

STABILITE DE L'EXTRACTION DE PRIMITIVES INVARIANTES

Faouzi GHORBEL

Institut National des Télécommunications: Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication.

Immeuble le Triolo, 6, rue des techniques, 59650 Villeneuve d'Ascq, France.

Résumé : Nous munissons les Descripteurs de Fourier d'un nouveau critère et nous les qualifions de stables. Nous définissons de manière précise la stabilité ainsi que la complétion critère introduit par Crimmins [5]. Enfin, nous construisons une famille de Descripteurs complète et stable, invariante par rapport au point de départ et par rapport aux similitudes directes dans le cadre des contours fermés.

I. INTRODUCTION:

L'approche statistique en reconnaissance de formes suppose qu'une forme est représentée par un vecteur aléatoire X de dimension d [6]. En vision robotique par exemple, le vecteur X est souvent formé de composantes invariantes par rapport à certaines transformations de l'espace ou du plan (translation, rotation, affinité...) [1], [2], [3] et [4]. Dans le cadre des objets se réduisant à leurs contours, Crimmins [5] a introduit la notion de complétion critère assurant une correspondance biunivoque entre forme et vecteur d'invariants. Cependant ce critère est de nature purement algébrique puisqu'il ne tient pas compte de la proximité entre les formes des objets observés dans une scène. Nous introduisons dans ce cadre un nouveau critère pour ces quantités invariantes que nous appelons stabilité. Ce type de propriété garantira la proximité des invariants lors d'une ressemblance de forme. Cet aspect a un double intérêt: Il fournit une certaine robustesse aux erreurs de calcul numérique et aux distorsions causées par de mauvaises acquisitions et d'autre part, il garantit la conservation des dispersions statistiques.

Pour cela, nous définissons les notions d'objet, de forme, d'espace des formes, d'espace d'invariants et d'une famille d'invariants. Pour des raisons de faisabilité et de simplification de l'exposé, nous nous restreignons au cas où les formes se réduisent à leur contour et nous traitons le cas de l'invariance par rapport au point de départ sur la courbe et par rapport aux similitudes directes.

Abstract : We define a new property for Fourier Descriptors that we call stability and we precise the completion and stability properties which is introduced by Crimmins [5]. Finally, we construct a complete and stable set of invariant Fourier Descriptors with regard to the starting point on the curve and the direct group of similarities in the case of closed contours.

II. DEFINITION :

Définition 1: Une paramétrisation est la donnée d'un intervalle I et d'une immersion f du plan complexe C ($f'(t)$ non nulle pour tout t).

Définition 2: Deux paramétrisations (I,f) et (J,g) sont dites italiques et on note par $(I,f) \sim (J,g)$, si et seulement si il existe un difféomorphisme A de I dans J tel que $g = f \circ A$.

Remarque 1 : \sim est une relation d'équivalence dans l'ensemble des paramétrisations P .

Définition 3: Un arc géométrique est une classe d'équivalence de paramétrisation italiques. Un objet est un arc plan fermé ne contenant pas de points doubles.

Remarque 2 : Un objet admet des paramétrisations L -périodiques et par conséquent admet une paramétrisation curviligne normalisée ($L = 1$).

Définition 4 : On dit que deux objets O_1 et O_2 ont la même forme F si et seulement si il existe une similitude S amenant O_1 sur O_2 , c'est à dire:

si f et g sont deux paramétrisations curvilignes normalisées respectives de O_1 et O_2 alors il existe un réel l_0 dans $]0,1[$, a et b deux nombres complexes (a non nul) tels que:



$$g(1) = a f(1+10) + b \quad \text{avec} \quad |a| = 1 \quad (1)$$

Remarque 3: La relation (1) définit dans l'ensemble de tous les objets une relation d'équivalence, puisque l'ensemble des similitudes forme un groupe pour la loi de composition.

Définition 5: Une forme est une classe d'équivalence d'objets en relation.

