

**FILTRAGE MEDIAN RECURSIF MULTIETAGE
ETUDE DES PROPRIETES
STATISTIQUES ET MORPHOLOGIQUES**

Ph.BOLON, A.RAJI

Laboratoire d'Automatique et MicroInformatique Industrielle
LAMII - Université de Savoie - BP 806 - F.74016 Annecy Cedex
(CNRS - Gdr 134 - Traitement du Signal et Image)

RÉSUMÉ

L'opérateur de filtrage Médian Récur­sif Multiétage (MRM) vise à associer les propriétés statistiques du filtrage médian récur­sif, avec les propriétés géométriques des filtres multiétages. En réduction de bruit, les performances du filtre MRM sont voisines de celles du filtrage médian récur­sif (MR), et donc supé­rieurs à celles du filtrage médian standard. L'effet de préservation des transitions est également conservé. Pour des signaux 1D, cet opérateur a également la propriété d'être un filtre morphologique.

1- INTRODUCTION

Dans le but de faciliter l'étape de segmentation d'image, il est nécessaire de mettre au point des opérateurs ayant des propriétés de réduction de bruit, de conservation de la position et de la forme des transitions associées aux contours des régions, tout en gardant une complexité de traitement réduite. Le filtrage médian a été abondamment utilisé et étudié car, contrairement au filtrage linéaire, il permet de diminuer l'effet du bruit sans élargir la zone de transition entre régions [GAL81]. Les performances de cet opérateur sont bonnes pour des bruits de type impulsionnel, ou à distribution forte à l'infini. Par contre, elles sont médiocres pour des bruits dont la distribution est assez concentrée (cas gaussien) ou bornée (bruit uniforme par exemple). Plusieurs modifications ont été introduites pour pallier cet inconvénient [HEI87]. En particulier, le filtrage médian récur­sif symétrique permet, pour des tailles de fenêtre d'analyse pas trop élevées, d'atteindre les performances du filtre d'ordre optimal [BOL90]. Outre la préservation de contours nets, on cherche également à conserver la forme des régions, spécialement les zones anguleuses. C'est l'objectif des opérateurs Max/médian [ARC87], médian multi étage [NIE88], et Max-Min/Médian [WAN90].

L'opérateur présenté ici vise à associer les propriétés statistiques des filtres médians récur­sifs, aux propriétés géométriques des filtres multiétage. Sans qu'il soit possible d'atteindre une totale isotropie, ce qui de toute façon n'a pas de sens pour une image numérique discrète, l'opérateur proposé possède de meilleures propriétés de symétrie que ceux proposés dans [BOL90].

Après avoir introduit la structure de ce filtre, nous étudierons quelques propriétés morphologiques et statistiques dans le cas de signaux 1D et 2D, puis nous présenterons un exemple de traitement d'image réelle, en comparant avec les résultats obtenus par les autres opérateurs cités ci-dessus.

ABSTRACT

Multistage Recursive Median filtering aims at combining the noise reduction effect of Recursive Median (RM) filters, and the geometric properties of multistage filters (linear hybrid median, max-min/median, ...). The statistical properties of MRM filter are similar to the ones of RM filter, and hence they are better than the ones of standard median filters having the same size. Step edges and angular parts of regions are preserved.

2- FILTRAGE MEDIAN RECURSIF MULTIETAGE

Soit X l'image initiale, et Y l'image filtrée. On désigne par med l'opérateur extrayant la valeur médiane d'un échantillon.

Pour un signal monodimensionnel X(k), et pour une taille de filtre impaire N=2n+1, la sortie Y(k) est définie par :

$$Y(k) = \text{med} \{ Y_a(k), Y_r(k), X(k) \} \quad \text{Eq.1}$$

avec

$$Y_a(k) = \text{med} \{ Y_a(k-n), \dots, Y_a(k-1), X(k), \dots, X(k+n) \}$$

$$Y_r(k) = \text{med} \{ X(k-n), \dots, X(k), Y_r(k+1), \dots, Y_r(k+n) \}$$

k ↑
k ↓

Y est une combinaison du signal initial X et de deux versions obtenues par filtrage médian récur­sif aller (Ya) et retour (Yr).

