

POTENTIELS CANONIQUES ET MODELES MARKOVIENS

Xavier DESCOMBES, Françoise PRETEUX

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications
46, rue Barrault 75013 Paris

RÉSUMÉ

Les champs markoviens, de part leurs liens avec les distributions de Gibbs, sont caractérisés par le choix d'une topologie (ou système de cliques) et le choix d'un ensemble de fonctions à variables multiples (ou famille de potentiels). Nous proposons d'exprimer les potentiels sous une forme polynomiale canonique et développons une méthode d'estimation des paramètres induits par cette nouvelle formalisation.

1 INTRODUCTION

Les modèles stochastiques font l'objet de nombreuses recherches et applications en reconnaissance des formes aussi bien pour segmenter des objets que pour restaurer des images ou encore synthétiser et analyser des textures (5,6).

Dans ce contexte, l'intérêt pour les méthodes markoviennes réside dans la souplesse et la diversité des modélisations possibles d'une part, et dans leurs fondements mathématiques qui garantissent, grâce à l'interprétation en termes de distributions de Gibbs, l'équivalence entre approches locale et globale lors de la définition du modèle (7).

Toutefois, d'un point de vue pratique, si les algorithmes utilisés en synthèse markovienne (ICM, recuit simulé...) sont bien maîtrisés, ainsi que leurs propriétés de convergence, le choix de la topologie et des différents potentiels reste trop souvent pragmatique et tributaire de l'application considérée.

En introduisant puis formalisant la notion de potentiels canoniques, nous proposons ici une approche générale, indépendante de l'application et du type d'image, permettant de limiter ou de simplifier les hypothèses a priori et unifiant les différents modèles décrits dans la littérature. En outre, nous développons une méthode pour estimer les paramètres intrinsèques aux potentiels canoniques fondée sur l'analyse statistique des images.

2 POTENTIELS CANONIQUES

2-1 Existence et unicité

Soient $\Omega = \{s, s \in \{1, N\}\}$ un ensemble de sites et $\Lambda = \{u_i, i \in \{1, M\}\}$ un ensemble d'états.

Considérons une probabilité P sur Ω^Λ :

$$P : \Omega^\Lambda \rightarrow [0, 1]$$

vérifiant la contrainte de positivité :

$$H_1 : \forall \omega \in \Omega, P(\omega) > 0.$$

Alors P s'écrit sous la forme d'une distribution de Gibbs :

$$P(\omega) = \exp(\log(P(\omega))),$$

et nous avons (2) :

Les auteurs remercient la DRET pour son soutien financier dans cette recherche.

ABSTRACT

The links between Markov's Random Fields and Gibbs' distributions allow us to characterize MRF with the choice of a topology (i.e. a set of cliques) and a set of multiple variable functions (i.e. a family of potentials). We propose to express the potentials as canonical polynomials and present a method for estimating the parameters relative to this formulation.

Théorème 1 :

$$P(\omega) = \exp\left(\sum_{A \subseteq \Omega} V_A(\omega)\right)$$

$$\text{avec } V_A(\omega) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{\text{Card}(A-B)} \log(P(\omega^B))$$

$$\text{où } \omega_i^B = \omega_i \text{ si } i \in B \text{ et } \omega_i^B = \lambda_0 \text{ sinon.}$$

Démonstration :

$$\sum_{A \subseteq \Omega} \sum_{B \subseteq A} (-1)^{\text{Card}(A-B)} \log(P(\omega^B))$$

$$= \sum_{B \subseteq \Omega} \sum_{A \supseteq B} (-1)^{\text{Card}(A-B)} \log(P(\omega^B))$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } B = \Omega \text{ alors } A = B \text{ et } \sum_{A \supseteq B} (-1)^{\text{Card}(A-B)} = 1$$

$$2^{\text{me}} \text{ cas : } B \subset \Omega \text{ alors } \Omega = B \cup \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$$

$$\text{et } A \in \{B \cup \{\omega_1\}, B \cup \{\omega_1, \omega_2\}, \dots, B \cup \{\omega_1, \dots, \omega_p\}\}.$$