Comme les objets admettent des paramétrisations périodiques alors celles-ci sont développables en série de Fourier et on a dans les mêmes conditions que la définition 4, la relation suivante entre les coefficients de Fourier de f et de g:

$$a_n(g) = a e^{2\pi i n} a_n(f) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad (2)$$

L'espace des formes F est donc l'espace quotient de l'espace des paramétrisations curvilignes normalisées (qui n'est autre que l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$ isomorphe à $l^2(\mathbb{Z})$ par le groupe des similitudes directes $\text{Sim}(\mathbb{R}^2)$ et par le groupe cyclique $[0,1[$. Donc, l'espace des formes F peut s'identifier à $l^2(\mathbb{Z})/\text{Sim}(\mathbb{R}^2) \times [0,1[$.

Les grandeurs invariantes composant le vecteur X serviront à quantifier la notion de forme.

Définition 6: Une famille $\{I_n\}$ de scalaires est dite une famille d'invariants par rapport au groupe des similitudes directes si et seulement si:

O_1 et O_2 sont deux objets de même forme F alors :

$$I_n(O_1) = I_n(O_2) \text{ , pour tout } n.$$

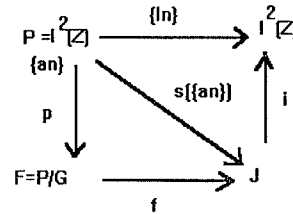
La définition donnée par Crimmins[5] est la suivante :

Définition 7 : Une famille $\{I_n\}$ de scalaires est dite complète si et seulement si:

O_1 et O_2 sont deux objets de même forme F \iff

$$I_n(O_1) = I_n(O_2) \text{ pour tout } n.$$

Proposition 1 : S'il existe une famille d'invariants alors le diagramme suivant est commutatif:



p est la projection canonique, i est l'injection canonique, J est l'espace des invariants.

La proposition 1 montre que la propriété de complétion introduite par Crimmins se traduit par le fait que la fonction f est une bijection, ce qui permet une identification point par point de l'espace des formes avec l'espace des invariants.

III. NOTION DE STABILITE:

La proposition 1 met en évidence le fait que la propriété de complétion est purement algébrique. Ainsi, si l'on voulait introduire la notion de proximité ou de distance entre formes, il faudrait préciser les topologies de chaque espace intervenant dans le diagramme de la proposition 1.

Ainsi, nous proposons de définir la stabilité de la manière suivante:

Définition 8 : On dit qu'une famille d'invariants est stable si et seulement si la fonction f définie dans la proposition 1, est continue.

La continuité est la propriété qui conserve les voisinages ce qui justifie la définition de la stabilité qu'on s'est donnée. En effet, la stabilité garantit que si deux réalisations d'une famille d'invariants stables sont proches dans le sens de $l^2(\mathbb{Z})$ elles correspondent sûrement à des formes voisines au sens de la topologie quotient. (pour plus de détails sur la question consulter [7]). Dans ce sens nous avons construit une famille d'invariants complète et stable que nous énonçons dans ce théorème :

THEOREME:

Soit g une paramétrisation curviligne normalisée d'un objet O et a_n les coefficients de Fourier de g alors la famille de scalaires à valeurs dans $l^2(\mathbb{Z})$, notée $I_n(f)$ et définie par :

