Construction d'un Opérateur Linéaire Optimal pour la Détection et la Localisation de Contours

B. TACONET, N. TONFACK, A. FAURE

LACOS - Université du Havre
Place Robert Schuman, 76610 Le Havre, France

Résumé : La construction d'un opérateur linéaire optimal pour la détection et la localisation de contour peut se faire soit selon une approche paramétrique soit en partant d'un modèle et en exprimant une contrainte d'optimisation. Nous proposons de nouvelles contraintes d'optimisation et une estimation empirique de la valeur du paramètre ajustable.

Abstract : The construction of an optimal edge detector can be made either by parametric approach or by expressing an optimal constraint on an edge model. We propose new optimization constraints and an empirical estimation of the adjustable parameter value.

I- Introduction

La construction d'un opérateur linéaire optimal pour la détection et la localisation de contours est une opération courante en traitement d'images; les opérateurs de Prewitt et de Sobel sont devenus classiques, mais ils ont un horizon fixe et s'appliquent de ce fait assez mal aux images bruitées. C'est pourquoi une extension de ces filtres consiste à convoluer un différentiateur élémentaire avec un filtre passe-bas de famille fixe et de fréqence de coupure variable. La méthode de construction plus récente proposée par J.F. Canny permet une formulation en terme d'optimisation du produit de deux critères antinomiques: une bonne détection (rapport signal sur bruit élevé) et une bonne localisation (inverse de l'écart-type de l'erreur de localisation).

Dans cette étude, nous définissons un autre critère de détection-localisation, pour lequel il résulte qu'une gaussienne est le meilleur filtre passe-bas du détecteur-localisateur de contour de type "marche", et une bonne approximation pour le type "toit". Un passe-bas comme celui qui intervient dans le filtre de Deriche en constitue une bonne approximation récursive. La déconvolution optimale au sens de Wiener détermine pour le contour un passe-bas de même type que celui de Castan et Shen, avec un paramètre variable. Nous évaluons empiriquement ce paramètre.

Nous étendons ce résultat au cas de la détection de la fonction "toit".

II - Les principaux détecteurs de contours

II-1 Détecteurs de Prewitt et de Sobel

Le détecteur le plus simple est un différentiateur élémentaire, de fonction de transfert :

$$F(z) = 1 - \left(\frac{1}{z}\right) \text{ ou } z - 1$$

L'inconvénient de ces différentiateurs est qu'ils ne sont pas centrés, décalés d'une demi-période spatiale.

Le différentiateur centré le plus simple est antisymétrique, d'horizon 3; il s'écrit:

$$F(z) = z - \frac{1}{z} = \left(1 - \frac{1}{z}\right).(z + 1)$$
$$= (z - 1).\left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

Le second facteur est un filtre symétrique quelconque d'horizon 2, de puissance fixe. L'opérateur différentiateur élémentaire centré est donc le produit de convolution d'un passe-bas avec un différentiateur élémentaire.

Le passage en bidimentionnel se fait généralement en considérant que le filtre passe-bas bidimentionnel est séparable, et que chacune des deux composantes est identique. Aussi peut-on se contenter d'une étude en monodimentionnel, en théorie; toutefois, pour des filtres d'horizon fini, le produit de convolution discrète d'un filtre de dimension n par un différentiateur élémentaire donne un filtre de dimension n + 1. Aussi, pour obtenir un masque de convolution carré et centré, il est nécessaire de prendre un filtre symétrique d'horizon pair dans la direction du détecteur et un filtre symétrique d'horizon impair, supérieur d'une unité, dans la direction perpendiculaire. Par exemple, pour le différentiateur élémentaire centré, le filtre perpendiculaire est de dimension 3. Si l'on choisit une réponse impulsionnelle rectangulaire (de type "porte"), on obtient le filtre de Prewitt; si l'on choisit un réponse triangulaire, on obtient le filtre de Sobel. Le filtre passe-bas étant plus sélectif dans le dernier cas, et il est souvent préféré au premier.