Nous avons donc :

$$\sum_{A \supseteq B} (-1)^{\text{Card}(A-B)} = -p + C_p^2 C_p^3 + \dots + (-1)^p$$

$$= \sum_{q=1}^p (-1)^q C_p^q$$

$$= (1-x)^p \Big|_{x=1}$$

$$= 0.$$

$$\text{Ce qui établit : } \forall \omega \in \Omega \sum_{A \subseteq \Omega} V_A(\omega) = \log(P(\omega)).$$

Remarquons que le fait d'avoir $\omega_i^B = \lambda_0$ pour $i \notin B$ revient à particulariser un état de Λ .

Considérons une clique C de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 1 :

P est markovienne relativement à C si et seulement si :

$$V_A(\omega) \neq 0 \iff A \in C$$

L'énergie d'une distribution de Gibbs se décompose donc en une somme de potentiels V_A .

Cette décomposition $U = \sum V_A$ n'est pas unique, d'où la multiplicité des familles numériques de potentiels possibles et des erreurs de modélisation. Pour lever les ambiguïtés et conflits ainsi créés, nous proposons le théorème suivant :

Théorème 2 :

Soit P vérifiant H1. L'énergie de la distribution de Gibbs associée à P se décompose de façon unique sous la



3 DECOMPOSITION SUR UNE BASE POLYNOMIALE

3-1 Base polynomiale de Lagrange

Nous proposons d'exprimer les potentiels canoniques sous forme polynomiale. Pour cela nous nous inspirons de la décomposition proposée par Besag (1) qui considère les familles :

$$V_{\{s_1, \dots, s_p\}}(x_1, \dots, x_p) = x_1 \times \dots \times x_p \times G_{s_1, \dots, s_p}(x_1, \dots, x_p)$$

de potentiels vérifiant la propriété P1 pour $\lambda=0$ et donc canoniques.

Dans ce cas, la fonction G est définie point par point. Nous proposons de conserver cette structure de potentiels en prenant pour G une fonction polynomiale. Nous considérons donc pour chaque clique :

$$V_{\{s_1, \dots, s_p\}}(x_1, \dots, x_p) = (x_1 - \lambda_0) \times \dots \times (x_p - \lambda_0) \times P_{\{s_1, \dots, s_p\}}(x_1, \dots, x_p).$$

Nous définissons alors une famille de potentiels canoniques associée à λ_0 .

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses suivantes :

- H2 Toute clique est de cardinal fini, Λ , espace des états, est fini,

Notons que ces hypothèses sont d'emblée vérifiées sur des images.

Un potentiel associé à la clique C est alors une fonction de $\Lambda^{\text{card}C}$ dans \mathbb{R} . Il est donc parfaitement défini par un

élément de $\mathbb{R}^{(\text{card}\Lambda)^{\text{card}C}}$, ce qui établit un isomorphisme entre cet ensemble et l'ensemble des potentiels sur C.

Que devient l'hypothèse (H1) sur $\mathbb{R}^{(\text{card}\Lambda)^{\text{card}C}}$? Un potentiel doit être nul si un des sites, élément de la clique associée, vaut λ_0 . Par conséquent l'ensemble des

potentiels canoniques associés à C est isomorphe à $\mathbb{R}^{(\text{card}\Lambda-1)^{\text{card}C}}$.

D'autre part, $\mathbb{R}^{(\text{card}\Lambda-1)^{\text{card}C}}$ est isomorphe à l'ensemble des polynômes de variables X_1, \dots, X_p de degré strictement inférieur à $\text{card}\Lambda$ par rapport à chaque variable et divisibles par $\prod_i (X_i - \lambda_0)$.