$$I_n(f) = \frac{a_n^0 \cdot a_n^{-1} \cdot a_n^{-2} \cdot a_n^{-3} \cdot a_n^{-4} \cdot a_n^{-5} \cdot a_n^{-6} \cdot a_n^{-7} \cdot a_n^{-8} \cdot a_n^{-9} \cdot a_n^{-10} \cdot a_n^{-11} \cdot a_n^{-12} \cdot a_n^{-13} \cdot a_n^{-14} \cdot a_n^{-15} \cdot a_n^{-16} \cdot a_n^{-17} \cdot a_n^{-18} \cdot a_n^{-19} \cdot a_n^{-20} \cdot a_n^{-21} \cdot a_n^{-22} \cdot a_n^{-23} \cdot a_n^{-24} \cdot a_n^{-25} \cdot a_n^{-26} \cdot a_n^{-27} \cdot a_n^{-28} \cdot a_n^{-29} \cdot a_n^{-30} \cdot a_n^{-31} \cdot a_n^{-32} \cdot a_n^{-33} \cdot a_n^{-34} \cdot a_n^{-35} \cdot a_n^{-36} \cdot a_n^{-37} \cdot a_n^{-38} \cdot a_n^{-39} \cdot a_n^{-40} \cdot a_n^{-41} \cdot a_n^{-42} \cdot a_n^{-43} \cdot a_n^{-44} \cdot a_n^{-45} \cdot a_n^{-46} \cdot a_n^{-47} \cdot a_n^{-48} \cdot a_n^{-49} \cdot a_n^{-50} \cdot a_n^{-51} \cdot a_n^{-52} \cdot a_n^{-53} \cdot a_n^{-54} \cdot a_n^{-55} \cdot a_n^{-56} \cdot a_n^{-57} \cdot a_n^{-58} \cdot a_n^{-59} \cdot a_n^{-60} \cdot a_n^{-61} \cdot a_n^{-62} \cdot a_n^{-63} \cdot a_n^{-64} \cdot a_n^{-65} \cdot a_n^{-66} \cdot a_n^{-67} \cdot a_n^{-68} \cdot a_n^{-69} \cdot a_n^{-70} \cdot a_n^{-71} \cdot a_n^{-72} \cdot a_n^{-73} \cdot a_n^{-74} \cdot a_n^{-75} \cdot a_n^{-76} \cdot a_n^{-77} \cdot a_n^{-78} \cdot a_n^{-79} \cdot a_n^{-80} \cdot a_n^{-81} \cdot a_n^{-82} \cdot a_n^{-83} \cdot a_n^{-84} \cdot a_n^{-85} \cdot a_n^{-86} \cdot a_n^{-87} \cdot a_n^{-88} \cdot a_n^{-89} \cdot a_n^{-90} \cdot a_n^{-91} \cdot a_n^{-92} \cdot a_n^{-93} \cdot a_n^{-94} \cdot a_n^{-95} \cdot a_n^{-96} \cdot a_n^{-97} \cdot a_n^{-98} \cdot a_n^{-99} \cdot a_n^{-100}}{|a_n|_0^n \cdot |a_n|_1^n \cdot |a_n|_2^n \cdot |a_n|_3^n \cdot |a_n|_4^n \cdot |a_n|_5^n \cdot |a_n|_6^n \cdot |a_n|_7^n \cdot |a_n|_8^n \cdot |a_n|_9^n \cdot |a_n|_{10}^n \cdot |a_n|_{11}^n \cdot |a_n|_{12}^n \cdot |a_n|_{13}^n \cdot |a_n|_{14}^n \cdot |a_n|_{15}^n \cdot |a_n|_{16}^n \cdot |a_n|_{17}^n \cdot |a_n|_{18}^n \cdot |a_n|_{19}^n \cdot |a_n|_{20}^n \cdot |a_n|_{21}^n \cdot |a_n|_{22}^n \cdot |a_n|_{23}^n \cdot |a_n|_{24}^n \cdot |a_n|_{25}^n \cdot |a_n|_{26}^n \cdot |a_n|_{27}^n \cdot |a_n|_{28}^n \cdot |a_n|_{29}^n \cdot |a_n|_{30}^n \cdot |a_n|_{31}^n \cdot |a_n|_{32}^n \cdot |a_n|_{33}^n \cdot |a_n|_{34}^n \cdot |a_n|_{35}^n \cdot |a_n|_{36}^n \cdot |a_n|_{37}^n \cdot |a_n|_{38}^n \cdot |a_n|_{39}^n \cdot |a_n|_{40}^n \cdot |a_n|_{41}^n \cdot |a_n|_{42}^n \cdot |a_n|_{43}^n \cdot |a_n|_{44}^n \cdot |a_n|_{45}^n \cdot |a_n|_{46}^n \cdot |a_n|_{47}^n \cdot |a_n|_{48}^n \cdot |a_n|_{49}^n \cdot |a_n|_{50}^n \cdot |a_n|_{51}^n \cdot |a_n|_{52}^n \cdot |a_n|_{53}^n \cdot |a_n|_{54}^n \cdot |a_n|_{55}^n \cdot |a_n|_{56}^n \cdot |a_n|_{57}^n \cdot |a_n|_{58}^n \cdot |a_n|_{59}^n \cdot |a_n|_{60}^n \cdot |a_n|_{61}^n \cdot |a_n|_{62}^n \cdot |a_n|_{63}^n \cdot |a_n|_{64}^n \cdot |a_n|_{65}^n \cdot |a_n|_{66}^n \cdot |a_n|_{67}^n \cdot |a_n|_{68}^n \cdot |a_n|_{69}^n \cdot |a_n|_{70}^n \cdot |a_n|_{71}^n \cdot |a_n|_{72}^n \cdot |a_n|_{73}^n \cdot |a_n|_{74}^n \cdot |a_n|_{75}^n \cdot |a_n|_{76}^n \cdot |a_n|_{77}^n \cdot |a_n|_{78}^n \cdot |a_n|_{79}^n \cdot |a_n|_{80}^n \cdot |a_n|_{81}^n \cdot |a_n|_{82}^n \cdot |a_n|_{83}^n \cdot |a_n|_{84}^n \cdot |a_n|_{85}^n \cdot |a_n|_{86}^n \cdot |a_n|_{87}^n \cdot |a_n|_{88}^n \cdot |a_n|_{89}^n \cdot |a_n|_{90}^n \cdot |a_n|_{91}^n \cdot |a_n|_{92}^n \cdot |a_n|_{93}^n \cdot |a_n|_{94}^n \cdot |a_n|_{95}^n \cdot |a_n|_{96}^n \cdot |a_n|_{97}^n \cdot |a_n|_{98}^n \cdot |a_n|_{99}^n \cdot |a_n|_{100}^n} \quad \forall p, q, r \in \mathbb{R}_+, n \in \{0, n_0, n_1\}$$

