

**CODAGE D'IMAGES TRANSFORMÉES EN ONDELETTES**
**F. LABRIKI - V. HAESE-COAT**

 Laboratoire d'Automatique, Equipe Image  
 Institut National des Sciences Appliquées  
 35043 RENNES Cedex (FRANCE)

**RÉSUMÉ**

Ce papier présente une nouvelle méthode de compression d'images numériques basée sur un schéma de décomposition pyramidale. Celle-ci est obtenue par application d'une transformée en ondelettes. Le processus de codage fait intervenir une simple opération de seuillage suivie d'une opération de normalisation sur les coefficients transformés. De bons résultats sont obtenus avec un débit de 1,3 sur des images monochromes de type télévision.

**ABSTRACT**

This paper presents a new image coding method based on a pyramidal decomposition. This one is obtained by applying the wavelet Transform. The coding process involves a simple thresholding and normalization operation on the transform coefficients. Good results are obtained for coding of monochrome images at 1.3 bits/pixel.

**I-Introduction:**

La plupart des méthodes classiques de codage se basent sur 2 principes:

- Une analyse directe (spatiale ou temporelle) dans laquelle on exploite les redondances spatiales ou temporelles qui existent dans les images (cas du codage MICD: Modulation d'Impulsions Codées Différentielles).
- Une analyse indirecte (fréquentielle) qui se fait par le biais d'une transformation mathématique le plus souvent orthogonale (cas de la transformation en Cosinus Discrète: DCT). Cette dernière effectue une redistribution de l'énergie du signal original permettant ainsi une meilleure exploitation des propriétés statistiques de la source ainsi que de certaines propriétés du système psychovisuel de l'observateur.

Une nouvelle approche a été introduite ces dix dernières années: c'est l'analyse temps-fréquence (pour les signaux temporels) ou l'analyse espace-fréquence (pour les signaux spatiaux). La transformée en ondelette, introduite par Y.Meyer[1] et S.Mallat[2] et qui est à la base de la méthode de codage proposée ici, réalise ce type d'analyse.

**II-Analyse et synthèse par transformée en ondelettes:**

Les ondelettes sont des fonctions élémentaires  $\psi_{a,b}(t)$  dérivées d'une unique fonction mère  $\psi(t)$ , par translation (paramètre b) et dilatation (paramètre a) dans le temps.

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi((t-b)/a) \quad a \neq 0$$

Ainsi, par variation des paramètres a et b, les ondelettes s'adaptent aux différents détails du signal se produisant à différentes résolutions.

Pour avoir une meilleure représentation du signal décomposé, ces ondelettes doivent avoir une bonne localisation fréquentielle (telle la transformation de Fourier) ainsi qu'une bonne localisation temporelle (telle la transformation de Haar[1]). Enfin, pour effectuer une décorrélation maximale du signal, elles doivent former une base orthogonale.

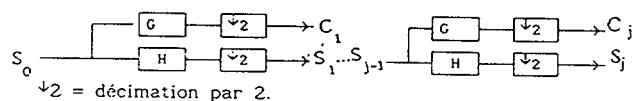
Dans ces conditions, la décomposition du signal se fait en calculant la transformée en ondelettes  $S(a,b)$ :

$$S(a,b) = \int s(t) \psi_{ab}(t) dt$$

La synthèse du signal ainsi analysé s'obtient en faisant une somme en continu des termes  $S(a,b) \psi_{ab}(t)$  sur toutes les valeurs de a et b.

**a-L'implémentation:**

L'implémentation par filtres QMF[3] proposée ici, s'inspire de l'algorithme de décomposition des signaux discrets de S.Mallat[2]. Cette décomposition se base sur l'analyse multirésolutions[2] et peut se résumer, dans le cas des signaux unidimensionnels, par le schéma suivant:



Si on désigne par  $h(n)_n$  et  $g(n)_n$  les réponses impulsionnelles des filtres H et G alors les opérations de filtrages s'écrivent:

$$c_k^j = \sum_n h(n-2k) c_{j-1}^{j-1} \quad (1)$$

$$d_k^j = \sum_n g(n-2k) c_{j-1}^{j-1} \quad (2)$$

avec  $(c_k^j)_k$  et  $(d_k^j)_k$  qui représentent les échantillons du signal résultat du filtrage de  $(c_{j-1}^{j-1})_k$  respectivement par H et G à l'itération j.  $(c_k^0)_k$  représente les échantillons du signal original.