Pour un signal 2D X(l,k), on calcule la sortie de la façon suivante :

$$Y(l,k) = \text{med} \{ Y_0(l,k), \dots, Y_7(l,k), X(l,k) \} \quad \text{Eq.2}$$

où Yj(l,k) est la sortie d'un filtre médian récur­sif monodimensionnel dont l'entrée est X(l,k), et qui opère dans la direction j selon le code de Freeman.

On peut définir des opérateurs simplifiés, ne faisant appel qu'à 4 directions de filtrage (0-2-4-6) ou (1-3-5-7), ou même seulement 2 en effectuant un traitement séparable ligne (0-4) puis colonne (2-6)

Par rapport au filtrage médian multiétage [NIE88], on peut ainsi obtenir de meilleures performances en réduction de bruit, grâce à la supériorité du filtrage récur­sif sur le filtrage médian standard [BOL90]. On conserve également un biais nul, contrairement à l'opérateur Max/Médian [ARC87].



3- PROPRIETES DU FILTRAGE 1D

Dans cette partie, nous étudions quelques propriétés déterministes et statistiques de l'opérateur MRM pour un signal 1D

3.1 - propriétés déterministes

commutation avec les fonctions croissantes : Soit X le signal initial, et Y le signal obtenu par filtrage médian récuratif multiétage ($Y=MRM(X)$). Soit T une fonction réelle strictement croissante. On note U le signal $T(X)$, et $Z=MRM(U)$. Par analogie avec la notation de l'équation 1, on appelle Y_a, Y_r, Z_a, Z_r les signaux obtenus par filtrage médian récuratif aller et retour de X et U.

Pour l'échantillon numéro k, on a :

$$\begin{aligned} Y_a(k) &= X(i_k) & i_k &\leq k+n \\ Z_a(k) &= U(j_k) & j_k &\leq k+n \end{aligned} \quad \text{Eq.3}$$

La valeur des indices i_k et j_k ne dépend que des rangs relatifs des échantillons $\{X(i)\}$ et $\{U(j)\}$ pour $i, j \in [k_{min}, k+n]$. La fonction T conservant l'ordre, on a $i_k = j_k$ et donc

$$T(Y_a(k)) = Z_a(k) \quad \text{Eq.4}$$

On peut appliquer le même raisonnement pour le filtrage retour, ainsi que pour l'étage de combinaison des résultats des trajets aller et retour. On a donc bien commutation entre la transformation croissante T et l'opération de filtrage :

$$MRM \{T(X(k))\} = T(MRM\{X(k)\}) \quad \text{Eq.5}$$

signaux racines : Considérons un signal initial de longueur très grande devant la taille du filtre, de telle sorte que les effets de bords puissent être négligés. Selon [GAL81], un tel signal peut être décomposé en sections (régions 1D) de type voisinage constant (VC, ensemble d'au moins n+1 points successifs de même amplitude), bord (B, transition monotone entre deux VC), impulsion (I, ensemble d'au plus n points de même amplitude) ou oscillation (O, toutes les autres configurations). Par filtrage médian récuratif, on obtient, en un seul passage, un signal racine formé uniquement de voisinages constants et de bords [NOD82]. Les signaux racines du filtrage médian récuratif (MR) le sont donc également pour le filtrage MRM. La différence entre les sorties des filtres médians récuratifs aller et retour provient uniquement du traitement des oscillations. Elles sont en effet transformées en réunion de Bords et Voisinages Constants dont les niveaux dépendent des amplitudes des VC antérieurs (filtrage aller) et postérieurs (filtrage retour). Après traitement par l'étage de combinaison, l'oscillation initiale sera écretée entre les amplitudes des VC créés par le filtrage récuratif. Si l'on effectue un deuxième passage de l'opérateur MRM, les filtrages médians récuratifs aller et retour produiront les mêmes signaux qu'au premier passage. Les oscillations, déjà écretées au premier passage, sont alors conservées. Ainsi, on obtient un signal racine en un seul passage.