Notons Π_p cet ensemble. L'ensemble des potentiels associés à C est donc isomorphe à Π_p . Tout potentiel associé à C se décompose de façon unique sur une base de Π_p . La base

polynomiale de Lagrange sur laquelle seront décomposés les différents potentiels peut être exprimée comme suit :

$$\prod_{i=1}^p \left(\prod_{u \in \Lambda, u \neq \lambda_0} (X_i - u) / (u_i - u) \right) (X_i - \lambda_0) / (u_i - \lambda_0), (u_i) \in \Lambda / \{\lambda_0\}^{\text{card}C}.$$

Nous avons alors :

$$V_C(X_1, \dots, X_p) = \sum_{(u_i) \in \Lambda / \{\lambda_0\}^{\text{card}C}} \left(\prod_{u \in \Lambda, u \neq \lambda_0} (X_i - u) / (u_i - u) \right) (X_i - \lambda_0) / (u_i - \lambda_0) V_C(u_1, \dots, u_p).$$

A titre d'exemple décomposons le modèle d'Ising défini en 4-connexité sur la base polynomiale canonique de Lagrange associée à $\lambda_0 = 0$:

Les potentiels (associés aux cliques d'ordre deux) sont alors initialement exprimés par :

$$V_C(x, y) = \beta \delta_{x=y}.$$

La décomposition canonique fait alors intervenir les cliques d'ordre un et deux.

Pour $C = \{x\}$, la base polynomiale est constituée du polynôme X et nous avons $V_C(x) = V(1) x = -4\beta x$,

Pour $C = \{x, y\}$, la base polynomiale est constituée du polynôme $X_1 X_2$ et nous avons $V_C(x, y) = V(1, 1) xy = 2\beta xy$.

forme :

$$U(\omega) = \sum_{A \subseteq \Omega} V_A(\omega)$$

où V_A satisfait la propriété P1 suivante :

$$(\exists s \in A, \omega_s = \lambda_0) \Rightarrow V_A(\omega) = 0.$$

Démonstration :

L'existence est immédiate puisqu'elle découle de la décomposition introduite dans le théorème 1.

Pour établir l'unicité, supposons qu'il existe deux décompositions. On a alors :

$$\exp\left(\sum_{A \subseteq \Omega} V_A(\omega)\right) = \exp\left(\sum_{A \subseteq \Omega} V'_A(\omega)\right)$$

$$\forall \omega \in \Omega^\Lambda \quad \sum_{A \subseteq \Omega} V_A(\omega) = \sum_{A \subseteq \Omega} V'_A(\omega).$$

D'après P1, en considérant $\omega = (\lambda_0, \lambda_0, \dots, \lambda_0, u_s, \lambda_0, \dots, \lambda_0)$, nous obtenons : $\forall u_s \in \Lambda \quad V_{\{s\}}(\omega) = V'_{\{s\}}(\omega)$.

Or, ces potentiels ne dépendent que de u_s donc :

$$\forall s \in \Omega \quad V_{\{s\}} = V'_{\{s\}},$$

ce qui montre que les potentiels associés aux cliques d'ordre un sont égaux.

En considérant $\omega = (\lambda_0, \dots, \lambda_0, u_s, \lambda_0, \dots, \lambda_0, u_t, \lambda_0, \dots, \lambda_0)$,

nous obtenons l'égalité des potentiels associés aux cliques d'ordre deux. Par récurrence, l'égalité terme à terme de tous les potentiels est établie, assurant ainsi l'unicité de la décomposition.

Les potentiels définis par le théorème ci-dessus sont appelés **potentiels canoniques associés à l'état λ_0** .

Une expression de ces potentiels est donnée par Snell et Kinderman (théorème 1). Dans le cas où $\lambda_0 = 0$, une autre

expression de ces potentiels est donnée par Besag (1). L'intérêt du théorème 2 est d'établir que deux familles de potentiels associées à une même famille de potentiels canoniques sont donc équivalentes.