$$= 0 \quad \text{si } n = n_0 \text{ ou } n_1$$

est une famille d'invariants complète et stable par rapport au point de départ sur la courbe et par rapport au groupe des similitudes.

La démonstration du théorème est dans la référence [7].

IV. APPLICATION AUX CODES POSTAUX :

Comme la famille d'invariants I_n est à valeurs dans $l^2(\mathbb{Z})$, cette suite converge rapidement vers 0 et, numériquement, on peut considérer que la suite s'annule à partir d'un certain rang D . Ainsi nous pouvons considérer que la famille I_n se réduit à un vecteur $X=(I_1, I_2, \dots, I_D)$ de \mathbb{R}^D pour $p = q = r = 1$.

Afin d'illustrer l'intérêt de ce formalisme, nous avons créé un échantillon de chiffres manuscrits [fig1.], formé de quatre classes de nombre ("1", "2", "3" et "4") qui nous a permis de vérifier que les dispersions sont conservées lors du passage de l'espace des formes vers l'espace des invariants grâce à la stabilité des familles d'invariants.

V. CONCLUSION :

Nous avons pu munir les familles d'invariants d'une propriété supplémentaire, la stabilité, grantissant des dispersions statistiques équivalentes lors du passage de l'espace des formes vers l'espace des invariants, dans le cas des formes se résumant en leur contour. Le critère de stabilité peut être défini pour les formes à niveau de gris. Cependant, la vérification d'une telle propriété dans ce cas devient une tâche difficile par la complexité des êtres mathématiques mis en jeux [7]. Toutefois, la complétion semble une propriété intéressante mais non nécessaire, car si la

stabilité n'est pas vérifiée le nuage de point correspondant à une meme classe de formes trouvera délocalisé dans l'espace des invariants. Cela exige l'utilisation d'un critère d'analyse discriminante complexe et couteux en temps de calcul (distance de Patrick-Fischer), lors d'un apprentissage statistique pour la conception du classifieur par exemple [7]. Enfin, ce type d'approche est riche par ses applications en vision robotique ou en imagerie médicale surtout s'il est possible de l'étendre à certains problèmes de descriptions tridimensionnelles [8].