II-2 Approche paramétrique

Dans l'approche paramétrique, qui est une extension du cas précédent à un horizon quelconque, on se fixe a priori la famille du filtre passe-bas, et il reste un paramètre à ajuster.

Si l'on considère l'horizon fini et connu, on peut chercher le filtre passe-bas qui atténue le plus les lobes secondaires (fenêtre de Hamming, Blackman, etc...) que l'on discrétise; le paramètre à ajuster est la taille de la fenêtre.

Une autre considération peut être : minimiser le produit de l'écart-type de la réponse impulsionnelle par l'écart-type de la fréquence, ce qui représente approximativement le produit de l'horizon par la bande passante. La solution mathématique est une gaussienne, dont le paramètre reste à ajuster.

Une autre voie est celle de la recherche d'une solution récursive, la plus simple ayant pour réponse impulsionnelle une exponentielle décroissante; on peut remarquer qu'une gaussienne est assez, bien approchée par une fonction du type

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{4}\right).(1 + \alpha|x|).e^{-\alpha|x|}$$

filtre passe-bas du détecteur de Deriche.

II-3 Modèles et contraintes d'optimisation

L'approche non paramétrique est une approche par modèle et contrainte d'optimisation. La résolution en monodimentionnel suffit, car les filtres dans la direction perpendiculaire et dans la direction principale sont pris identiques.

II-3-1 Modéles

- contour de type "marche":

$$I(x) = K.u(x) + n(x),$$

avec : $u(x)$ échelon unitaire , $n(x)$ bruit spatialement décorrélé de puissance spectrale constante σ^2, K amplitude du saut, $I(x)$ amplitude du signal bruité, I_o amplitude constante.

En dérivant et en convoluant avec un filtre passe-bas de réponse impulsonnelle $f(x)$, on obtient :

(M1) $\quad f'*I(x) = K.f(x) + n*f'(x)$

- contour de type toit

$$I(x) = T.\Lambda(x) + n(x)$$

$\Lambda(x)$ est une fonction "toit", dont la dérivée seconde donne $\delta(x)$, δ étant l'impulsion de Dirac.

La dérivée seconde donne, convolué au filtre cherché $f(x)$:

(M2) $\quad f''*I(x) = T.f(x) + n*f''(x)$

II-3-2 contraintes d'optimisation existantes

Il existe actuellement deux types de contraintes d'optimisation : celles de détection-localisation, introduites par Canny; celle de Wiener ou de l'estimation au sens des moindres carrés. Nous analyserons seulement le cas du contour "marche"

1. contraintes de détection et de localisation

Pour la détection d'un contour de type "marche", J.F. Canny a proposé de maximiser le rapport signal sur bruit, c'est-à-dire :

$$\Sigma = K \frac{|f(0)|}{\sigma\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(x)dx}}$$

Pour la localisation, en considérant les petites variations du signal autour du maximum, et en exprimant l'inverse de l'écart-type, on trouve :

$$\Lambda = \frac{K|f''(0)|}{\sigma\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f''^2(x)dx}}$$

Le critère global d'optimisation est de maximiser le produit des deux termes précédents, Σ et Λ. J.F. Canny approche le résultat obtenu par une gaussienne, et R. Deriche propose une solution récursive simple.

Pour le cas d'un contour en "toit", on pourra se reporter aux travaux de J.F. Canny d'une part, et à la solution récursive proposée par D. Ziou et B. Wrobel-Daucourt(qui comporte deux paramètres ajustables).

2. optimisation au sens de Wiener

Il s'agit de minimiser la distance entre le signal dérivé filtré et le signal dérivé non filtré $K.\delta(x)$.

Le critère d'optimisation est la minimisation de la quantité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f'*I(x) - K.\delta(x)]^2 dx$$

avec la contrainte de normalisation et la contrainte sur la densité spectrale du bruit.

La solution générale est donnée dans le domaine fréquentiel:

$$F(\nu) = \frac{1}{1+\gamma^2\left(\frac{\sigma^2}{K^2}\right)4\pi^2\nu^2}$$

avec le paramètre γ qui doit être ajusté. On retrouve le filtre de réponse impulsionnelle exponentielle proposé par Castan et Shen.

