

Dimensions et Caractérisation de Signaux Chaotiques

Sergio Ciliberto et Patrick Flandrin

Ecole Normale Supérieure de Lyon

Laboratoire de Physique (URA 1325 CNRS)

46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07

et

GdR 0134 CNRS *Traitement du Signal et Images*

Résumé

Abstract

Lorsqu'un signal présente des fluctuations irrégulières, une question importante est de savoir dans quelle mesure ces dernières résultent d'un mécanisme intrinsèquement aléatoire ou, au contraire, du régime chaotique d'un système déterministe à petit nombre de degrés de liberté. Diverses méthodes ont été proposées récemment pour apporter des éléments de réponse à cette question en utilisant des grandeurs telles que dimensions ou exposants caractéristiques. On se propose dans cette communication de présenter quelques problèmes d'estimation liés à de telles méthodes, l'accent étant plus particulièrement mis sur celles utilisant des informations de dimensions.

When dealing with a signal which undergoes a very irregular behavior, a key question is to know whether the observed fluctuations can be considered as resulting from a basically stochastic mechanism or, on the contrary, as due to the chaotic regime of a deterministic system with few degrees of freedom. Various methods have been proposed in a recent past for providing partial answers to this question by means of quantities such as dimensions or characteristic exponents. The purpose of this paper is to present some estimation problems related to such methods, with special emphasis on dimension-based techniques.

1 Introduction

Traditionnellement, les signaux sont rangés dans deux grandes catégories : *déterministes* ou *aléatoires*. Cette séparation repose en fait souvent sur des propriétés de reproductibilité et de prédictibilité, le caractère aléatoire d'un signal irrégulier étant volontiers associé à un comportement induit par un système générateur à grand nombre de degrés de liberté. Il s'avère cependant qu'un comportement irrégulier peut également être le fruit de l'évolution d'un système non-linéaire à petit nombre de degrés de liberté : on parle alors de *chaos* et de *signaux chaotiques* [1] [2] [3]. Quoiqu'associés à une dynamique parfaitement déterministe (au sens où des conditions initiales *strictement* identiques conduiraient à des évolutions identiques), une caractéristique des signaux chaotiques est leur *sensibilité aux conditions initiales*, selon laquelle deux initialisations infinitésimalement voisines conduisent à des trajectoires exponentiellement divergentes, et donc à des signaux d'allures totalement différentes.

Loin d'être une situation exceptionnelle, le chaos se rencontre dans un grand nombre de situations concrètes [1], ce qui a amené à développer des outils spécifiques destinés à sa caractérisation. Un des points importants relatifs à ces questions est de valider une discrimination

chaos vs bruit dans le cas de signaux expérimentaux : c'est cette problématique qui est présentée dans cette communication. Sans avoir la prétention de fournir un état de l'art sur le sujet, on se propose de donner des éléments de réponses par l'intermédiaire de *dimensions* utilisées comme descripteurs des signaux.

2 Attracteurs et invariants

(On ne donne ici que quelques brefs rappels, renvoyant à [3] ou [5] pour plus de détails.)

Les signaux (chaotiques) auxquels on s'intéresse ici correspondent à une situation de régime permanent qui n'est ni périodique ni quasi-périodique. Leur évolution temporelle est d'allure erratique et leur spectre à large bande, cette dernière caractéristique n'étant évidemment pas suffisante pour valider une hypothèse de chaos.

Les signaux chaotiques résultent de l'évolution déterministe d'un système dont la trajectoire dans l'espace des phases est inscrite sur un ensemble de volume nul appelé *attracteur*. Si l'on dispose de l'attracteur associé à un signal et si l'on est capable de le recouvrir à l'aide d'un nombre (minimum) $N(\epsilon)$ d'hypercubes d'arête ϵ , la



quantité

$$D_C = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon},$$

appelé *capacité*, fournit une information sur la *dimension* de l'attracteur. Cette dimension n'est pas nécessairement entière, le caractère *fractal* de l'attracteur (dit *étrange* d'un système chaotique provenant conjointement de son confinement dans l'espace des phases et de la sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, une dimension d'attracteur faible et non-entière peut être révélatrice d'un chaos déterministe à petit nombre de degrés de liberté.