VI. REFERENCES :

[1] F. Ghorbel et al. "Similarity invariant analysis of handwritten ZIP code using Fourier Descriptors: a statistical approach," à praître dans International Journal of Research and Engineering, postal application.

[2] F. Ghorbel et al. "Automatic control of lamellibranch larva growth using contour invariant feature extraction," Pattern Recognition, Vol 23, N°2, Mars 1990.

[3] C. T. Zhan et al "Fourier Descriptors for plane closed curves," in IEEE Trans. Computers, Vol C-21, n°3, 1972, pp. 261-281.

[4] E. Persoon et al. "Shape discrimination using Fourier Descriptors," in IEEE Trans. Computers, Vol C-21, N°3, pp. 269-81, 1972.

[5] T. R. Crimmins "A complet set of Fourier Descriptors for two-dimensional Shapes" IEEE Trans., SMC-12, N°6, pp. 48-855, Novembre/Décembre 82.

[6] F. Ghorbel et al "Estimateur à noyau tenant compte du type de support de la densite de probabilité" XXIII Journées de statistique, pp 175-177, Strasbourg 1991.

[7] F Ghorbel "Vers une approche mathématique unifiée des aspects géométriques et statistiques de la reconnaissance de formes planes," thèse de doctorat, université de Rennes I, 1990.

[8] V. Burdin et al "A geometrical analysis for data compression of 3D anatomical structured", in curves and Surfaces, P.J. Laurent, A. Le Méhauté et L.L. Schaumeker (Eds). Academic press, New York, 1991, PP. 57-63.

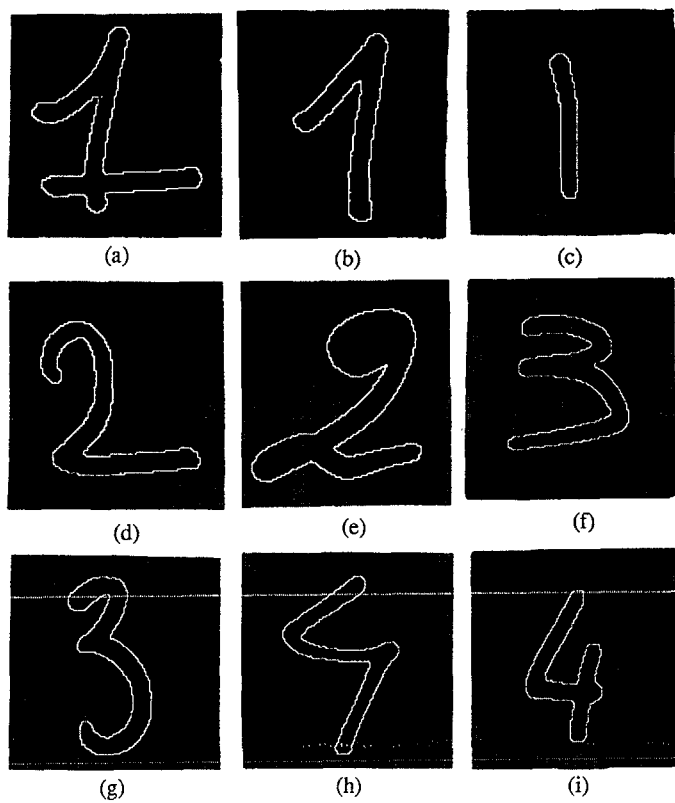


Figure 1