Le filtrage MRM est obtenu par combinaison d'opérateurs croissants. Il est également croissant, et idempotent. Le filtre MRM est un opérateur morphologique.

3.2 - propriétés statistiques

Afin de caractériser l'effet du filtrage MRM en réduction de bruit, on étudie expérimentalement les moments d'ordre 1 et 2 des signaux de sortie pour des entrées stationnaires (bruit blanc) ou de type échelon bruité, représentant les deux situations rencontrées en traitement d'image (intérieur d'une région ou transition entre deux régions). Du fait de la non linéarité de l'opérateur, les performances dépendent de la distribution des amplitudes du signal

d'entrée. Nous étudions le cas de signaux à distribution gaussienne, uniforme et exponentielle. Le comportement au deuxième ordre peut être caractérisé par l'étude de l'effet de strie, qui ne dépend pas de la distribution au premier ordre de l'entrée.

signal stationnaire : Les courbes de la figure 1 représentent la variance de sortie en fonction de la taille du filtre N, pour les filtres médian standard (M), médian récuratif (MR), et médian récuratif multiétage (MRM).

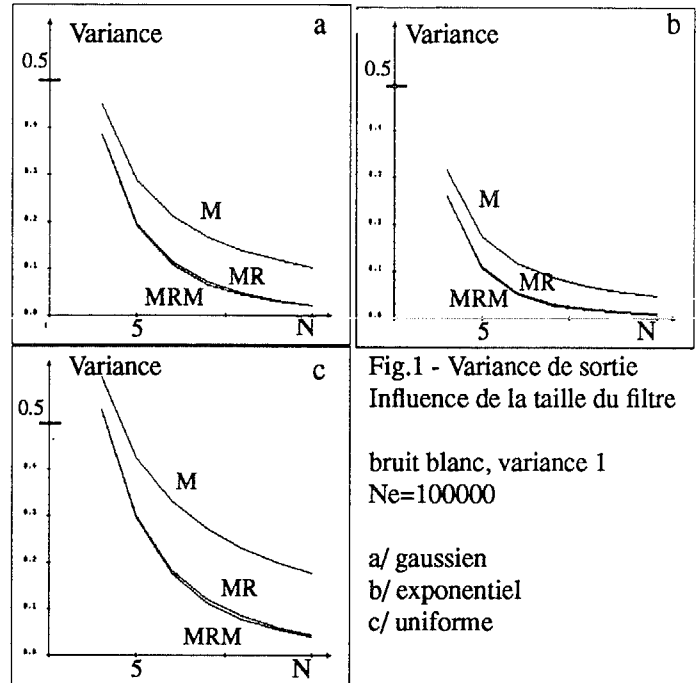


Fig.1 - Variance de sortie
Influence de la taille du filtre
bruit blanc, variance 1
Ne=100000
a/ gaussien
b/ exponentiel
c/ uniforme

Le meilleur effet de réduction de bruit est naturellement obtenu pour un bruit exponentiel. Ceci est dû aux propriétés de l'opérateur médian. Les performances du filtre MRM sont meilleures que celles du filtre médian (M), et très voisines de celles du médian récuratif.

échelon bruité : Le signal initial est un échelon d'amplitude h, perturbé par un bruit blanc d'écart type σ . On définit le rapport signal/bruit par $RSB = h/\sigma$. Les courbes de la figure 2 représentent le biais et la variance de sortie au voisinage de la transition, avec $N=5$. Pour tenir compte de l'effet transitoire du filtrage récuratif [BOL88], 30000 réalisations indépendantes d'un signal de longueur 45 ont été utilisées.