2-2 Champs markoviens et potentiels canoniques

Définir un champ markovien consiste à se donner un système de cliques (sous-ensembles de Ω pour lesquels les potentiels ne sont pas nuls), ce qui revient à se définir une topologie ; puis un ensemble de fonctions (potentiels associés aux cliques choisies). Cette démarche est celle utilisée en traitement des images, le choix des cliques se faisant par l'intermédiaire du choix d'un système de voisinages. Un bon exemple peut être trouvé dans (7).

Considérons un champ markovien dont les potentiels sont notés V_A et soient V_A^c les potentiels canoniques associés à ce champ markovien. Introduisons quelques définitions avant de poursuivre.

Définition 2 :

Le nombre entier $0 = \max \{\text{card } A, A \text{ tel que } V_A \neq 0\}$

est appelé **ordre de la famille de potentiels**.

Proposition 1 :

L'ordre de la famille de potentiels canoniques est inférieur ou égal à celui de la famille initiale.

Définition 3 :

Une famille de potentiels est dite **dégénérée** si et seulement si son ordre est strictement inférieur à celui de la famille de potentiels canoniques qui lui est associée.

Définition 4 :

Un système de cliques est dit **stationnaire** si et seulement si pour toute translation t sur Ω on a :

$$(A \in C, t(A) \subseteq \Omega) \Rightarrow t(A) \in C$$

Un champ markovien dont le système de cliques associé est stationnaire sera dit **topologiquement stationnaire**.

Définition 5 :

Un champ markovien est dit **stationnaire** si et seulement si :

1) Il est topologiquement stationnaire.

2) Pour toute translation t sur Ω on a :

$$(A \in C, t(A) \in C) \Rightarrow V_A^c = V_{t(A)}^c.$$

L'énergie s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \beta \left(\sum_x -4x + \sum_{x,y} 2xy \right) = \beta \sum 2xy - x^2 \\
 &= \beta \sum 2xy - x^2 - y^2 \quad ((x,y) \in \{0,1\}^2) \\
 &= \beta \sum -(x-y)^2 = \beta \sum_{x=y} \delta_{x=y} - 1 = \beta \sum_{x=y} \delta_{x=y}.
 \end{aligned}$$

3-2 Base polynomiale usuelle

Pour les modèles à plusieurs niveaux de gris, les polynômes de Lagrange vont être d'un degré très élevé. En conséquence, bien que les coefficients des potentiels dans cette base présentent l'avantage d'être égaux à la valeur du potentiel au point correspondant au vecteur de base considéré, nous prendrons comme base polynomiale la base usuelle fournit des polynômes de degré moindre tout en mettant en valeur les différentes symétries.

Exprimons maintenant ces polynômes pour les potentiels les plus couramment utilisés.

En segmentation d'images, les champs markoviens sont souvent utilisés pour modéliser l'image des labels (image segmentée) via un modèle de Potts (généralisation du modèle d'Ising à un processus à plusieurs niveaux de gris).

Le modèle de Potts agit sur les cliques d'ordre deux de la façon suivante :

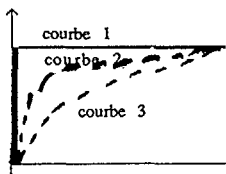
$$V(x,y) = -\beta \delta_{x=y},$$

x et y pouvant prendre des valeurs entières entre 0 et M, nous avons :

$$V(x,y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \left(\frac{(x-y)^2}{M^2} - 1 \right)^{2n+1}.$$

Dans la pratique, il faut prendre un n fini, une valeur trop petite de n défavorisant les niveaux de gris extrêmes (fig. 1 et 2).

$\beta - V(x,y)$



Courbe 1 : modèle de Potts
($n = \infty$)
Courbe 2 : modèle approché
n grand
Courbe 3 : modèle approché
n petit

Figure 1 : Allure des potentiels pour un modèle de Potts.