III - Nouvelles contraintes d'optimisation

III-1 Détection-Localisation

La nouvelle contrainte d'optimisation est une expression un peu différente de celle proposée par J.F. Canny, mais elle prend en compte la double considération détection et localisation. Nous proposons de minimiser le rapport bruit sur signal, que nous appliquons au cas du contour de type "marche", en prenant :

- pour le signal, un produit de deux termes:

* un terme "détection", qui n'est autre que la racine carrée de l'énergie du signal :

$$K\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}$$

* un terme localisation, qui est l'inverse de l'écart-type de la réponse impulsionnelle :

$$\sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x)dx}}$$

- pour le bruit, l'expression de la racine carrée de son énergie

$$\sigma\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(x)dx}$$

ce qui donne le critère global de minimisation:

$$C = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}} \; \frac{\sigma\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(x)dx}}{K\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}}$$

la fonction f(x) qui minimise ce critère est une gaussienne, de paramètre ajustable, et le critère global de minimisation vaut $2\pi.\left(\frac{\sigma}{K}\right)$. L'optimisation est d'autant meilleure que le rapport $\left(\frac{\sigma}{K}\right)$ est plus petit. On retrouve ainsi des résultats voisins de ceux de J.F.Canny, prolongés par R.Deriche. Notons également que le critère est sans dimension, et qu'il ne fait pas apparaître de valeurs de fonctions au point de cassure, mais seulement un écart-type autour de ce point.

Lorsque l'on cherche à appliquer ceci au cas d'un contour de type "toit", on obtient le critère global de minimisation suivant :

$$C = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}} \; \frac{\sigma\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f''^2(x)dx}}{K\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}}$$

Si, comme dans le cas précédent, on admet que l'on peut écrire que les puissances sont égales, et que l'on travaille dans les domaine fréquentiel, alors on trouve :

$$F(\nu) = e^{-\left(\frac{|\nu|^3}{a^3}\right)}$$

ce qui donne un filtre plus sélectif qu'une gaussienne.

III-2 Détection-localisation pour un filtre de Wiener

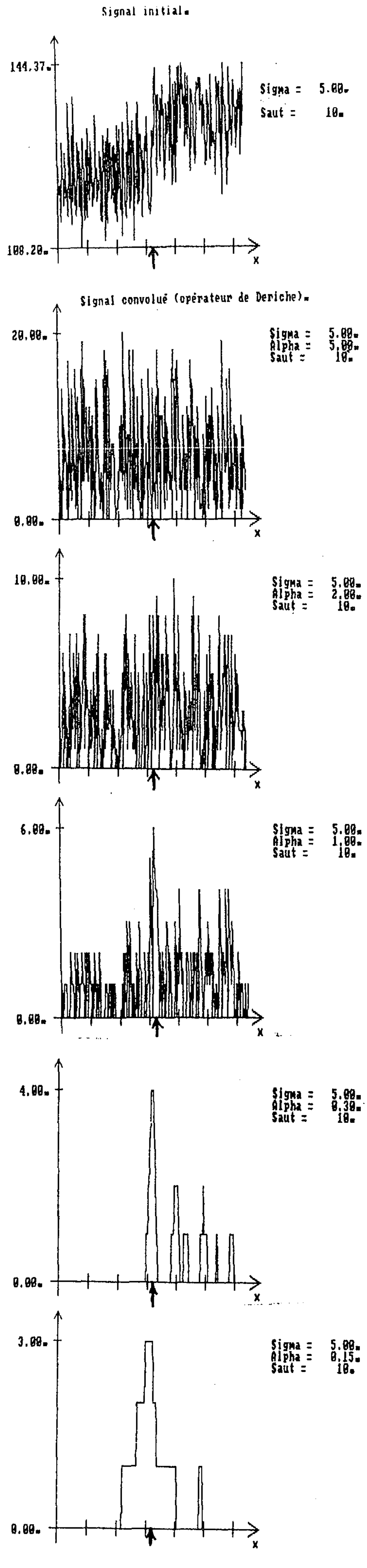
Dans la deuxième partie, nous avons montré qu'un filtre optimal au sens de Wiener avait une réponse impulsionnelle exponentielle. Nous considérons que le critère de Wiener est un bon critère de détection, et la forme "pointue" de cette réponse en fait un médiocre localisateur. De façon à introduire un élément de localisation, nous proposons de convoluer le signal détecté avec le signal détecté non bruité. Ceci revient à autocorréler le filtre passe-bas obtenu après détection. La transformée de Fourier du détecteur-localisateur est par conséquent le carré de la transformée de Fourier du détecteur optimal de Wiener. On retrouve l'expression du filtre de Deriche.