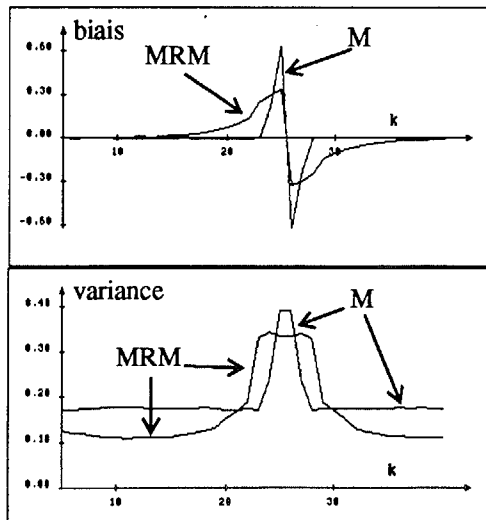


Fig3
Echelon bruité
RSB=2
bruit exponentiel
N=5
position
échelon k=25
Nr=30 000

La précision d'estimation du biais et de la variance est donc de l'ordre du pourcent. Par rapport au filtrage M, l'opérateur MRM

diminue légèrement le biais et la variance maximum. des courbes similaires sont obtenues pour d'autres tailles de filtres et d'autres distributions du bruit. On remarque cependant que l'amélioration des performances est surtout sensible pour les faibles tailles de filtre.

effet de strie : L'effet de strie consiste en la production, dans le signal de sortie, de sections formées de points d'égale amplitude. Le principal inconvénient de l'effet de strie est de faire apparaître de fausses régions parfaitement homogènes dans l'image de sortie. Si l'entrée est un bruit blanc à distribution continue, le signal de sortie est formé de stries dont la longueur L est une variable aléatoire discrète ayant une distribution indépendante de celle du bruit. La loi de L est étudiée dans [BOV87] pour le filtrage M, et dans [RAJ91] pour le filtrage MR et le filtrage d'ordre. La figure 3 montre l'influence de la taille du filtre N sur la moyenne μ_L et sur l'écart type σ_L de la longueur des stries.

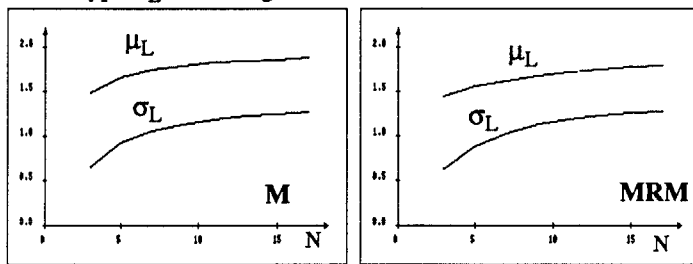


Fig.3

Effet de strie - Moyenne et Ecart type de la longueur des stries
Filtre médian (M) et médian récursif multiétage (MRM)

On observe que l'effet de strie est légèrement moins marqué pour le filtre MRM que pour le filtre M. Les courbes d'écart type sont pratiquement confondues. La moyenne et l'écart type tendent vers une limite finie, ce qui n'est pas le cas pour les filtres MR et MRS [RAJ91].

3.3 - interprétation des résultats

Du fait du caractère non linéaire et non analytique de la relation entrée/sortie, la détermination théorique des propriétés du filtre MRM est peu aisée. On peut néanmoins donner une interprétation aux résultats précédents, dans le cas de tailles de filtre élevées. Si l'on note da (resp. dr, dx) la sélection de Y_a (resp. Y_r, X), et Pa (resp. Pr, Px) les probabilités de ces décisions, on a :

$$E[Y^n] = Pa.E[Y^n/da] + Pr.E[Y^n/dr] + Px.E[Y^n/dx] \quad \text{Eq.6}$$

Quand N augmente, la dépendance statistique entre les variables aléatoires $Y_a(k)$, $Y_r(k)$ et $X(k)$ diminue rapidement [RAJ91]. De plus, les variances de Y_a et Y_r deviennent négligeables devant celle de X , et donc $P_x \approx 0$, $P = Pr \approx 1/2$. L'équation 6 devient :

$$E[Y^n] = Pa.E[Y_a^n] + Pr.E[Y_r^n] \quad \text{Eq.7}$$

Le comportement au premier ordre du filtre MRM tend vers celui du filtre médian récursif, ce que l'on observe figure 1.

