

# DETECTION DE CONTOURS PAR TRANSFORMEE EN ONDELETTES BI-ORTHOGONALES RECURSIVES

T. Gaidon\*, P. Mathieu\*, M. Barlaud\*, J.C. Feauveau\*\*

\* LASSY I3S du CNRS Université de NICE-SOPHIA ANTIPOLIS 4 Av. A. Einstein 06560 Valbonne (FRANCE)

\*\* MATRA MS2I St Quentin en Yvelines (FRANCE)

## RÉSUMÉ

Cet article décrit une nouvelle méthode de détection de contours multirésolution. Cette méthode est basée sur une transformée en ondelettes bi-orthogonales récursives qui lie filtres numériques et fonctions continues, les ondelettes. Dans l'analyse en ondelettes bi-orthogonales, nous avons un filtre passe-haut associé à l'ondelette et un filtre passe-bas associé à la fonction d'échelle.

L'idée nouvelle est de calculer des filtres de détection optimaux qui conduisent à une analyse multirésolution (ondelette continue). Le filtre passe-haut (filtre à réponse impulsionnelle infinie) est choisi pour ses propriétés de dérivée première. La famille des filtres passe-bas est déduite du passe-haut en utilisant les relations algébriques issues de la théorie des ondelettes. Nous proposons des filtres de détection donnant le meilleur compromis entre les critères de détection, localisation et régularité.

## I. INTRODUCTION

De nombreuses recherches ont été menées pour résoudre le problème de la segmentation d'image. C'est une étape importante vers la compréhension du contenu sémantique. Segmenter une image consiste à repérer des zones de l'image qui appartiennent à un objet, et à les étiqueter en vue d'une reconnaissance de forme. L'analyse multirésolution conduit à une approche basée sur l'évolution des contours à différentes échelles. En effet, la théorie des ondelettes liée à l'analyse multirésolution permet la caractérisation des singularités rencontrées.

Nous ferons tout d'abord un bref rappel des bases de l'analyse multirésolution par ondelettes, ainsi que les principaux résultats qui permettent d'identifier les contours par leur comportement au travers des échelles. Nous montrerons ensuite, en section IV comment il est possible d'intégrer des filtres de détection dans une analyse en ondelettes bi-orthogonales. Enfin nous montrerons des résultats obtenus sur des images en niveau de gris.

## II. SCHEMA DE DETECTION

A partir de l'image originale on effectue une transformée en ondelettes dyadique avec des filtres récursifs. On forme à chaque résolution une image de gradient avec les coefficients verticaux et horizontaux. Sur chacune de ces images une recherche de maxima locaux permet de localiser les contours.

Ensuite une mise en correspondance des résultats de chaque niveau permet d'obtenir les contours. La figure II.1 représente le schéma de détection des contours.

## ABSTRACT

This paper describes a new method of multiresolution edge detection. This method is based on a recursive bi-orthogonal wavelet.

The new idea is to compute optimal edge detection filters which yields multiresolution analysis (continuous wavelet). The highpass filter (IIR) is chosen in order to have first derivative properties. The family of lowpass filters is deduced from the high pass filter using wavelet transform theory relations. We propose detection filters as a trade-off between detection, localization and regularity criteria.

## III. ONDELETTES

### III.1. Analyse multirésolution

Le principe de l'analyse multirésolution est de fournir des "vues" d'un signal  $S(x)$  à différentes échelles. Cette technique a été introduite par Y. Meyer [10] et S. Mallat [9]. Ces "vues" sont obtenues en projetant  $S(x)$  sur une suite de sous-espaces emboîtés notés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , et dans les directions définies par des espaces  $(Z_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ . L'ensemble des projecteurs est noté  $(A_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ . Pour être interprétés comme les différentes échelles de l'analyse, ces sous-espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  doivent vérifier les relations suivantes:

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j-1},$$
$$\text{et } \{0\} \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}),$$

De la même manière, les directions de projection vérifient

$$\{0\} \dots \subset Z_{j+1} \subset Z_j \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}).$$