IV - Détermination expérimentale du paramètre

En partant du modèle de contour de type "marche" bruité, Nous avons simulé sur microordinateur le signal initial et l'effet de l'opérateur de Deriche. Les figures ci-jointes illustrent les résultats expérimentaux. Les paramètres K et σ sont constants, le paramètre α varie. Les deux critères de choix antinomiques sont d'une part réduire la largeur du pic de détection, d'autre part réduire la probabilité d'apparition d'un pic parasite (dédoublement du point de contour détecté). α est proportionnel à $\frac{K}{\sigma}$ et vaut environ 0.1 $\frac{K}{\sigma}$.

V - Conclusion

Nous avons introduit de nouveaux critères de détection-localisation optimale et étudié le cas de contour de type marche. Le filtre de Deriche apparaît comme une bonne réalisation récursive du filtre optimal. L'étude expérimentale montre que le paramètre ajustable est de l'ordre de $0.1\,\frac{K}{\sigma}$. Cependant pour des images réelles, il semble qu'il faille prendre en compte l'existence des transitions plus douces qui ont une influence sur le paramètre de réglage.



BIBLIOGRAPHIE

[CA-83] J. F. CANNY : *Finding Edges and Lines in Images*; MIT Master Thesis, 1983.

[DCOT-89] E. DeMICHELLI, B. CAPRILE, P. OTTONELLO and V. TORRE : *Localisation and Noise in Edge Detection*; IEEE Trans. PAMI, **10**, 1106-1116, 1989.

[DE-86] R. DERICHE : *Segmentation d'Image*; Rapport d'activité INRIA, 6, 42-45, 1986.

[DE-87] R. DERICHE : *Optimal Edge Detection Using Recursive Filtering*; IEEE Trans. PAMI, 7, 501-505, 1987.

[DE-90] R. DERICHE : *Fast Algorithm for Low-Level Vision*; IEEE Trans. PAMI, 1, 78-87, 1990.

[MH-80] MARR and E. C. HILDRETH : *Theory of Edge Detection*; Proc. Royal Soc. of London, **B. 207**, 187-217, 1980.

[NB-86] V. S. NALWA and T. BINFORD : *On Detecting Edges*; IEEE Trans. PAMI, **6**, 699-714, 1986.

[TA-77] A. N. TIKHONOV and V. Y. ARSENIN : *Solution of Ill-Posed Problems*; Washington, DC, Winston and Wiley, 1977.

[TO-90] N. TONFACK : *Appariement d'Images Stéréoscopiques par des Modèles Orientés*; Thèse de Doctorat, Univ. du Havre, 1990.

[TP-86] V. TORRE and POGGIO : *On Edge Detection*; IEEE Trans. PAMI, 2, 147-163, 1986

[SH-89] S. CASTAN, J. ZHAO et J. SHEN : *Une Famille de Détection des Contours basée sur le Filtre Exponentiel optimal*; Actes du 7ème congrès RFIA, Paris, pp. 23-36, 1989.

[ZI-89] D. ZIOU, B. WROBEL-DAUTCOURT : *Un Détecteur Optimal de Lignes de Crête*; Actes du 7ème congrès RFIA, Paris, pp. 53-62, 1989.