En restauration d'images ou encore en synthèse de textures, le modèle le plus couramment utilisé est le modèle gaussien d'ordre deux pour lequel la différence des deux pixels d'une même clique suit une loi gaussienne centrée i.e. $V(x,y) = -(x-y)^2/2\sigma^2$.

Dans ce cas, la décomposition canonique sur la base polynomiale usuelle est immédiate et donne en 4-connexité : $V(x) = -4x^2/2\sigma^2$ et $V(x,y) = 2xy/2\sigma^2$.

IV ESTIMATION DES PARAMETRES

4-1 Ordre deux : cas général

L'estimation des paramètres se réduit donc à l'estimation des coefficients des différents polynômes. Etudions le cas d'un ordre deux où $V = \{y_i\}$ représente le voisinage de x. Les potentiels V_A sont notés $p_1(x)$ et $p_2^i(x, y_i)$ et les probabilités sont notées P. Nous avons alors :

$$P(x) \propto \sum_{y_i} \exp(-p_1(x) - \sum_i p_2^i(x, y_i)) = \exp(-p_1(x)) \prod_i \exp(-p_2^i(x, y_i))$$

d'où d'après le théorème de Fubini :

$$P(x) \propto \exp(-p_1(x)) \prod_i \sum_{y_i} \exp(-p_2^i(x, y_i)) \quad [1],$$

$P(x)$ peut être aisément estimée à partir de l'image. De même, les probabilités conditionnelles sont exprimées par :

$$P(x/V) \propto \exp(-p_1(x) - \sum_i p_2^i(x, y_i)) \quad [2].$$

Ces probabilités conditionnelles, directement accessibles sur l'image, liées à la condition H1, fournissent une estimation des polynômes grâce aux formules [1] et [2]. Néanmoins, pour obtenir une estimation fiable, la présence d'un assez grand nombre de représentants de chaque type de configurations de voisinage est nécessaire. En pratique, les deux formules précédentes peuvent se révéler être d'une utilisation délicate. Une solution consiste alors à utiliser des symétries obtenues soit par détection sur l'image, soit par hypothèse. Ainsi, des propriétés d'isotropie ou encore la restriction aux polynômes ne dépendant que de la différence $(x-y)^2$ permettent, sans perte de généralité dans la plupart des cas, d'obtenir des estimations fiables et robustes comme nous allons le démontrer sur les exemples qui suivent.

4-2 Cas de potentiels de degré deux

Afin de mener les calculs jusqu'à leur terme, considérons des potentiels de degré inférieur ou égal à deux. Les potentiels, de type canonique, sont alors donnés par :

$$V(x) = a_2 x^2 + a_1 x,$$

$$V(x,y) = b_{22} x^2 y^2 + b_{21} x^2 y + b_{12} x y^2 + b_{11} x y.$$

Par suite, si l'on note m_1 la somme des voisins et m_2 la somme des carrés des voisins, nous avons :

$$P(x/V) \propto \exp(-a_2 x^2 + a_1 x + b_{22} x^2 m_2 + b_{21} x^2 m_1 + b_{12} x m_2 + b_{11} x m_1)$$

$$P(x/V) \propto \exp(-[a_2 + b_{22} m_2 + b_{21} m_1] x^2 + (a_1 + b_{12} m_2 + b_{11} m_1) x).$$

En posant :

$$A = a_2 + b_{22} m_2 + b_{21} m_1 \quad \text{et} \quad B = a_1 + b_{12} m_2 + b_{11} m_1,$$

nous avons alors :

$$P(x/V) \propto \exp -[A (x + B/2A)^2].$$

$P(x/V)$ est donc une gaussienne centrée en $B/2A$ et de variance $1/2A$.

Pour différentes configurations de voisinage, i.e. différentes valeurs de m_1 et m_2 , l'extraction de $P(x/V)$ permet d'estimer A et B, les paramètres étant donnés par résolution d'un système linéaire.