Cet algorithme fait apparaître une structure pyramidale dont les différents niveaux s'obtiennent par simples opérations de filtrages par les filtres H et G. La reconstruction se fait d'une manière duale grâce à  $H^*$  et  $G^*$ , filtres duaux de H et G.

La décomposition en dimension 2 (cas des images numériques) s'effectue de façon séparable par un filtrage ligne suivi d'un filtrage colonne selon le schéma de la figure 2:

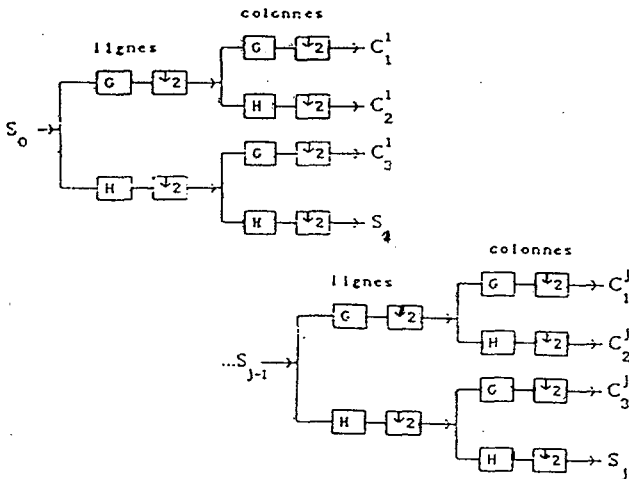


fig.2: Transformée en ondelettes.  
 H: filtre passe-bas de l'ondelette.  
 G: filtre passe-haut de l'ondelette.  
 ↓2: décimation par 2.

A chaque niveau  $j$  de la pyramide de la figure 2, 4 sous-images  $C_j^1, C_j^2, C_j^3$  et  $S_j$  sont créées par l'algorithme de décomposition.

- $S_j$  représente une version passe-bas et sous-échantillonnée de l'image  $S_{j-1}$  (avec  $S_0 =$  image originale);
- Les sous-images  $C_j^k$  contiennent les détails perdus lors du passage de  $S_{j-1}$  à  $S_j$
- Ces détails sont orientés horizontalement pour  $k=1$ , verticalement pour  $k=2$  et en oblique quand  $k$  vaut 3.

**b-Dérivation des coefficients des filtres H et G:**

Pour que l'algorithme précédent fonctionne, les filtres H et G doivent respecter les conditions suivantes[4].

1.  $\sum |h(n)| < \infty, \sum |g(n)| < \infty$
2.  $H^*H + G^*G = 1$
3.  $HG^* = 0$
4.  $\sum h(n) = \sqrt{2}, \sum g(n) = 0$

Daubechise[4] a calculé les coefficients des filtres qui vérifient toutes ces conditions. Ce sont ceux-là même qui ont été utilisés pour la décomposition de nos images en ondelettes. La table 1 donne les coefficients des filtre H et G utilisés dans notre implémentation.

**III- Caractéristiques des coefficients transformés en ondelettes:**

**a-description statistique des coefficients:**

Dans [5] on trouve une modélisation de l'histogramme des sous images de détails ( $C_j^k$ ) par:

$$h(u) = Ke^{-(|u|/\alpha)^\beta}$$

avec  $K, \alpha$  et  $\beta$  des constantes dépendant des moments d'ordres 1 et 2 de l'histogramme des images des détails.

**b-Dynamique des coefficient transformés:**

Si la dynamique de l'image originale est de 0 à  $l$  alors la dynamique des sous-images de contours  $C_1^1, C_1^2$  et  $C_1^3$  calculée à partir des coefficients des filtres H,G et de (1),(2) est de  $-3.22l$  à  $3.22l$ . La dynamique des coefficients de la sous-image  $S_1$  est de  $-2.22l$  à  $4.24l$ . Dans ces conditions, on constate qu'en termes de dynamiques extrêmes et en considérant chaque élément d'une sous-image indépendamment des autres dans le domaine d'origine, la transformée en ondelettes aboutirait plutôt à une augmentation de la quantité d'information. En fait, la répartition statistique de l'amplitude des éléments transformés en ondelettes varie avec les niveaux et l'énergie moyenne des sous-images de contours reste faible.