D'autres définitions de dimensions existent, pour compléter la caractérisation d'un attracteur. On peut en particulier aller au-delà du caractère purement topologique de la capacité en tenant compte des probabilités p_i avec lesquelles chacun des $N(\epsilon)$ hypercubes est visité. Ceci conduit aux notions de *dimension d'information*

$$D_I = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{- \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \log p_i}{\log \epsilon}$$

et de *dimension généralisée*

$$D_q = - \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \left(\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q \right)}{\log \epsilon},$$

avec, entre autres, l'inégalité $D_I \leq D_C$.

Enfin, une des caractéristiques primordiales du chaos étant la sensibilité aux conditions initiales, il est intéressant de chiffrer la façon dont des points initialement voisins sur l'attracteur s'écartent au cours du temps. Si l'on considère, en un temps origine $t = 0$, une sphère de rayon infinitésimal $\epsilon(0)$ centrée en un point quelconque de l'attracteur, elle se déformera au cours de l'évolution en une ellipsoïde d'axes principaux $\epsilon_i(t)$ associés à des directions contractantes (si $\epsilon_i(t) < \epsilon(0)$) ou dilatantes (si $\epsilon_i(t) > \epsilon(0)$). Par suite, les *exposants de Lyapunov*

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \left(\frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon(0)} \right)$$

fournissent, lorsqu'ils sont positifs, une information sur la divergence des trajectoires. Ils permettent par ailleurs de définir une dimension (*de Lyapunov* au sens de Kaplan et Yorke) selon

$$D_{KY} = k + \frac{1}{|\lambda_{k+1}|} \sum_{j=1}^k \lambda_j,$$

où k est le plus grand indice tel que la somme partielle, jusqu'à k , des exposants de Lyapunov rangés par ordre décroissant soit positive. On a alors $D_I \leq D_{KY}$.

3 Estimations de dimensions

Lorsque l'on dispose de signaux expérimentaux à partir desquels on cherche à mettre évidence le caractère chaotique ou non du système qui les a produits, il faut pouvoir étudier l'attracteur du système (et en particulier sa (ou ses) dimension(s)) dans un espace des phases convenablement défini.

3.1 Reconstruction d'un espace des phases

Pour définir un espace des phases à p dimensions, p grandeurs indépendantes sont nécessaires. Une première possibilité est de disposer simultanément de p points de mesures différents, ce qui souvent n'est pas possible. Dans le cas extrême où un signal $x(t)$ est mesuré en un seul point, une solution est cependant envisageable [4]. Elle utilise un espace reconstruit (à partir des seules données observées) par la *méthode des retards*, i.e. constitué par la collection

$$x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (p-1)\tau),$$

où τ est un retard élémentaire. Dans la mesure où la dimension de reconstruction p est telle que $p \geq 2D + 1$ (D étant la dimension de l'attracteur), il y a équivalence topologique entre les trajectoires d'évolution du système dans les deux espaces des phases, réel et reconstruit.

Si l'on suppose que l'irrégularité observée du signal peut s'expliquer par la dynamique chaotique d'un système déterministe à petit nombre de degrés de liberté, la dimension de l'attracteur associé est finie et faible. Par suite, si l'on est capable de mesurer cette dimension dans des espaces reconstruits de dimensions croissantes, une signature du chaos se traduira par l'existence d'une saturation dans les estimées successives. Le problème se trouve ainsi ramené à celui du calcul de la dimension de l'attracteur dans un espace des phases reconstruit.

3.2 Dimension de corrélation

On se donne un signal à temps discret (i.e. une suite d'observations $x_n, n = 1, 2, \dots, N$) à partir duquel on élabore, selon la méthode des retards, une trajectoire

$$\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i+d}, \dots, x_{i+(p-1)d}); i = 1, 2, \dots, N - (p-1)d$$

dans des espaces des phases reconstruits de dimensions p croissantes.

