

RECENTES EVOLUTIONS DE LA TOMOGRAPHIE 3D EN GEOMETRIE CONIQUE

Pierre GRANGEAT, Philippe RIZO, Pascal SIRE
Patrick LE MASSON, Solange DELAGENIERE, Pierre MELENNEC

LETI - Département Systèmes - SETIA, Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble,
85X, 38041 GRENOBLE CEDEX, FRANCE.

RÉSUMÉ

Résumé. La tomographie 3D en géométrie conique définit un mode d'acquisition performant. Notre analyse théorique de la reconstruction repose sur le calcul et l'inversion de la dérivée première de la transformée de Radon. Nous décrivons ici les récentes évolutions de nos travaux, à savoir le développement du logiciel RADON et son optimisation, l'étude d'un protocole d'analyse de la FTM et l'extension de notre algorithme à deux trajectoires d'acquisition circulaires inclinées.

1. INTRODUCTION

Les systèmes tomographiques 3D restituent une cartographie tridimensionnelle d'un paramètre caractéristique, la densité en imagerie par atténuation de rayons X ou l'activité en imagerie par émission de photons gamma. L'utilisation d'un détecteur bidimensionnel associé à une géométrie conique du rayonnement mesuré définit un mode d'acquisition alliant une forte résolution spatiale, une cadence d'acquisition rapide et une bonne utilisation du rayonnement émis. En imagerie X, le détecteur le plus utilisé est le tube intensificateur d'images radiologiques. Le point focal est alors défini par la source de rayonnement. En imagerie gamma, le détecteur est une gamma caméra et la géométrie d'acquisition est déterminée par le collimateur conique dont tous les trous sont dirigés vers un même point focal. Ces dispositifs mesurent un ensemble de projections intégrales modélisées par la transformation rayon X en géométrie conique. L'algorithme de reconstruction doit calculer à partir de ces projections la fonction originale image de l'objet.

L'approche classique introduite par FELDKAMP [FELDKAMP et al. (1984)] consiste à généraliser l'algorithme de reconstruction 2D en géométrie éventail. Le calcul est réalisé par des opérations de convolution et de rétroprojection en géométrie conique. Il aboutit à une solution approchée. Pour obtenir une solution exacte, il faut utiliser le domaine de Radon comme espace intermédiaire de réarrangement. Nous avons établi une formule exacte reliant la transformée rayon X, X_f , à la dérivée première de la transformée de Radon, R_f , [GRANGEAT (1987, 1991b)]. Une autre solution est d'utiliser la transformée de Hilbert de cette dérivée première, HR_f [SMITH B. (1985, 1990), KUDO ET SAITO (1989a, 1989b)]. Mais ceci impose des

ABSTRACT

Abstract. Cone beam 3D tomography provides an accurate acquisition modality. Our theoretical analysis for the reconstruction is based on the computation and the inversion of the first derivative of the Radon transform. We describe here the recent advances of our work, the implementation of the RADON software and its optimization, the study of a MTF analysis protocol and the up grade of our algorithm to a dual tilted circular acquisition trajectory.

filtrages globaux sur les projections, alors que notre approche n'utilise que des filtrages locaux.

Partant de cette nouvelle analyse mathématique, nous avons développé le logiciel de reconstruction RADON en accordant un soin particulier à la portabilité du code afin de pouvoir le faire tourner sur les différents ordinateurs équipant nos projets d'application et sur le CRAY II du Centre Grenoblois de Calcul Vectoriel. Au paragraphe 3, nous expliquons pourquoi notre algorithme est bien adapté aux ordinateurs scientifiques modernes combinant la vectorisation et la parallélisation des calculs.

Un des principaux avantages attendus des acquisitions en géométrie conique est d'améliorer la résolution spatiale des systèmes tomographiques par l'effet de grossissement. Il est alors important de savoir mesurer la Fonction de Transfert de Modulation (FTM) imposée par l'algorithme de reconstruction, afin de pouvoir optimiser son influence. Nous avons donc mis au point un protocole de mesure adapté, décrit au paragraphe 4.

Enfin, d'un point de vue mécanique, la trajectoire d'acquisition circulaire est la plus facile à réaliser. De plus, elle introduit une symétrie de révolution permettant d'accélérer les calculs au cours de la reconstruction. Cependant, notre analyse mathématique met en évidence l'existence d'une zone d'ombre dans le domaine de Radon liée aux plans qui passent par l'objet mais qui ne rencontrent pas la trajectoire. L'utilisation d'une deuxième trajectoire circulaire située sur un plan incliné par rapport au plan de la première trajectoire permet de combler cette zone d'ombre. Au paragraphe 5, nous décrivons comment notre algorithme peut être adapté à une telle configuration d'acquisition et comment cela améliore la FTM du système.