D'autre part, pour qu'il y ait production de strie entre les positions k_1 et k_2 , il faut qu'il y ait strie sur Y_a et Y_r , et que, entre ces positions, les réalisations de X restent toutes du même côté par rapport à $E[X]$. La taille des stries produites par filtrage MR augmente très rapidement vers l'infini avec N . Puisque X est un bruit blanc, la longueur des stries L tend vers une variable aléatoire L_0 prenant les valeurs l avec des probabilités $(1/2)^l$. La moyenne et la variance de L tendent respectivement vers $\mu_{L0} = 2$ et $\sigma_{L0}^2 = 2$.

4 - PROPRIETES DU FILTRAGE 2D

4.1 - propriétés déterministes

commutation avec les fonctions croissantes : En suivant le même raisonnement qu'au 3.1, on montre que la sortie d'un filtre MRM au pixel (l,k) est : $Y(l,k) = X(i_l, j_k)$, où (i_l, j_k) dépend des rangs relatifs des variables $X(i,j)$. Les rangs étant conservés par les fonctions strictement croissantes, il y a commutation avec le filtrage MRM.

convergence vers des structures racines : La propriété d'idempotence n'est pas conservée en 2D. Cependant, on observe que la convergence vers des structures racines est plus rapide que pour le filtrage médian standard. Le tableau 1 donne le nombre de pixels modifiés à chaque filtrage pour différents filtres appliqués itérativement à la même image. L'image initiale est un bruit blanc gaussien. Le nombre de pixels analysés est 100 000.

n° itération	1	2	3	4	5	6
MaxMin/Med	37587	34565	32283	30583	29090	27652
M (2D)	56238	36070	24294	17825	13652	10181
M (séparable)	44585	14154	3510	741	148	25
MR (séparable)	12852	175	4	0		
MRM2 (separ.)	27244	3501	367	39	4	1
MRM4	511	16	0			

Tableau 1 : Convergence vers des structures racines

Nombre de pixels modifiés à chaque filtrage, Taille de filtre $N=3$
M : médian MR : médian récursif MRM : médian récursif multiétage

4.2 - propriétés statistiques

Les courbes de la figure 4 montrent la variance de sortie pour différents filtres. Les positions relatives de ces courbes sont similaires pour d'autres distributions de bruit. Les performances du filtre MRM sont sensiblement meilleures que celles des opérateurs MaxMin/Median et MédianMultiEtage. Compte tenu du faible effet de strie, ces performances peuvent encore être améliorées par un postfiltrage linéaire de taille faible.

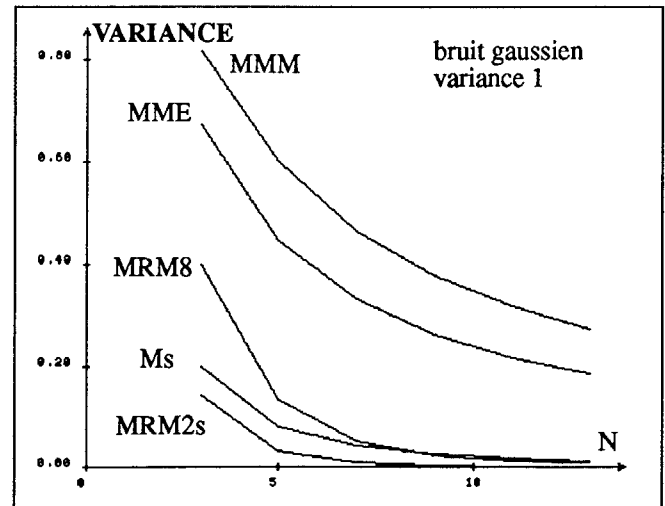


Fig.4 - Variance de sortie en fonction de la taille du filtre

MMM : MaxMin/Med MME : Médian multiétage
Ms : median séparable MRMj : j directions de filtrage, s : séparable