Le principe de l'analyse est le suivant: soit  $A_j(S)(x)$  l'approximation de  $S(x)$  à l'échelle  $2^j$  (c'est la projection sur  $V_j$  dans la direction  $Z_j$ ). Cette approximation peut être décomposée en une approximation à l'échelle inférieure  $A_{j-1}(S)$  et un signal  $A_j(S)(x) - A_{j-1}(S)(x)$  qui contient les détails perdus entre les échelles  $2^j$  et  $2^{j-1}$ . Ce signal de détails est obtenu en projetant  $S(x)$  sur les sous-espaces inter-échelle  $W_{j-1}$  tel que:

$$W_j \subset Z_j \text{ and } V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Nous pouvons itérer ce processus sur  $A_{j-1}(S)$ , en générant un algorithme pyramidal. Il faut noter qu'il est possible de reconstruire  $A_j(S)$  à partir de  $A_{j-1}(S)$  et  $A_j(S)(x) - A_{j-1}(S)(x)$



Dans le but de calculer explicitement les projections, on impose l'existence d'une fonction  $\phi$  tel que la famille  $(2^{j/2}\phi(2^jx - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base de  $V_j$ . Dans ce contexte, le principal résultat est le suivant [4]: on peut trouver une fonction  $\psi$  ( $\psi$  est appelée ondelette), tel que le sous-espace inter-échelle  $W_j$  est engendré par  $(2^{j/2}\psi(2^jx - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ . L'index  $j$  peut être comparé à la résolution d'un microscope. Lorsque  $j$  est très grand,  $2^{j/2}\psi(2^jx - k)$  peut être interprété comme une dérivée d'une fonction de Dirac et la contribution de cette fonction à la décomposition du signal  $S(x)$  sur les bases d'ondelette est bien localisée. D'autre part, lorsque  $j$  tend vers  $-\infty$  la contribution est délocalisée spatialement. Pour une résolution donnée,  $k$  n'est rien d'autre qu'un indice de translation.

Décomposons le signal sur les bases:

$$A_j(S)(x) = 2^{j/2} \sum S_{j,k} \phi(2^jx - k) \quad (1)$$

$$\text{et } A_j(S)(x) - A_{j-1}(S)(x) = 2^{j/2} \sum C_{j,k} \psi(2^jx - k) \quad (2)$$

On peut montrer [4] [6] qu'il existe deux fonctions  $\phi^*$  et  $\psi^*$  telles que [1]:

$$S_{j,k} = 2^{j/2} \int S(x) \phi^*(2^jx - k) dx \quad (3.a)$$

$$\text{et } C_{j,k} = 2^{j/2} \int S(x) \psi^*(2^jx - k) dx \quad (3.b)$$

Les coefficients  $C_{j,k}$  sont appelés coefficients d'ondelettes.

Les relations (1) et (2) montrent que l'information contenue dans  $(S_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est équivalente à celle contenue dans  $((S_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}, (C_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}})$ . Cette transformation est obtenue avec un banc de filtres. En effet on peut montrer qu'il existe deux filtres  $H_0(\omega)$  et  $H_1(\omega)$  tels que:

$$\hat{\phi}^*(2\omega) = H_0(\omega) \hat{\phi}^*(\omega) = \prod_{n=0}^{\infty} H_0\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \quad (4)$$

$$\hat{\psi}^*(2\omega) = H_1(\omega + \pi) e^{i\omega} \hat{\phi}^*(\omega) \quad (5)$$

$$\text{avec } H_0(\omega) H_1(\omega) + H_0(\omega + \pi) H_1(\omega + \pi) = 1,$$

$$\text{et } H_0(0) = H_1(0) = 1 \text{ and } H_0(\pi) = H_1(\pi) = 0,$$

où  $\hat{\phi}^*$  est la transformée de Fourier de  $\phi^*$

il s'en suit que

$$S_{j,k} = \sum_p S_{j+1,p} h_0(2k-p) \quad \text{et} \quad C_{j,k} = \sum_p S_{j+1,p} g_0(2k-p)$$

$$\text{avec } g_0(n) = (-1)^n h_1(-n+1)$$

$$\text{et } H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_0(n) e^{-in\omega}$$

$$G_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_0(n) e^{-in\omega}$$

Ces relations sont les relations de base de la décomposition multirésolution d'un signal. En pratique nous identifions le signal échantillonné à analyser avec  $S_{0,k}$ , et nous décomposons ce signal à des échelles de plus en plus grossières. Il est clair que si le signal d'origine contient  $N$  échantillons, alors le signal lissé  $S_{j-1,k}$  ne contient que  $N/2$  échantillons ainsi que le signal  $C_{j-1,k}$ .