2. FONDEMENT MATHÉMATIQUE DE NOTRE APPROCHE

2.1 La transformation rayon X en géométrie conique

Les mesures d'atténuation sont modélisées par la transformation rayon X en géométrie conique.

Les droites d'acquisition sont définies par le point source S et les points d'échantillonnage Ad répartis sur la face d'entrée du détecteur. Pour simplifier les expressions, nous repérons ces droites grâce à un plan de détection virtuel passant par l'origine O du repère de l'objet, et perpendiculaire à l'axe (S,O) définissant l'incidence de mesure. Le maillage des points d'échantillonnage sur la face d'entrée du détecteur définit par une simple homothétie la maillage d'échantillonnage des mesures sur le plan de détection [GRANGEAT (1987), 1991b].

Pour cette position de source S et un point A du plan de détection, la transformation rayon X correspond à l'intégrale de la fonction f décrivant les valeurs locales du coefficient d'atténuation, le long du demi-axe issu de S et passant par A :

$$Xf(S,A) = \int_{a=0}^{+\infty} f \left(S + a \cdot \frac{\vec{SA}}{\|\vec{SA}\|} \right) da$$

2.2 L'algorithme de reconstruction via la dérivée première de la transformée de Radon

Nous avons mis au point un algorithme original qui repose sur le calcul explicite de la dérivée première de la transformée de Radon, puis sur son inversion [GRANGEAT (1987, 1991b)]. Dans le domaine de Radon, il devient en effet possible, par une opération de réarrangement, de redistribuer les valeurs intégrales associées aux plans, du système de coordonnées lié aux positions de la source sur le système de coordonnées sphériques du domaine.

Nous avons établi la formule suivante reliant les mesures à la dérivée première R'f de la transformée de Radon :

$$R'f \left(\vec{OS} \cdot \vec{n}, \vec{n} \right) = \frac{\|\vec{OS}\|^2}{\|\vec{OS} \wedge \vec{n}\|^2} \cdot \frac{\partial SYf}{\partial p'} \left(S, \vec{n} \right)$$

où : * Yf représente la transformation rayon X pondérée :

$$Yf(S,A) = \frac{\|\vec{SO}\|}{\|\vec{SA}\|} \cdot Xf(S,A)$$

* $\left(\vec{OS} \cdot \vec{n}, \vec{n} \right)$ représente les coordonnées normales du plan de sommation.

* SYf représente la transformation rayon X pondérée sommée ; si D(S,n) est la droite de sommation définie par l'intersection du plan de sommation avec le plan de détection :

$$SYf \left(S, \vec{n} \right) = \int_{A \in D(S, \vec{n})} Yf(S,A) dA$$

* $\frac{\partial}{\partial p'}$ représente l'opération de différentiation sur le plan de détection, dans la direction perpendiculaire à la droite de sommation.

Le calcul de la fonction f s'effectue alors en mettant en oeuvre la formule d'inversion de la dérivée première de la transformée de Radon, R'f. La première étape est une opération de convolution - rétroprojection sur chaque plan méridien du domaine de Radon :

$$HD\tilde{X}f(\varphi,B) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\partial^2 Rf}{\partial p'^2} \left(\vec{OB} \cdot \vec{n}(\theta,\varphi), \vec{n}(\theta,\varphi) \right) \cdot \sin\theta d\theta$$

La deuxième étape est une opération de rétroprojection sur chaque plan axial perpendiculaire à l'axe de rotation.

$$f(\vec{M}) = \int_{\varphi=0}^{\pi} HD\tilde{X}f(\varphi,B(\varphi,\vec{M})) d\varphi$$

où B(φ,M) est la projection orthogonale du point M sur le plan méridien de longitude φ.

3. DEVELOPPEMENT ET OPTIMISATION DU LOGICIEL RADON

Le traitement de la 3^{ème} dimension met en oeuvre des algorithmes de reconstruction N⁴ complexes qui conduisent à effectuer de très nombreuses opérations sur des volumes de données importantes. Nous sommes donc en présence d'un problème doublement délicat, à savoir la nécessité de faire beaucoup de calculs tout en accédant à de très gros volumes de mémoire. La reconstruction de volumes de grandes dimensions (128³ et plus) demande donc des moyens de calcul considérables.