4-3 Application au modèle gaussien

Appliquons cette démarche au modèle simple et très utilisé en traitement des images qu'est le modèle gaussien stationnaire en 4-connexité. Les potentiels sont donnés par :

$$V(x) = (x-\mu)^2/2\sigma_1^2 \quad \text{et} \quad V(x,y) = (x-y)^2/2\sigma_2^2.$$

Les potentiels polynomiaux canoniques associés sont :

$$p_1(x) = (1/2\sigma_1^2 + 4/2\sigma_2^2)x^2 - 2\mu/2\sigma_1^2 x \quad \text{et} \quad p_2(x,y) = -2xy/2\sigma_2^2.$$

Les paramètres à estimer sont alors μ , σ_1 et σ_2 .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 P(x/V) &\propto \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma_1^2 - 4x^2/2\sigma_2^2 + 2x(x^N + x^E + x^S + x^O)/2\sigma_2^2) \\
 &\propto \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma_1^2 - 4x^2/2\sigma_2^2 + 8xm/2\sigma_2^2) \\
 &\propto \exp(-(1/2\sigma_1^2 + 4/2\sigma_2^2)x^2 + 2\mu x/2\sigma_1^2 + 8xm/2\sigma_2^2) \\
 &\propto \exp -(Ax^2 + B(m) x)
 \end{aligned}$$

où m est la moyenne du voisinage.

En posant $\alpha = 1/2\sigma_1^2$ et $\beta = 4/2\sigma_2^2$ on a :

$$P(x/V) \propto \exp(-(\alpha+\beta)[x-(\mu\alpha+m\beta)/(\alpha+\beta)]^2).$$

$P(x/V)$ est donc une gaussienne de centre



$(\mu\alpha+m\beta)/(\alpha+\beta)$ et de variance $1/2(\alpha+\beta)$. Pour les configurations de voisinage les plus représentées sur l'image, nous extrayons les distributions de $P(x/V)$. Les moments d'ordre un et deux de ces distributions nous permettent alors d'estimer A et $B(m)$ (fig. 3). Cette démarche a été utilisée dans (8).

V CONCLUSION

En résumé, nous avons développé la notion de potentiels canoniques et défini les hypothèses minimales afin de garantir l'unicité de la famille de potentiels associés à un système de cliques dans un modèle markovien. Nous avons montré que cette approche permet d'unifier les différents modèles markoviens généralement utilisés en traitement d'images tout en simplifiant les hypothèses a priori.

De plus, en exprimant les potentiels canoniques sous forme polynomiale, l'estimation des paramètres intrinsèques au modèle se ramène, quel que soit celui-ci, à l'estimation des coefficients des polynômes. Dans le cas particulier du modèle gaussien (potentiels de degré 2), nous avons explicité les calculs.

Nos recherches actuelles concernent le développement de méthodes d'estimation dans le cas le plus général à partir des techniques probabilistes fondées sur les probabilités conditionnelles. Enfin, l'approche présentée ici sera utilisée pour analyser des scènes SPOT en vue d'une segmentation et d'une classification automatique.

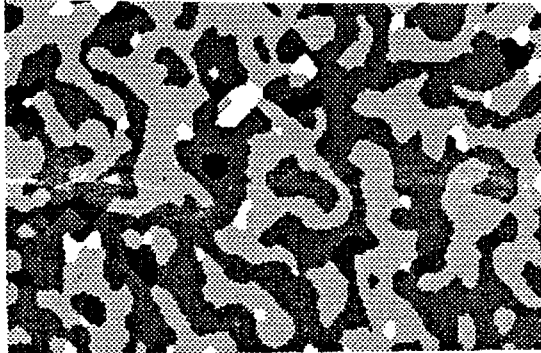


Figure 2a : Modèle polynomial de Potts
4 classes $n=2$
Les classes extrêmes sont défavorisées.