L'ensemble des N observations x_n conduisant à des points \mathbf{X}_i de \mathbb{R}^p situés sur l'attracteur, la répartition mutuelle de ces points renseigne sur la géométrie de ce dernier. Ainsi, si l'on définit la *fonction de corrélation intégrale* [6]

$$C_N(r; p) = \frac{1}{N_{pd}(N_{pd} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{pd}} \sum_{j=1, j \neq i}^{N_{pd}} U(r - \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|),$$

où $N_{pd} = N - (p-1)d$ et $U(\cdot)$ est l'échelon unité, on obtient une mesure du nombre moyen de points de l'attracteur situés à l'intérieur d'une hypersphère de rayon r entourant un point quelconque. Par suite, si la dimension de reconstruction est suffisante, le caractère fractal de l'attracteur conduit à un comportement en loi de puissance à petite échelle :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N(r; p) \sim r^D, r \rightarrow 0, p \geq 2D + 1.$$

Ainsi, en évaluant la pente (dans le domaine de linéarité) de $\log C_N(r; p)$ en fonction de $\log r$, on a accès à

une dimension, dite *dimension de corrélation* (on montre en fait qu'il s'agit de la dimension généralisée D_2 , au sens de la Section 2), pour chaque dimension de reconstruction.

D'un point de vue pratique, la mise en œuvre de cette méthode (algorithme de Grassberger-Procaccia) nécessite la spécification d'un certain nombre de paramètres comme le retard élémentaire d , la période d'échantillonnage ou le domaine de rayons dans lequel un ajustement linéaire est valide. On trouvera dans [5] une discussion détaillée de ces différentes questions, ainsi que des indications sur l'influence d'un bruit de mesure additif quant à l'estimation. En première approximation, on peut retenir deux points :

- rapporté à un temps caractéristique du signal comme son rayon de corrélation, le retard d ne doit être choisi ni trop petit, ni trop grand. Dans le premier cas, la trop grande corrélation temporelle concentrera artificiellement l'attracteur reconstruit le long de la diagonale principale de l'espace des phases, la dimension estimée tendant alors vers 1. Dans le second cas, la trop grande décorrélation tendra à remplir plus ou moins uniformément l'espace, se rapprochant ainsi d'une situation de bruit aléatoire. Une règle commune est de ne pas sur-échantillonner le signal et de prendre une "taille de fenêtre" $(p-1)d$ dont l'ordre de grandeur est voisin du rayon de corrélation. Il est clair que ce choix n'est pas suffisant pour assurer que l'espace des phases reconstruit soit défini sur des variables *indépendantes*. Une détermination objective plus globale est possible en introduisant un critère de *minimisation d'information mutuelle* [8].
- de façon à soulager les calculs importants mis en jeu dans l'évaluation d'une corrélation intégrale, la double somme se réduit en général à

$$\frac{1}{M(N_{pd}-1)} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^{N_{pd}} U(r - \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|),$$

avec $M \ll N_{pd}$. Le paramètre prépondérant est alors le nombre $M(N_{pd}-1)$ de distances calculées, qui doit être suffisamment grand pour permettre de disposer, à petite échelle, d'un nombre de points statistiquement significatif.

L'algorithme de Grassberger-Procaccia nécessite de disposer d'un très grand nombre d'échantillons (typiquement quelques dizaines ou centaines de milliers) et, même dans ces cas, son usage est limité à des dimensions d'attracteurs faibles (typiquement quelques unités). Il est par ailleurs assez sensible à un bruit de mesure additif [5], le comportement à petite échelle tendant à être contrôlé par le bruit, même à fort rapport signal/bruit.

Ceci a suggéré à certains auteurs [10] [9] de prétraiter les données avant de leur appliquer l'algorithme. A cette fin, une possibilité est de décomposer la matrice (des trajectoires reconstruites)

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{N-(p-1)d})^T$$

en valeurs singulières et d'appliquer l'algorithme de Grassberger et Procaccia après changement de base, en faisant

usage d'une famille propre de vecteurs décorrés, i.e. *linéairement* indépendants.