Comme nous le verrons, la détection de bords est effectuée sur les coefficients d'ondelettes. Cependant, le sous-échantillonnage introduit une délocalisation de l'information, et il est préférable de ne pas sous-

échantillonner tout en conservant l'interprétation multirésolution des coefficients.

En pratique, si on écrit  $S(j,2^jk) = S_{j,k}$  et  $C(j,2^jk) = C_{j,k}$  pour  $j < 0$ , il est préférable de calculer les coefficients:

$$S(j,k) = 2^{j/2} \int S(x) \phi^*(2^j(x - k)) dx \quad (6.a)$$

$$C(j,k) = 2^{j/2} \int S(x) \psi^*(2^j(x - k)) dx \quad (6.b)$$

ce qui est cohérent avec l'analyse multirésolution avec sous-échantillonnage.

L'introduction de (4) et (5) dans (6) donne les résultats suivants de la décomposition sans sous-échantillonnage:

$$S(j,k) = \sum_p S(j+1,k-p) h_0^j(p)$$

$$\text{et } C(j,k) = \sum_p S(j+1,k-p) g_0^j(p) \quad (7)$$

avec  $H_0^j(\omega) = H_0(2^{j-1}\omega)$  et  $G_0^j(\omega) = G_0(2^{j-1}\omega)$ .

La figure III.1 présente le schéma bloc de l'analyse multirésolution sans sous-échantillonnage.

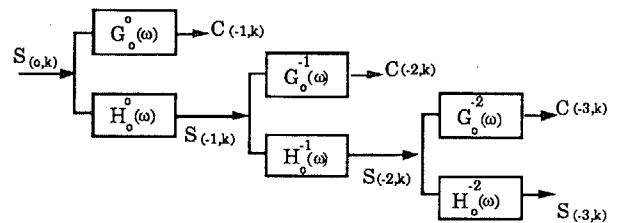


Figure III.1 : Analyse Multirésolution non sous-échantillonnée

### III.2. Extension au cas 2D

L'analyse mutirésolution peut être étendue au cas bi-dimensionnel. Un moyen consiste à utiliser un produit tensoriel de deux analyses multirésolution 1D [9].

### III.3. Intercorrélation

Le but de la méthode est d'utiliser la propriété de multirésolution qu'offre la transformée en ondelettes en suivant l'évolution du point de contour à travers les échelles.

Le principe est d'utiliser l'intercorrélacion locale entre les images de type "gradient" de la première et deuxième résolution, pour caractériser le contour.

On note, pour un point  $(k,l)$  et une largeur de fenêtre donnés :

$G_j$  : image de type "gradient" à la résolution  $j$

$$G_j^f = \begin{pmatrix} G_j(k-1, l-1) & G_j(k-1, l) & G_j(k-1, l+1) \\ G_j(k, l-1) & G_j(k, l) & G_j(k, l+1) \\ G_j(k+1, l-1) & G_j(k+1, l) & G_j(k+1, l+1) \end{pmatrix} \quad (8)$$

une fenêtre sur  $G_j$

$C_{12}^{kl}(u,v) = E [G_1^f(k,l) G_2^f(k+u,l+v)]$ , la fonction d'intercorrélacion

$$\Gamma_{12}^{kl}(u,v) = \frac{C_{12}^{kl}(u,v)}{\sqrt{C_1^{kl}(0,0)} \sqrt{C_2^{kl}(0,0)}} \quad (9)$$

la fonction d'intercorrélacion normée.

Deux situations peuvent être envisagées :

- Les fenêtres de la première et deuxième résolution ne se "ressemblent" pas, même dans leur voisinage immédiat : il est donc très probable que ce qui a été détecté à la première résolution n'est que du bruit. Le point ne sera donc pas gardé.

- Les fenêtres sont "suffisamment ressemblantes" dans un voisinage immédiat : il faut alors tenir compte de l'énergie de la fenêtre à la deuxième résolution. Si cette énergie est faible, on considère que le point détecté est du bruit et on ne le garde pas.

Pour obtenir une image binaire de contours, il faudra ensuite suivre les crêtes de cette image.

#### IV. ANALYSE MULTIRÉSOLUTION BI-ORTHOGONALE ET FILTRES DE DETECTION RECURSIFS

Le signal original est décomposé en utilisant des filtres optimaux numériques.