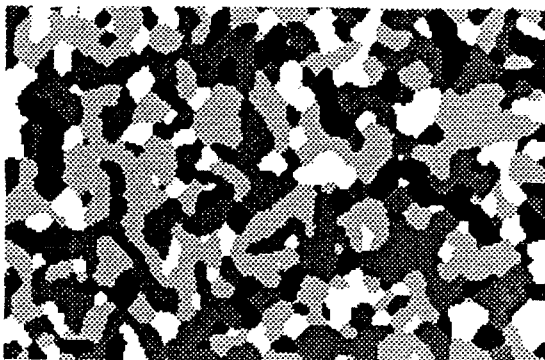


Figure 2b : Modèle polynomial de Potts
4 classes $n=4$
Toutes les classes ont la même probabilité.

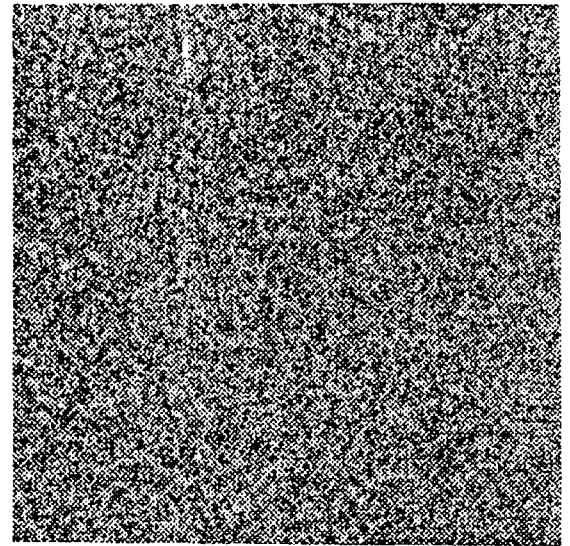


Figure 3a : Modèle polynomial de degré deux.

-m	Valeurs réelles		Valeurs estimées	
	A($\times 10^4$)	B(m) $\times 100$	A($\times 10^4$)	B(m) $\times 100$
105.75	4.2	8.7	4.4	9.2
093.25	4.2	7.9	4.2	8.3
104.50	4.2	8.6	4.4	8.8
104.25	4.2	8.6	3.7	7.6
103.00	4.2	8.5	3.9	7.8
103.75	4.2	8.6	4.2	8.3
101.00	4.2	8.4	4.5	9.6
094.75	4.2	8.0	3.9	7.4
101.75	4.2	8.5	4.4	8.9

Figure 3b : Estimation d'un modèle d'ordre deux et de potentiels canoniques de degré deux pour les valeurs de m (moyenne du voisinage) les plus représentatives.

REFERENCES

- (1) : J. Besag, "Spatial Interaction and the Statistical Analysis of Lattice Systems". J. Royal Statist.Soc., series B, vol. 36, pp. 192-236, 1974.
- (2) : R. Kinderman and J.L. Snell, Markov Random Fields and Their Applications. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1980.
- (3) : C.J. Preston, Gibbs States on Countable Sets. Cambridge University Press, 1974.
- (4) : S. Geman and D. Geman, "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images". IEEE vol. PAMI-6, November 1984.
- (5) : N. Marhic, P. Masson, W. Pieczynski, "Mélange de lois et segmentation non supervisée des données SPOT". RFIA 91, Villeurbanne Lyon, 21-25 Nov. 1991
- (6) : F. Prêteux, Description et interprétation des images par la morphologie mathématique. Application à l'imagerie médicale. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 6, Oct. 1987.
- (7) : F. Prêteux, "Pattern Recognition in Pulmonary Tomography Images using Markovian Modeling". SPIE/SPSE, Feb. 24-Mar. 1, 1991, San José, CA, Vol. 1224.
- (8) : J.C. Chappelier, F. Prêteux, "Estimation des paramètres des textures booléennes : de la théorie à la pratique". 13^e colloque GRETSI 16-20 sept. 1991 Juan les Pins, France.