**c-Représentation de l'EQM:**

Si on considère une décomposition pyramidale en  $J$  niveaux et si les  $E_j^i$  représentent les erreurs quadratiques moyennes introduites lors du codage des sous-image  $C_j^i$  alors l'erreur quadratique moyenne  $E$ , entre l'image originale et l'image reconstruite, peut s'écrire en vertu du principe de la conservation de l'énergie, comme suit:

$$E = 2^{-2J} E_J + \sum_{k=1}^J \sum_{j=1}^k 2^{-2j} E_k^j$$

ou  $E_J$  représente l'erreur quadratique moyenne introduite lors du codage de la sous-image  $S_J$

**III codage:**

En première opération et après une transformation en ondelette sur deux niveaux, on applique la même transformation sur les sous-images de contours  $C_j^k$  et ce jusqu'à obtenir des sous-images de tailles  $16 \times 16$  selon le schéma de la figure 4. Un tel procédé permet de bien isoler les zones à faible énergie des zones a grande énergie. On procède ensuite à la suppression de certains blocs (d'énergie faible) en les considérant comme nuls. Les coefficients des blocs restant sont seuillés et normalisés par deux seuils prédéfinis. Les coefficients ainsi seuillés et normalisés sont alors codés par un code à longueur variable. La sous-image des détails passe-bas  $S_2$  qui n'est pas concernée par les opérations de seuillage et de normalisation, est codée par un codeur MICDA avec une loi adaptative à 16 niveaux.

**a-Suppression de certains blocs:**

Dans cette étape, on considèrera comme nuls, les blocs  $16 \times 16, 8 \times 8$ ...ou  $2 \times 2$  de moyenne et de variance inférieures respectivement à deux seuils prédéfinis  $S_m$  et  $S_v$ . Ce traitement qui ne doit pas affecter la qualité de restitution de l'image, permet de supprimer,selon l'image, de 40 % à 70% des éléments des sous-images de contours.

**b-Le seuillage:**

Cette phase de seuillage qui consiste à mettre à zero tous les éléments transformés inférieurs à  $S_m$  et à soustraire ce même seuil à tous les éléments restants supérieures à  $S_m$ , est en suite mise en oeuvre. Si  $TO[i,j]$  est l'image transformée en ondelettes, l'operation de seuillage s'écrit:

$$TO_{S_j}[i,j] = \begin{cases} TO[i,j] - S_m & \text{si } TO[i,j] \geq S_m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La figure 5 montre qu'un grand pourcentage des éléments réstant ont des valeurs proches de zero. Ceci implique que l'opération de seuillage permet d'annuler une grande portion de ces coefficients. La valeur du seuil  $S_m$  peut s'ajuster selon le débit désiré.

**c-Normalisation:**

Les éléments transformés en ondelettes seuillés  $TO_{S_j}[i,j]$  sont ensuite normalisés par un facteur de normalisation  $S_d$  selon la relation suivante:

$$TO_{SN}[i,j] = TO_{S_j}[i,j]/S_d$$

Le facteur  $S_d$  peut être identique pour tous les coefficients ou adapté à chaque bloc transformé. Cette opération conduit à une réduction de la dynamique du signal à coder. Il est à noter que l'EQM entre l'image codée-décodée et l'image originale croit très rapidement avec le seuil  $S_d$ . Un seuil de 2 s'avère être un bon compromis entre la qualité et le débit pour la compression de nos images.

Finalement, la quantification se réduit à prendre la partie entière des coefficients seuillés et normalisés:

$$\hat{TO}_{SN}[i,j] = \text{Ent}(TO_{SN}[i,j] + 0.5)$$

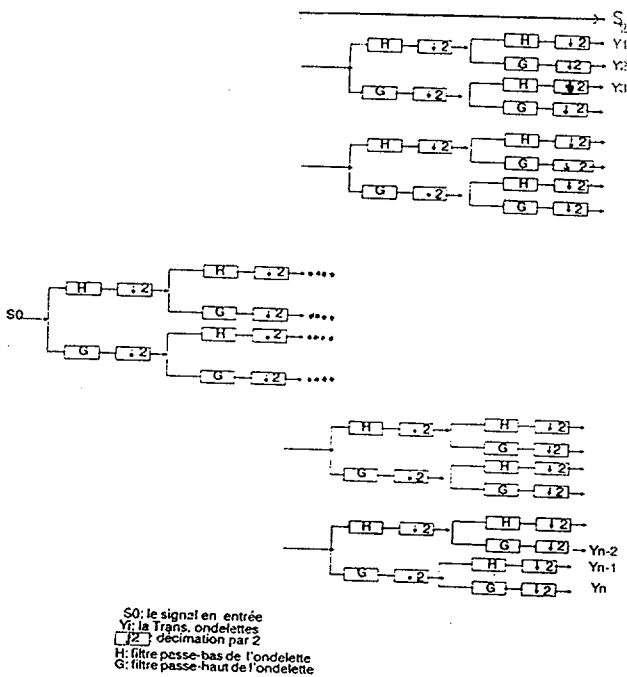


fig.4

**d-Codage des informations:**

La sous-image transformée  $S_2$  est codée par un codeur MICDA avec une loi adaptative à 16 niveaux possédant 3 facteurs d'expansions qui dépendent de l'activité du voisinage causal du point à coder. La table 2 donne la caractéristique de la loi de quantification. Le choix de ce type de codeur pour ce type de sous-images est justifié par les fortes corrélations spatiales qui y demeurent.

Pour les autres sous-images, la transmission des éléments seuillés, normalisés et quantifiés  $\hat{TO}_{SN}[i,j]$ , se fait en deux

temps. Premièrement, l'envoi d'un quadtree pour préciser la position des zones nulles/non-nulles. Ensuite, un codage à longueur de mots variables (type HUFFMAN) est utilisé pour coder les amplitudes des coefficients des zones non nulles. La table 3 donne le code de Huffman tronqué qui a été utilisé pour coder nos images.

**IV Résultats de simulation:**

La méthode présentée dans cette article a été évaluée par simulation. L'image test originale est de taille 512x512. La figure 6 montre l'image des zones nulles/non-nulles ainsi que l'image reconstruite après codage avec un débit global de 1,3 bit/point. La table 4 montre le détail des débits et les valeurs des critères EQM et SNR.

**V Conclusion:**

La méthode décrite dans ce papier présente une façon simple de coder les coefficients transformés en ondelettes. Elles conduisent à de bonnes performances tant subjectives que quantitatives.

Amplitude	Nombre de bits du code	Code d'Huffman
-3	5	11101
-2	5	00001
-1	4	1001
0	1	0
1	4	0101
2	5	10001
3	5	01101
4	2 + 7	11

Table 3.

$(S_m, (S_v)^{1/2})$	(11, 5)
Débit des sous-images de détails	2,2 bits/pt
Débit de la sous-image $S_2$	4 bits/pt
Débit du quadtree	0,003 bits/pt
Débit global	1,3 bits/pt
EQM	0,006 %
SNR	31,23 dB
Le quadtree est formé de 46 % de blocs annulés.	

Table 4

[1] Y.Meyer: "Ondelettes et Opérateurs", Hermann,1988.  
 [2] S.G.Mallat: "A theory for multiresolution signal decomposition: the Wavelet representation" GRASP lab 103, Dept. of Computer and Information Science, Univ. of Pennsylvania. May 1987.  
 [3] P.P. Vaidyanathan: "Quadrature Mirror Filter Banks, M-Band Extensions and Perfect-Reconstruction Techniques" IEEE ASSP MAGAZINE july 1987.  
 [4] Ingrid Daubechises: "Orthonormal Base of Compactly Supported Wavelets" AT&Bell laboratories.  
 [5] S.G.Mallat "A theory for multiresolution Signal Decomposition: the wavelet representation" IEEE Transaction on Pattern Analyse and Machine Intelligence. vol. 11 No 7 july 1989.