3.3 Dimension de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov fournissent une mesure de chaos liée à la divergence des trajectoires relatives à des points initialement proches (sensibilité aux conditions initiales). Une façon d'y accéder est de caractériser localement l'évolution non-linéaire du système par une famille d'applications linéaires tangentes [3].

Supposons que l'on dispose d'une trajectoire \mathbf{X}_i comme en 3.2 (on supposera en outre que $d = 1$). Celle-ci est censée suivre une équation du type

$$\mathbf{X}_{i+1} = f(\mathbf{X}_i),$$

où f est une application non-linéaire décrivant la dynamique du système. On cherche alors, en tout point \mathbf{X}_i , une approximation linéaire locale au moyen d'une matrice \mathbf{T}_i telle que des vecteurs suffisamment proches soient envoyés en des points eux-mêmes voisins. Pour ce faire, on impose que

$$\mathbf{T}_i(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) \approx \mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_{i+1},$$

la matrice \mathbf{T}_i étant estimée par une méthode de moindres carrés sur l'ensemble des \mathbf{X}_j tels que $\|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\| \leq r$ et $\|\mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_{i+1}\| \leq r$, r étant une mesure du voisinage (rayon de l'hypersphère centrée en \mathbf{X}_i).

Si l'on répète l'opération en K points $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K$, on dispose alors de K matrices et, par factorisation QR , leur cascade peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{T}_K \mathbf{T}_{K-1} \dots \mathbf{T}_1 = \mathbf{Q}_K \mathbf{R}_K \mathbf{R}_{K-1} \dots \mathbf{R}_1.$$

On montre alors [3] que les exposants de Lyapunov (rangés par ordre décroissant), sont donnés par

$$\lambda_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \log r_{ii}(k),$$

$r_{ii}(k)$ désignant le i -ème élément diagonal de la matrice triangulaire supérieure \mathbf{R}_k .

3.4 Dimension et rang

Les méthodes considérées dans les paragraphes précédents consistent essentiellement à estimer une dimension fractale liée à la géométrie de l'attracteur, et à s'en servir pour caractériser la dimensionnalité (en termes de nombre de degrés de liberté) du système ayant généré le signal observé. Par construction cependant, ces méthodes ne sont applicables que si l'on dispose d'un très grand nombre de données et si le nombre de degrés de liberté est faible (quelques unités). Elles sont de plus très coûteuses en temps de calcul.

Une autre voie d'approche est alors possible: elle consiste à s'intéresser à la structure propre de matrices \mathbf{Y} déduites de \mathbf{X} , la matrice associée à la trajectoire (éventuellement reconstruite) dans l'espace des phases, et à ramener le problème d'estimation de dimensionnalité à une évaluation du rang de celles-ci.



L'approche la plus générale consiste à effectuer une *décomposition en valeurs singulières* de \mathbf{Y} selon

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T,$$

ou, ce qui revient au même, une décomposition propre au sens de *Karhunen-Loève* de $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$ et $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$. Le nombre des valeurs singulières prépondérantes de Σ fournit alors une indication sur les relations de dépendance linéaire qui existent entre lignes ou colonnes de \mathbf{Y} .

On peut envisager deux cas de figure :

- si \mathbf{X} est une matrice $N \times p$ formée de p séquences d'observations mesurées en des points différents (c'est le cas lorsque l'on s'intéresse à la dynamique spatiale d'un champ spatio-temporel), la matrice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ est une mesure de corrélation spatiale, moyennée sur le temps. Par suite, sa diagonalisation fournit une information sur l'organisation spatiale du champ, en termes de dépendance linéaire [11] [12] [13]: le nombre de valeurs propres significatives de $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ (ou de valeurs singulières de $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$) renseigne sur le nombre de degrés de liberté du système.
- si la matrice ($N \times p$) \mathbf{X} provient d'une technique de reconstruction (ou de p mesures différentes, sans référence à une dynamique spatiale), c'est la matrice $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ qui fournit une information sur la corrélation qui existe entre différents points situés sur l'attracteur.