##### IV.1. Optimisation des filtres de détection

En 1983, J.F. Canny [3] proposa l'utilisation de critères objectifs pour définir ce que doit être un filtre optimal pour la détection de la variation première d'un signal. Résumons les critères retenus par Canny.

- Une *bonne détection* des singularités.
- Une *bonne localisation* des singularités.
- Avoir le *minimum de fausses alarmes*

Des critères similaires furent utilisés par R. Deriche [5], Shen & Castan [11] pour déterminer des filtres de détection optimaux tels que les filtres numériques associés soient récursifs. Il est clair que les analyses multirésolutions qui utilisent dans leur algorithme de décomposition des filtres de détection optimaux pour le calcul des coefficients d'ondelette héritent de cette optimalité. Elles sont donc particulièrement aptes à effectuer une segmentation multirésolution.

Il faut noter que les analyses multirésolution issues des couples de filtres définies précédemment n'engendrent pas en général des analyses multirésolution bi-orthogonales dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Cependant, ces analyses existent avec d'autres notions de dualité (dans les espaces de Sobolev).

Pour obtenir une bonne détection en multirésolution nous avons choisi un banc de filtres en fonction de plusieurs critères portant sur les fonctions ondelettes:

- *Critères de détection optimale* :

Soit  $\Psi^*(x)$  une ondelette définie précédemment, nous proposons les critères suivants caractérisant une bonne détection et une bonne localisation de l'opérateur:

$$C_{\text{detect}} = \frac{|\int \mathcal{H}(-x) \Psi^*(x) dx|}{\sqrt{\int \Psi^{*2}(x) dx}} \quad (10)$$

$$C_{\text{loc}} = \frac{|\int \mathcal{H}'(-x) \Psi^*(x) dx|}{\sqrt{\int \Psi^{*2}(x) dx}} \quad (11)$$

Où  $\mathcal{H}(x)$  est la fonction de Heaviside et ' indique une dérivée première. Ces critères portent sur les fonctions continues et non pas sur les filtres numériques.

Pour satisfaire à ces critères suivant l'approche de Canny, nous choisissons de maximiser le produit  $C_d = C_{\text{detect}} \cdot C_{\text{loc}}$ . Le critère  $C_{\text{loc}}$  tient compte de la dérivée de  $\Psi^*$ , la fonction doit donc être au moins de classe  $C^1$ .

En plus nous introduisons un nouveau critère  $\sigma_t$ . Il représente "l'écart type" de la fonction  $\Psi^*$ .

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\int x^2 |\Psi^*(x)|^2 dx}{\int |\Psi^*(x)|^2 dx}} \quad (12)$$

- *Critère de régularité:*

Les fonctions d'échelle et les ondelettes doivent être suffisamment régulières en fonction des critères précédents et pour permettre l'analyse multirésolution.

Pour évaluer cette régularité, nous calculons systématiquement un exposant  $\nu$  tel que:

$$|\hat{\phi}^*(\omega)| \leq (1+|\omega|)^\nu \quad (13)$$

pour  $|\omega|$  supérieur à une certaine valeur.

Nous savons alors que  $\phi^*$  est au moins de classe  $C^{\nu-1}$ [10].

##### IV.2. Familles de filtres

Afin de satisfaire à l'équation de reconstruction exacte les filtres symétriques doivent vérifier la condition suivante:

$$H_0(\omega)H_1(\omega) + H_0(\omega+\pi)H_1(\omega+\pi) = 1 \quad (14)$$

A partir de cette formulation nous allons montrer comment engendrer une famille de paires de filtres récursifs à phase nulle [2]. Ensuite nous en déduirons les filtres antisymétriques.

$$\text{Soit } F_N(\omega) = \left(\frac{1+\cos(\omega)}{2}\right)^N + \left(\frac{1-\cos(\omega)}{2}\right)^N \quad (15)$$

Nous pouvons écrire:

$$\left(\frac{1+\cos(\omega)}{2}\right)^N \frac{1}{F_N(\omega)} + \left(\frac{1-\cos(\omega)}{2}\right)^N \frac{1}{F_N(\omega+\pi)} = 1 \quad (16)$$

Posons (avec  $p+q=N$ ):

$$H_1(\omega) = \left(\frac{1+\cos(\omega)}{2}\right)^p \text{ et } H_0(\omega) = \left(\frac{1+\cos(\omega)}{2}\right)^q \frac{1}{F_N(\omega)} \quad (17)$$

Dans le cas de filtres antisymétriques, le terme  $\frac{1+\cos(\omega)}{2}$  est partagé en deux parties  $\frac{1+e^{i\omega}}{2}$  et  $\frac{1+e^{-i\omega}}{2}$ . La première est affectée à  $H_0(\omega)$  et la seconde à  $H_1(\omega)$ .