Seuils de décision	Niveaux de recons.
-255	-300
-175	-210
-115	-140
-70	-90
-37	-50
-17	-24
-6	-10
0	-3
6	3
17	10
37	24
70	50
115	90
175	140
255	210
	300

Table 2.

n	h(n)
0	.026570057901
1	.188176800078
2	.527201188932
3	.688459039454
4	.281172343661
5	-.249846424327
6	-.195946274377
7	.127369340336
8	.093057364604
9	-.071394147166
10	-.029457536822
11	.033212674059
12	.003606553567
13	-.010733175483
14	.001395351747
15	-.001992405295
16	-.000685856695
17	-.000116466855
18	.000093588670
19	-.000013264203

Table 1.

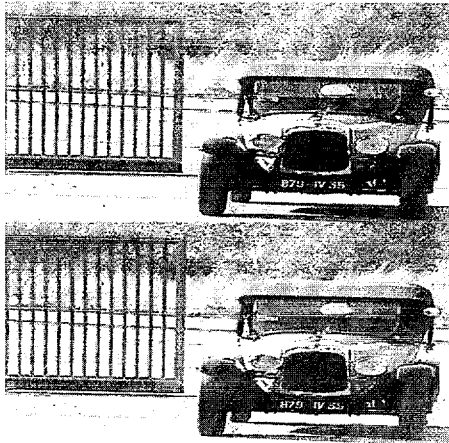


fig.6a: image test originale.

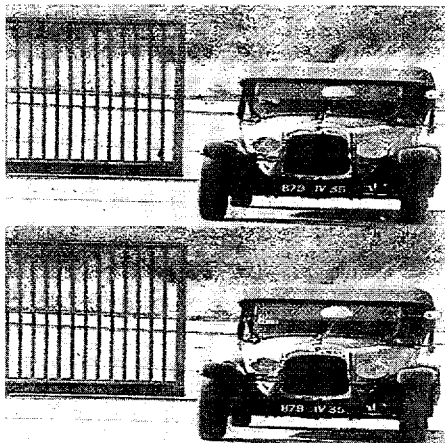


fig.6b: image test codée-décodée.

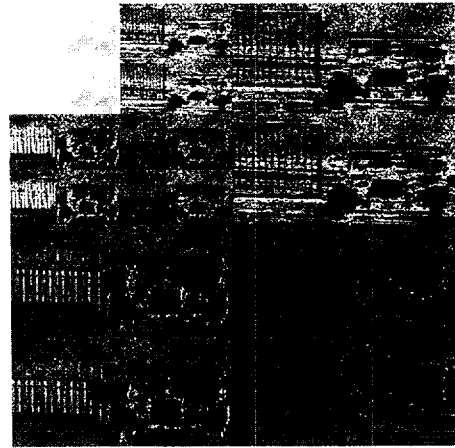


fig.6c: image transformée en ondelettes de l'image test originale.

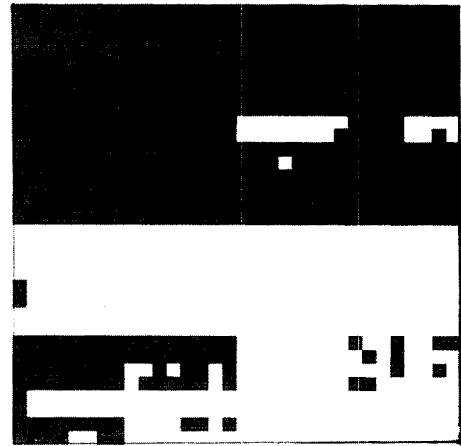


fig.6d: les zones blanches représentent les blocs transformés de moyenne et variances inférieures respectivement à  $S_m$  et  $S_v$ .

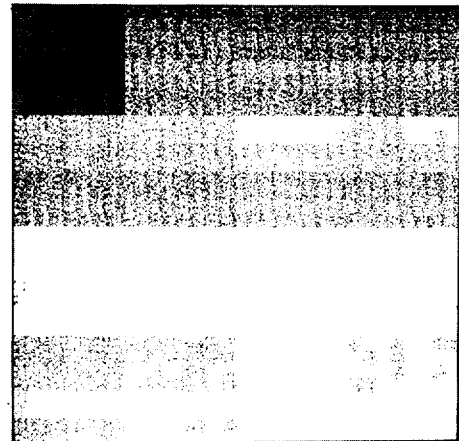


fig.6e: Les zones blanches representent les blocs de la figures 6d en plus des coefficients transformés inférieurs à  $S_m$  et mis à zero