Comme dans le cas de l'estimation des exposants de Lyapunov, il est possible d'extraire une information utile d'une approximation linéaire en travaillant localement. Une technique [14] est de sélectionner, aléatoirement sur l'attracteur, un nombre M de points \mathbf{X}_i que l'on considère comme centres d'hypersphères. Pour chacun de ces centres, on extrait de \mathbf{X} la sous-matrice ($q \times p$) formée des q plus proches voisins $\mathbf{X}_{i(q)}$ de \mathbf{X}_i . Par décomposition en valeurs singulières, on estime alors le rang de la matrice locale

$$\mathbf{Y}(i) = (\mathbf{X}_{i(1)} - \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i(2)} - \mathbf{X}_i, \dots, \mathbf{X}_{i(q)} - \mathbf{X}_i)^T$$

et la dimension recherchée est fournie par la moyenne de ces rangs locaux estimés sur les M centres choisis.

Bien que ces approches ne soient que partiellement étayées par un support théorique, elles présentent l'avantage de fournir des résultats souvent comparables à ceux obtenus par le calcul de la dimension de corrélation ou de Lyapunov [13], et ce à un coût bien moindre. Elles permettent également d'accéder à des dimensions plus élevées.

Leurs limitations principales sont au nombre de deux. D'une part, elles reposent de manière fondamentale sur des concepts *linéaires* de transformation et d'indépendance, ce qui n'épuise pas l'information contenue dans les signaux chaotiques et suggère de recourir à des caractérisations plus globales en termes d'information mutuelle [8] ou de statistiques d'ordres supérieurs [16]. D'autre part, elles nécessitent de façon critique de disposer

d'une procédure d'estimation de rang, ce qui implique de mettre en œuvre des critères d'ordre [15], avec la difficulté que cela présente.

4 Chaos vs bruit

Afin d'illustrer le comportement de certaines des méthodes présentées précédemment et de discuter de leur capacité à faire une distinction entre chaos et bruit, il est commode de disposer d'un exemple simple et connu d'évolution chaotique. Un exemple classique est fourni par le *système de Hénon* [1], i.e. par la récurrence non-linéaire

$$x_n = 1 - 1.4x_{n-1}^2 + 0.3x_{n-2},$$

dont on sait que l'attracteur est de dimension théorique 1.21.

La Figure 1-a présente le résultat fourni par l'algorithme de Grassberger-Procaccia sur un tel signal. Il fait clairement apparaître un réseau de droites parallèles de pente moyenne 1.2, en bon accord avec la théorie.

L'analyse du même signal par décomposition en valeurs singulières des sous-matrices de plus proches voisins et estimation du rang (cf. Section 3.4) conduit au spectre moyen donné en Figure 1-b. Le critère retenu dans ce cas est de choisir pour rang de chaque sous-matrice $\mathbf{Y}(i)$ l'indice k associé à la première valeur singulière $\sigma_j(i)$ telle que

$$\sum_{j=1}^k \sigma_j^2(i) \geq \alpha \sum_{j=1}^p \sigma_j^2(i),$$

où α est un seuil que l'on a fixé ici arbitrairement à 0.8.

Le comportement observé pour ces deux méthodes dans le cas du signal chaotique de Hénon contraste avec celui que l'on peut obtenir avec un *bruit blanc*, prototype de signal considéré comme aléatoire. C'est ce qui ressort de la Figure 2. Dans la Figure 2-a, l'analyse de Grassberger-Procaccia montre une évolution continue de la pente (et donc de la dimension estimée) lorsque la dimension de reconstruction augmente. La Figure 2-b traduit quant à elle différemment la même réalité en fournissant une moyenne des rangs estimés significativement plus grande que dans l'exemple précédent. On constaterait de plus que, en augmentant la dimension de reconstruction, la dimension estimée tend elle aussi à croître, tout comme dans le cas de la corrélation intégrale.