5 - APPLICATION A DES IMAGES REELLES

5.1 - complexité de réalisation

Les opérateurs utilisés dans chacune des sous-structures du filtre MRM ne font pas apparaître de nouvelles valeurs dans le signal. Il n'est pas nécessaire d'augmenter la précision de représentation des données au cours du traitement. Le nombre de plans mémoires auxiliaires nécessaires est égal au nombre de directions d'analyse. Pour une image à maillage carré, il est au maximum de 8. En

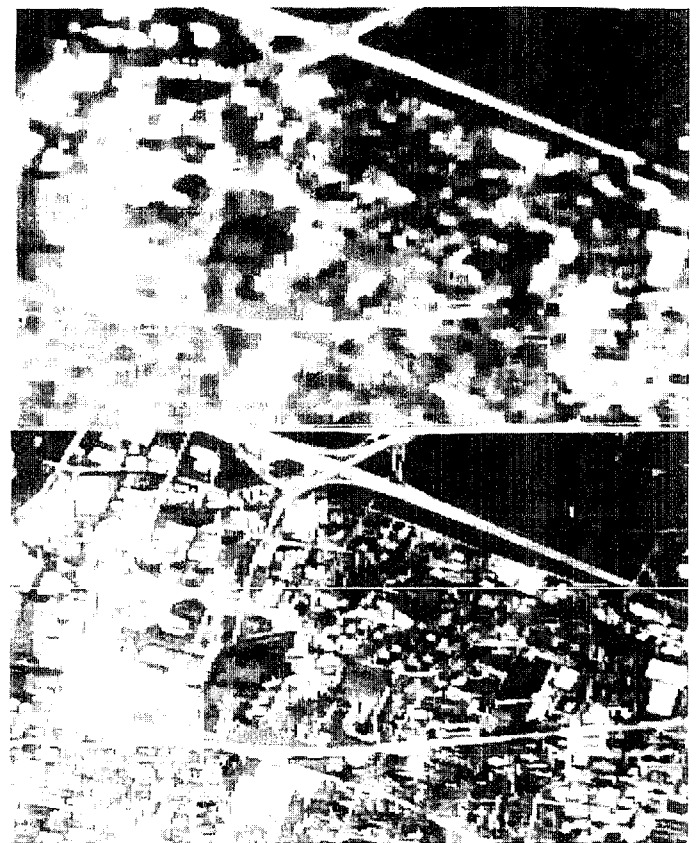
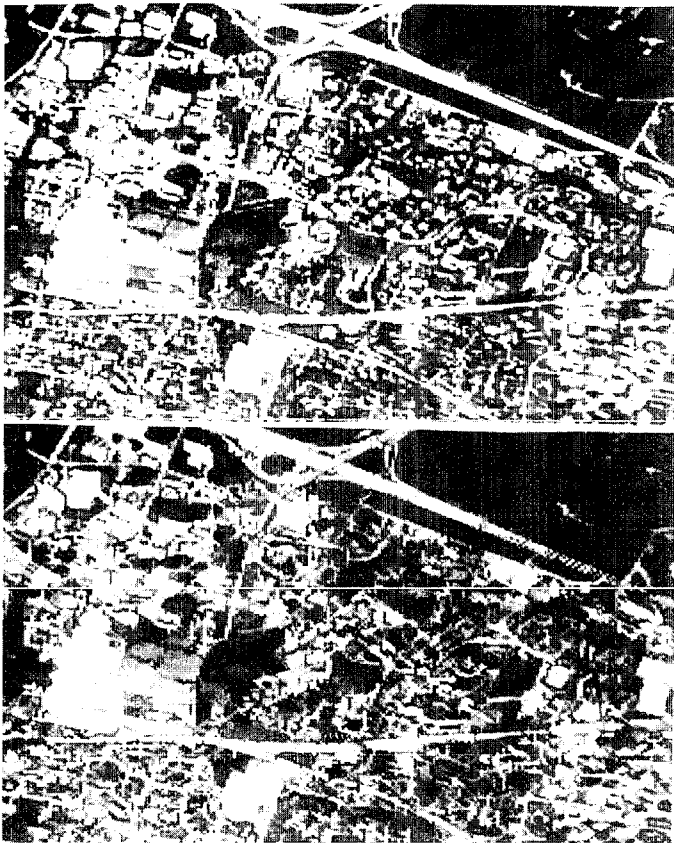