Les performances des calculateurs scientifiques modernes, constitués d'une ou plusieurs unités de traitement scalaires et vectorielles, permettent de diminuer de façon significative les temps de calcul. Toutefois l'usage optimal de telles machines demande une étude algorithmique et logicielle appropriée qui fait suite aux développements théoriques. Notre objectif a donc été la réalisation d'un logiciel qui utilise au mieux les ressources de tels calculateurs. Pour cela, nous avons développé le logiciel RADON qui met en oeuvre notre approche originale dans le cas d'une trajectoire circulaire. Il a été optimisé pour une exécution sur une architecture vectorielle et multiprocesseur à mémoire partagée. Notre étude a été conduite sur le calculateur CRAY2 du CEA installé au Centre Grenoblois de Calcul Vectoriel.

L'optimisation du logiciel porte sur la structure des données et des boucles de calcul, sur la vectorisation des boucles internes, sur les protocoles d'accès aux données en mémoires, sur les entrées/sorties, et sur la parallélisation des traitements. Un des avantages de notre méthode et de ramener les traitements sur des volumes 3D à un ensemble de calculs indépendants sur des images 2D. Notre démarche a donc tout d'abord consisté à définir une structure logicielle qui mette à profit cette indépendance en garantissant à terme une



parallélisation ainsi qu'une vectorisation performante de ces traitements.

Les étapes de calcul qui consomment le plus de temps ont vu leurs performances considérablement améliorées par la prise en compte de symétries liées à l'utilisation d'une trajectoire circulaire. Ces symétries permettent la mise en œuvre de masques invariants destinés à limiter les calculs aux opérations strictement nécessaires, mais surtout autorisent une mise en facteur de certaines opérations présentes dans les boucles les plus internes. Cette approche nous a permis d'une part d'abaisser au minimum le nombre d'opérations élémentaires, et d'autre part de reconsidérer la vectorisation des calculs. Les boucles les plus internes sont alors ramenées à de simples combinaisons linéaires de vecteurs. Ces opérations sont très performantes lorsque la taille des vecteurs à traiter est suffisante, ce qui est notre cas dans la mesure où l'on utilise un nombre important d'acquisitions.

Alors que sur une machine scalaire (VAX6300) l'algorithme classique est trois fois plus rapide que le notre, à l'inverse, sur le CRAY2, nous avons obtenu des performances deux fois supérieures. La reconstruction d'un volume 256^3 à partir de 512 projections 256^2 demande 17 mn pour le logiciel RADON sur le CRAY2 avec un processeur, contre 42 mn avec l'algorithme classique.

Le logiciel RADON a été écrit en Fortran 77 pour être portable sur la plupart des calculateurs. A ce jour, il a fonctionné sur un VAX 6300, sur une station SUN4, sur une station SILICONE GRAPHICS, sur un CRAY2 et sur plusieurs calculateurs ALLIANT (FX40, FX80,...).

4. PROTOCOLE D'ANALYSE DE LA FTM

4.1 FTM théorique

La Fonction de Transfert de Modulation (FTM) théorique du système tomographique 3D est imposée par les fenêtres d'apodisation utilisées sur les filtres de reconstruction. Nous utilisons des fenêtres de honning exponentielles, de fréquence de coupure v_c et d'exposant B. Notons MTFX les variations radiales de la FTM suivant les directions perpendiculaires à l'axe de rotation, et MTFZ les variations axiales suivant la direction de l'axe de rotation. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MTFX}(v) = \text{MTFZ}(v) = \left[\frac{1 + \cos \left[\pi \frac{v}{v_c} \right]}{2} \right]^{2B} \quad \text{for } |v| \leq v_c \\ = 0 \quad \text{for } |v| > v_c \end{array} \right.$$

4.2 Analyse de la FTM

Du fait de la géométrie conique d'acquisition, la FTM varie sur le support de l'objet. Nous noterons h_c la réponse impulsionnelle du système tomographique dans le voisinage du point C. Nous plaçons au point C une fonction test f_c . Soit s_c l'image reconstruite associée. Nous supposons que le support de la réponse impulsionnelle est suffisamment petit devant les

distorsions spatiales pour pouvoir écrire localement l'équation de convolution :

$$s_c = h_c * f_c$$

Nous utilisons deux logiciels de simulations analytiques pour calculer l'image 3D de la fonction test, f_c , et l'image des projections définie par la transformée rayon X, Xf_c . Puis nous calculons grâce à notre logiciel RADON l'image 3D reconstruite, s_c . La FTM, MTF_{h_c} , s'exprime par le rapport des transformées de Fourier de s_c , Fs_c , et de f_c , Ff_c .

$$\text{MTF}_{h_c} = \frac{|Fs_c|}{|Ff_c|}$$

Nous nous limitons au calcul des variations radiales MTFX et axiales MTFZ.