Le bruit blanc étant sans doute une idéalisation excessive, il est intéressant de s'interroger sur le comportement de ces mêmes analyses dans le cas de bruits qui soient davantage structurés, tout en restant aléatoires. Peu de résultats existent en fait dans cette direction. On trouvera dans [17] une étude du comportement de l'algorithme de Grassberger-Procaccia dans le cas de processus ARMA. Il en ressort essentiellement que le comportement associé au bruit blanc reste qualitativement le même pour un bruit coloré, du moins tant que la fonction de corrélation reste à décroissance suffisamment rapide. Un cas typique de bruit coloré dont la fonction de corrélation est à décroissance lente (en loi de puissance, par opposition à la décroissance exponentielle du cas ARMA) est celui des bruits dits "en $1/f$ ". Ce cas a été étudié dans [18] en se référant à la classe

des processus Browniens fractionnaires, indexés par un paramètre H tel que $0 < H < 1$, le mouvement brownien ordinaire correspondant au cas particulier $H = 1/2$. Bien que, dans ce cas, l'on ait affaire à des processus aléatoires associés théoriquement à une infinité de degrés de liberté, l'étude de la corrélation intégrale au sens de Grassberger-Procaccia conduit, lorsque l'on augmente la dimension de reconstruction, à une dimension estimée d'attracteur saturant à la valeur $1/H$. Ceci est illustré en Figure 3-a dans le cas d'un processus de Wiener-Lévy où, à la différence de [18] qui utilise des tirages indépendants, la trajectoire est reconstruite sur un seul tirage avec la méthode des retards. Comme attendu, la valeur $H = 1/2$ choisie conduit bien à une dimension estimée saturant au voisinage de $1/H = 2$. A titre de comparaison, la Figure 3-b montre ce qui passe pour la dimension déduite des rangs : là encore, la faible valeur estimée pourrait tendre à faire croire en la présence d'un régime chaotique à petit nombre de degrés de liberté.

Cet exemple illustre le fait que, si un signal est chaotique, une mesure de dimension d'attracteur pourra en révéler le caractère mais qu'inversement, la seule observation d'une faible dimension estimée n'est pas nécessairement la signature d'un chaos déterministe. Dans l'exemple des bruits en $1/f$, d'autres indices seraient à prendre en compte, comme le fait que les signaux eux-mêmes (et pas seulement l'attracteur associé) ont une structure fractale et une dimension $2 - H$.

5 Conclusion

L'analyse des signaux chaotiques et leur caractérisation mettent en jeu des grandeurs spécifiques relatives à la dynamique du système qui les a produits. Parmi celles-ci figurent en premier lieu les informations de dimensions, susceptibles de révéler une structure de chaos déterministe derrière une évolution apparemment aléatoire.

Par-delà leur définition, les dimensions posent un problème d'estimation pour lequel plusieurs solutions ont été proposées. Un point commun des méthodes les mieux fondées théoriquement (dimension de corrélation, dimension de Lyapunov) est d'être extrêmement coûteuses en calcul et de nécessiter un très grand nombre de données. Des méthodes plus légères (comme celles basées sur des études de rang) sont cependant envisageables et révèlent empiriquement un assez bon accord avec les précédentes.