Le filtre est (sous la forme générale non causale)

$H_m(\omega) = \frac{1+e^{i\omega}}{2} \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$  où  $m=0$  ou  $1$ . Il est décomposé en deux parties, une causale et l'autre anticausale:

$$H_m(\omega) = L(\omega) + e^{i\omega} L(-\omega) \quad (18)$$

Cette formulation est intéressante pour implanter efficacement l'opérateur  $H_m(\omega)$  par filtrage récursif [5].

#### V. RESULTATS

Les critères sont optimisés en multipliant ou divisant les filtres par un polynôme  $P(\omega, \lambda)$  en  $\cos(\omega)$  où  $\lambda$  est un coefficient variable. Ceci conserve la propriété de reconstruction exacte (14):

$$\text{On pose } \mathcal{H}_0(\omega) = H_0(\omega) P(\omega, \lambda) \text{ et } \mathcal{H}_1(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{P(\omega, \lambda)} \text{ ainsi}$$

$$\mathcal{H}_0(\omega)\mathcal{H}_1(\omega) + \mathcal{H}_0(\omega+\pi)\mathcal{H}_1(\omega+\pi) = 1$$

Le banc de filtres que nous avons utilisé a été choisi sur la base des filtres spline.

Dans le cas du spline linéaire ( $p=1$ )  $H_0(\omega) = \frac{1+\cos(\omega)}{2}$ . Si nous prenons  $N=3$  dans la formule (17) alors

$$H_1(\omega) = \frac{(1+\cos(\omega))^2}{1+3\cos(\omega)^2}$$



Le polynôme utilisé pour l'optimisation est :

$$P(\omega, \lambda) = 1 + 2\lambda \cos(\omega)$$

Le banc de filtre est:

$$H_0(\omega) = (1 + e^{-i\omega}) \frac{1}{1 + 2\lambda \cos(\omega)}$$

$$H_1(\omega) = (1 + e^{i\omega}) \frac{(1 + \cos(\omega))^2 (1 + 2\lambda \cos(\omega))}{(1 + 3\cos^2(\omega))}$$

La figure V.1 montre l'évolution des critères de détection, et du critère de régularité:  $v_0$  et  $v_1$  représentent respectivement la classe de  $\psi^*$  et de  $\phi$ ,  $\sigma_0$  et  $C_d$  représentent "l'écart type" et le critère de détection de la fonction  $\psi^*$ .

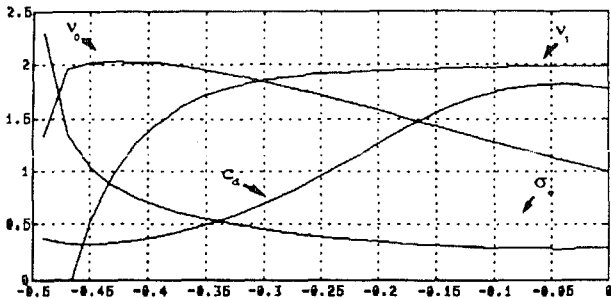


Figure V.1: Evolution des critères

La valeur  $\lambda = -0.1$  a été choisie comme le meilleur compromis entre détection optimale ( $C_d$  maximum), régularité maximale et "écart type" spatial minimum.

Cette valeur donne les valeurs suivantes des critères: classes:  $v_0 \approx 1.3$   $v_1 \approx 1.9$ ; détection:  $C_d \approx 1.7$ ; écart type:  $\sigma_0 \approx 0.29$ .