Pour obtenir plus de précision, nous choisissons une fonction test adaptée à chaque fréquence étudiée.

Notons X_r la fonction caractéristique de la sphère de rayon r centrée sur l'origine O. Nous formons la fonction test $f_{(0,r)}$ par imbrication de trois sphères de rayon respectif r, 2r et 3r :

$$f_{(0,r)}(M) = D \cdot [\chi_r(M) - \chi_{2r}(M) + \chi_{3r}(M)]$$

où D est la densité associée à la fonction test.

Les variations radiales de sa transformée de Fourier, $Ff_{(0,r)}$, sont données par la relation :

$$Ff_{(0,r)}(v) = D \cdot \left(\frac{r}{v} \right)^{3/2} \left[J_{3/2}(2\pi vr) - 2^{3/2} J_{3/2}(4\pi vr) + 3^{3/2} J_{3/2}(6\pi vr) \right]$$

où $J_{3/2}$ est la fonction de Bessel de première espèce d'indice 3/2.

On vérifie que la fréquence suivante est proche d'un maxima de cette fonction :

$$v = \frac{1}{2r}$$

Nous choisissons successivement comme valeur pour le rayon r 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5 fois le pas de l'échantillonnage sur l'objet. La relation ci-dessus donne les fréquences associées analysées, soit 0.33, 0.25, 0.20, 0.17, 0.14 fois la fréquence d'échantillonnage.

Pour plus de détails, on pourra se reporter aux références [GRANGEAT et al. (1991a), RIZO et al. (1991b)].

5. RECONSTRUCTION A PARTIR DE DEUX TRAJECTOIRES CIRCULAIRES INCLINEES

L'ensemble des points de l'espace de Radon correspondant à une trajectoire circulaire de la source définit un tore centré sur l'origine du repère et dont le diamètre est donné par la distance entre l'origine O et le point source S [GRANGEAT (1987, 1991b)]. La transformée de Radon 3D d'un objet sphérique centré sur l'origine est une sphère de même diamètre que l'objet. Par conséquent, pour reconstruire un objet admettant cette sphère comme support, il faudra mesurer tous les points du support sphérique dans l'espace de Radon.

Dans le cas d'une trajectoire unique de la source, les points qui sont dans la sphère et hors du tore ne sont pas définis. En



général, on interpole explicitement cette "zone d'ombre" lors de la reconstruction. Toutefois, cette interpolation n'est qu'une approximation et ne demeure valide que lorsque la dimension de la zone d'ombre est faible, c'est-à-dire pour des valeurs faibles de l'ouverture angulaire. En général on considère que l'on peut interpoler jusqu'à des ouvertures de $\pm 15^\circ$.

Le principe de la double trajectoire circulaire est de combiner l'information provenant de deux tores associées à chaque trajectoire afin de couvrir tous les points du support sphérique [RIZO et al. (1990)]. Pour des raisons mécaniques, il est en général impossible de générer deux trajectoires à 90° et de les centrer sur le même point. Nous considérerons donc le cas de deux trajectoires circulaires de rayon différent R_{sou1} et R_{sou2} centrées sur des points très proches et inclinées l'une par rapport à l'autre d'un angle ξ inférieur à 90° . On peut alors donner pour un angle total 2ξ d'ouverture du faisceau, le rayon maximum du support sphérique qui peut être reconstruit sans approximation avec de telles trajectoires.

$$R_{rad} = \frac{R_{sou1} \cdot R_{sou2} \cdot \sin \xi}{\sqrt{R_{sou1}^2 + R_{sou1}^2 R_{sou2}^2 \cos^2 \xi + R_{sou2}^2}}$$

Dans l'espace de Radon, les plans sont repérés par les coordonnées sphériques (ξ, θ, φ) de leur point caractéristique C , défini comme la projection orthogonale de l'origine O du repère sur le plan. Avant d'inverser la dérivée première de la transformée de Radon, les deux domaines de Radon doivent être exprimés dans un repère commun, lié à l'objet. Lors de ce changement de repère, on moyenne les points de l'espace de Radon qui ont été définis lors des deux acquisitions, et on utilise directement les points qui ne sont définis que dans une des acquisitions.

On montre les apports de cette méthode sur les figures 1 et 2. présentant la FTM de la reconstruction en double trajectoire et celle de la reconstruction sur une seule trajectoire. Les calculs ont été réalisés sur des volumes 64^3 . Les FTM ont été calculées sur le plan de la trajectoire et à un angle de 10° ($Z=176\text{mm}$) par rapport à ce plan. On notera pour les positions excentrées la suppression des distorsions sur la FTM axiale (Fig.2).