Références

- [1] P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, *L'Ordre dans le Chaos*, Hermann, Paris, 1984.
- [2] P. Bergé (ed.), *Le Chaos*, Eyrolles, Paris, 1988.
- [3] J.P. Eckmann and D. Ruelle, "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 57, No. 3, pp. 617-656, 1985.
- [4] F. Takens, "Detecting Strange Attractors in Turbulence", *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 898, pp. 366-381, 1984.
- [5] P. Atten, B. Malraison, "Caractérisation du chaos déterministe rencontré dans les expériences", in [2], pp. 283-325.
- [6] P. Grassberger, I. Procaccia, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", *Physica D*, Vol. 9, pp. 189-208, 1983.
- [7] A.M. Fraser, H.L. Swinney, "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information", *Phys. Rev. A*, Vol. 33, No. 2, pp. 1134-1140, 1986.
- [8] A.M. Fraser, "Information and Entropy in Strange Attractors", *IEEE Trans. on Info. Theory*, Vol. IT-35, No. 2, pp. 245-262, 1989.
- [9] A.M. Albano, J. Muench, C. Schwartz, A.I. Mees, P.E. Rapp, "Singular-value Decomposition and the Grassberger Algorithm", *Phys. Rev. A*, Vol. 38, No. 6, pp. 3017-3026, 1988.
- [10] D.S. Broomhead, G.P. King, "Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data", *Physica D*, Vol. 20, pp. 217-236, 1986.
- [11] N. Aubry, P. Holmes, J.L. Lumley and E. Stone, "The Dynamics of Coherent Structures in the Wall Region of a Turbulent Boundary Layer", *J. Fluid Mech.*, Vol. 192, pp. 115-173, 1988.
- [12] N. Aubry, R. Guyonnet and R. Lima, "Spatio-Temporal Analysis of Complex Signals - Theory and Applications", preprint CPT-90/P.2437, 1990.
- [13] S. Ciliberto, B. Nicolaenko, "Estimating the Number of Degrees of Freedom in Spatially Extended Systems", *Europhys. Lett.*, Vol. 14, No. 4, pp. 303-308, 1991.
- [14] A. Passamante, T. Hediger, M. Gollub, "Fractal Dimension and Local Intrinsic Dimension", *Phys. Rev. A*, Vol. 39, No. 7, pp. 3640-3645, 1989.
- [15] T. Hediger, A. Passamante, M.E. Farrell, "Characterizing Attractors Using Local Intrinsic Dimensions Calculated by Singular-Value Decomposition and Information-Theoretic Criteria", *Phys. Rev. A*, Vol. 41, No. 10, pp. 5325-5332, 1990.
- [16] A. Passamante, M.E. Farrell, "Characterizing Attractors Using Local Intrinsic Dimension via Higher-Order Statistics", *Phys. Rev. A*, Vol. 43, No. 10, pp. 5268-5274, 1991.
- [17] R.C.L. Wolff, "A Note on the Behaviour of the Correlation Integral in the Presence of a Time Series", *Biometrika*, Vol. 77, No. 4, pp. 689-697, 1990.
- [18] A.R. Osborne, A. Provenzale, "Finite Correlation Dimension for Stochastic Systems with Power-law Spectra", *Physica D*, Vol. 35 pp. 357-381, 1989.

