : an asymptotical statistical analysis" Actes de l'Ecole d'été de traitement du signal sur les ordre supérieurs, Chamrousse, juillet 91.

[8] G. Scarano, "Cumulant series expansion of hybrid nonlinear moments of complex random variables", IEEE SP Vol. 39, no. 4, April 1991.