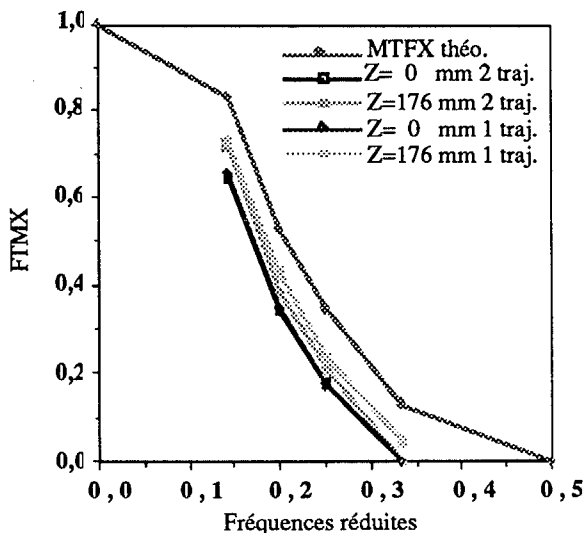


Figure 1: Distorsions des variations radiales de la FTM sur l'axe de rotation

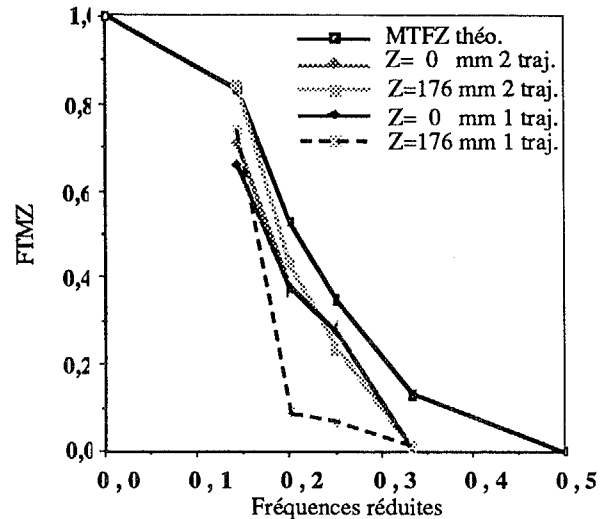


Figure 2: Distorsions des variations axiales de la FTM sur l'axe de rotation

Au LETI, les différents projets de tomographes 3D en géométrie conique bénéficieront prochainement de ces récentes évolutions.

6. REFERENCES

- FELDKAMP L.A., DAVIS L.C., KRESS J.W. (1984). "Practical cone-beam algorithm". J. Opt. Soc. Am., 1 (6), 612-619.
- GRANGEAT P. (1987). Analyse d'un système d'imagerie 3D par reconstruction à partir de radiographies X en géométrie conique. Thèse de doctorat. Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications.
- GRANGEAT P., LE MASSON P., MELENNEC P., SIRE P. (1991a). "Evaluation of the 3D Radon transform algorithm for cone beam reconstruction". Medical Imaging V, Technical conference 1445 : Image Processing, San Jose (California-USA), 23 février - 1 mars 1991.
- GRANGEAT P. (1991b). "Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform". A paraître dans HERMAN G.T., LOUIS A.K., NATTERER F., Mathematical Methods in Tomography, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag.
- KUDO H., SAITO T. (1989a). "3-D tomographic image reconstruction from incomplete cone beam projections". In Proc. Topical Meeting OSA, Signal Recovery and Synthesis, Cape Code, USA, 170 - 173.
- KUDO H., SAITO T. (1989b). "Feasible cone beam scanning methods for exact 3-D tomographic image reconstruction". In Proc. Topical Meeting OSA, Signal Recovery and Synthesis, Cape Code, USA, 174 - 177.
- RIZO Ph., GRANGEAT P., SIRE P., LE MASSON P., DELAGENIERE S. (1990). "Cone beam 3D reconstruction with a double circular trajectory". 1990 Fall Meeting of the Material Research Society, Boston.
- RIZO Ph., GRANGEAT P., SIRE P., LE MASSON P., MELENNEC P. (1991). "Comparison of two 3D cone beam reconstruction algorithm with a circular source trajectory". A paraître dans J. Opt. Soc. Am.
- SMITH B.D. (1985). "Image reconstruction from cone-beam projections : necessary and sufficient conditions and reconstruction methods". IEEE Trans. on Med. Imag., MI - 4 (1), 14 - 25.
- SMITH B.D. (1990). "Cone-beam tomography : recent advances and a tutorial review". Optical Engineering, 29 (5), 524 - 534.