Les figures V.2 et V.3 montrent les fonctions d'échelle et les ondelettes pour  $\lambda$  optimal:

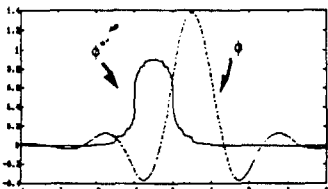


Figure V.2: Fonctions d'échelle

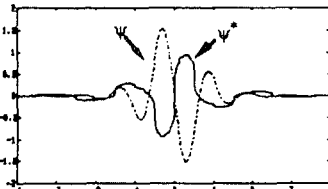


Figure V.3: Ondelettes

Dans le cas 2D l'analyse multirésolution engendre trois sous-images de détails. Nous utilisons deux types de coefficients: ceux qui sont orientés horizontalement ou verticalement. Ils ont des propriétés de dérivée première: une dérivée dans un axe et un lissage dans l'autre.

La détection des contours par ondelettes récursives nécessite la recherche de maxima locaux dans les images de gradient. Puis nous fusionnons les résultats.

Les figures V.4 à V.6 montrent les résultats de la méthode.

**VI. CONCLUSION**

Nous avons proposé une nouvelle méthode de détection de contours. L'analyse mutirésolution conduit à une approche basée sur l'évolution des contours à différentes échelles. Des filtres récursifs optimaux sont proposés pour obtenir le meilleur compromis entre détection optimale, régularité maximale et d'écart type spatial minimum.

**Remerciements**

Nous souhaitons remercier Jean-François Lopez pour l'aide qu'il nous a apporté au cours des simulations sur la détection des contours.

**Références:**

- [1] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies "Image Coding Using Wavelet Transform", à paraître, IEEE Trans. on ASSP.
- [2] M. Barlaud, T. Gaidon, P. Mathieu, and J.C. Feauveau "Edge Detection Using Recursive Biorthogonal Wavelet Transform" IEEE ICASSP, Toronto CANADA, Mai 1991.
- [3] J.F. Canny "A Computational Approach to Edge Detection", Readings in Computer Vision, edited by M.A. Fischler, O. Firschein, M. Kauffman publishers. pp184-203.
- [4] A. Cohen, I. Daubechies and J.C. Feauveau, "Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets", AT&T Bell Laboratories, Technical Report, n° TM 11217-900529-07.
- [5] R. Deriche, "Optimal Edge Detection Using Recursive Filtering", International Journal of Computer Vision, 1987.
- [6] J.C. Feauveau, "Analyse Multirésolution par Ondelettes Non Orthogonales et Bancs de Filtrés Numériques", Thèse de Doctorat, Université de Paris Sud, France, 1990.
- [7] T. Gaidon "Détection de contours par transformée en ondelettes bi-orthogonales" Rapport Interne, I3S CNRS, 22 Octobre 1990 Sophia Antipolis.
- [8] S. Mallat, S. Zhong "Compact Image Coding from Edges With Wavelets" IEEE ICASSP, Toronto CANADA, Mai 1991.
- [9] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intel. Vol. 11 No.7, Juillet 89.
- [10] Y.Meyer, "Ondelettes et Opérateurs" Hermann (1990). Paris.
- [11] J. Shen and S. Castan "An optimal linear operator for edge detection", Conference on Vision and Pattern Recognition, USA, Juin 1986. IEEE.

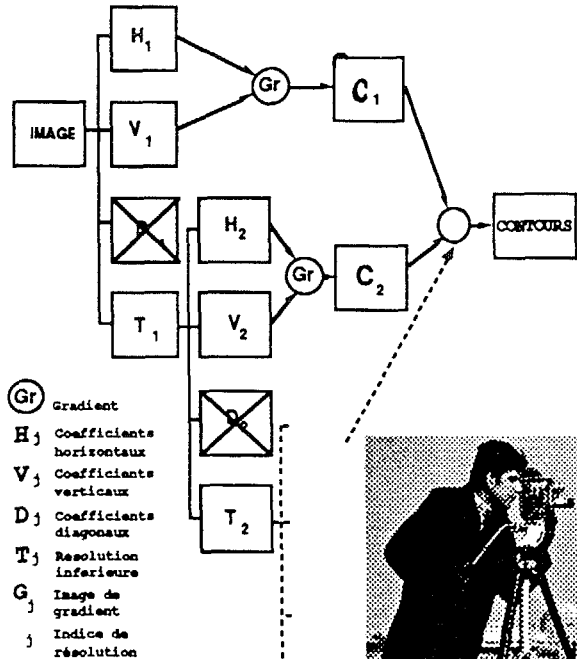


Figure II.1 Schéma de détection



Figure V.4: Image originale



Figure V.5: Contours sans corrélation



Figure V.6: Contours avec corrélation