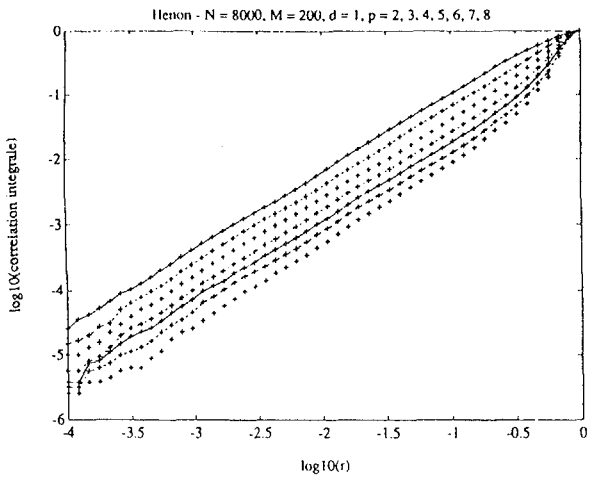


Figure 1-a

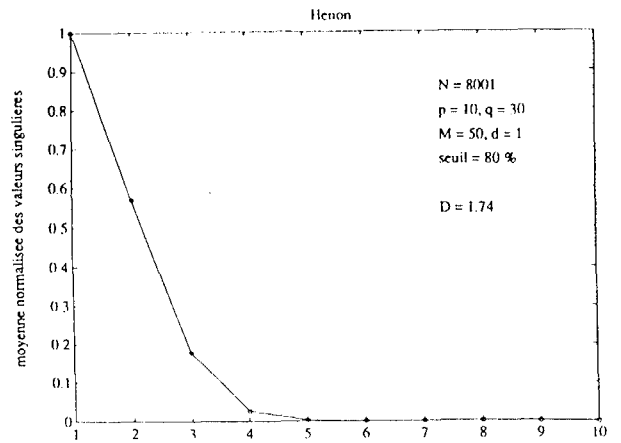


Figure 1-b

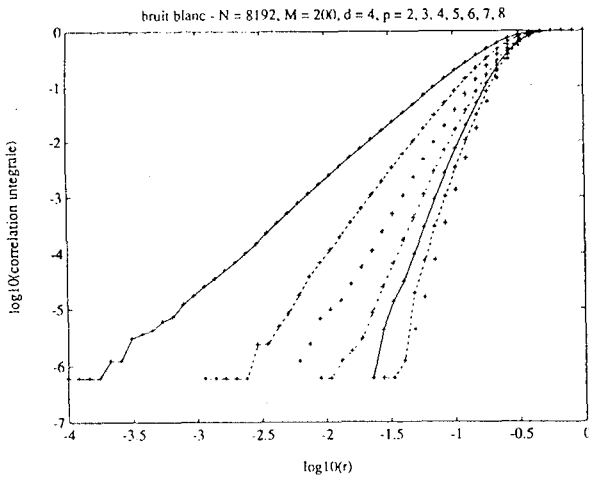


Figure 2-a

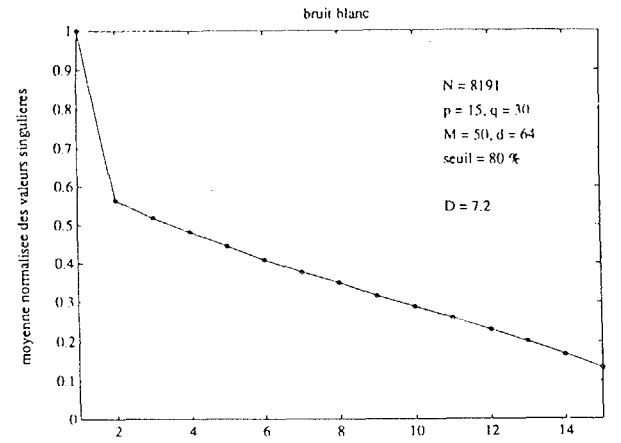


Figure 2-b

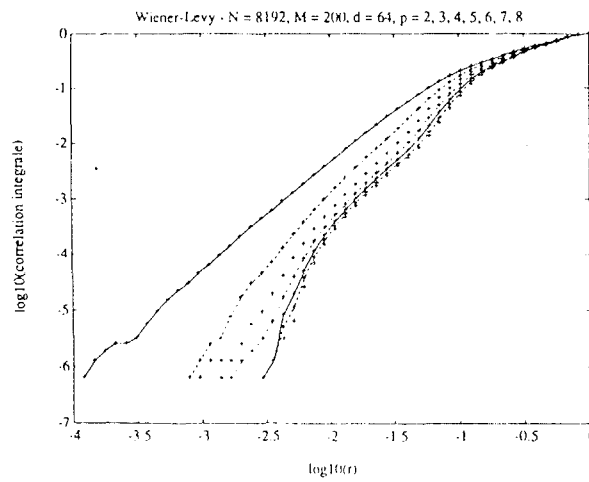


Figure 3-a

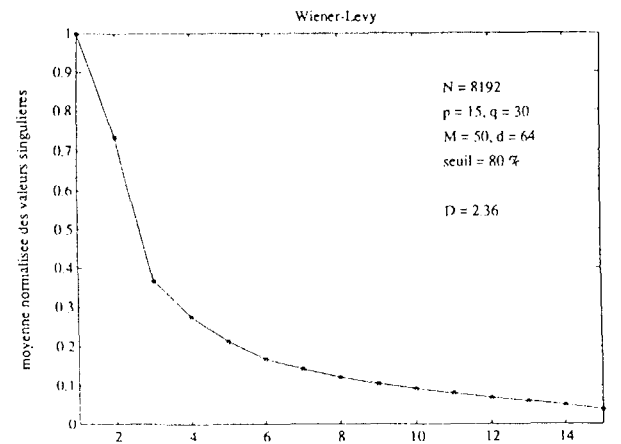


Figure 3-b