Fig.5 - Image aérienne (/cnrs/gdr134/grenoble.ima)

a/ image initiale b/ Médian séparable N=5 c/ MaxMin/Médian N=5 d/ MRM4 N=5

a	b
c	d

utilisant les méthodes d'histogramme glissant, la complexité de l'opérateur MRM est inférieure ou égale à celle d'un opérateur gradient séparable de type Deriche

5.2 image test

Les photographies de la figure 5 présentent les résultats, obtenus sur une vue aérienne, par différents filtres de taille 5. Le filtrage médian séparable détruit les structures fines (branche d'échangeur dans le haut de l'image, routes en haut à droite). L'effet de strie produit des petites régions homogènes rectangulaires. Le filtre max-min/médian peut créer des structures artificielles du fait de la commutation entre le maxi et le mini des médians directionnels (portion d'autoroute en haut à droite). Le filtre MRM4 tend à conserver la structure du réseau routier. L'effet de réduction de bruit peut s'observer dans les régions telles que la zone claire située à gauche, ou dans les régions de type champ.

6 - CONCLUSION

La phase de prétraitement, préalable à une segmentation d'image, nécessite la mise au point d'opérateurs locaux ayant de bonnes propriétés de réduction de bruit, tout en conservant la forme et la position des structures présentes dans l'image.

L'opérateur MRM est légèrement plus complexe à mettre en oeuvre que les filtres médians ou médians récursifs symétriques, mais pour une même taille de filtre, les propriétés géométriques sont sensiblement améliorées.

L'opérateur MRM est meilleur, en réduction de bruit, que les filtres médians multiétages (MME) ou MaxMin/Median (MMM). Du fait du faible effet de strie, ces performances peuvent encore être améliorées par un post-filtrage linéaire de petite taille.

7 - REFERENCES

- [ARC86] G.R. Arce : 'Statistical threshold decomposition for recursive and non recursive median filters', IEEE trans IT vol 32, Mar.1986
- [ARC87] G.R.Arce, M.P.McLoughlin, 'Theoretical analysis of the max/median filter', IEEE trans ASSP vol 35-1, Jan 1987, pp 60-69
- [BOL88] Ph.Bolon, M.Mouhoub, 'Recursive separable median filtering', in Signal Processing IV Theories and applications, Lacoume et al. eds, Elsevier, 1988, pp.1597-1600
- [BOL90] Ph.Bolon, A.Raji, P.Lambert, M.Mouhoub : 'Symmetrical recursive median filters', in Signal Processing V, Torres et al. Eds, Elsevier, 1990, pp.813-816
- [BOV87] A.C.Bovik, 'Streaking in median filtered images', IEEE trans. ASSP vol35-4, Apr.87, pp.493-503
- [GAL81] N.C.Gallagher, G.L.Wise, 'A theoretical analysis of the properties of median filters', IEEE trans ASSP vol 29-6, Dec.1981, pp 1136-1141
- [GAL82] T.A.Nodes, N.C.Gallagher, 'Median filters ; some modifications and their properties', IEEE trans. ASSP vol 30-5, Oct. 1982, pp.739-746
- [HEI87] P.Heininen, Y.Neuvo, 'FIR median hybrid filters', IEEE trans ASSP vol 35-6, Jun 1987, pp.832-838
- [NIE88] A.Niemenen, Y.Neuvo : 'Comments on 'theoretical analysis of max/median filters' ', IEEE trans. ASSP, vol.36-5, May 1988, pp.826-827
- [RAJ91] A.Raji, thèse de doctorat de l'Université de Savoie, en préparation, nov.1991
- [WAN90] X.Wang, D.Wang : 'On the Max/median filter', IEEE trans ASSP vol.38, Aug. 1990

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier messieurs J.Serra et P.Lambert pour les discussions fructueuses ayant conduit à cette étude.