

13^{ème} colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images
Juan-les-pins 16-20 septembre 1991

CHAOS ET SIGNAL

C. MIRA

Groupe d'Etude des Systèmes Non Linéaires et Applications

Institut National des Sciences Appliquées
Complexe Scientifique de Rangueil
31077 TOULOUSE CEDEX - FRANCE

I - INTRODUCTION.

Depuis une dizaine d'années l'intérêt pour les modèles mathématiques déterministes, dont les solutions ne possèdent aucun caractère régulier, (baptisées solutions chaotiques), n'a fait que s'amplifier. La plupart des disciplines scientifiques, traitant de phénomènes dynamiques, se sont rapidement senties concernées par les problèmes posés par de tels comportements. L'Electronique, le Traitement du Signal, l'Automatique, figurent parmi les plus récentes de ces disciplines.

L'importance de ces comportements au plan tant fondamental qu'appliqué est maintenant largement reconnu. Déjà en 1984, lors du colloque "Les Systèmes Dynamiques : un mécanisme renouvelé" (centenaire de G.D. BIRKHOFF, PEYRESQ, 28 août - 6 septembre 1984), la notice de présentation annonçait cette situation en mentionnant :

"Dores et déjà la découverte des phénomènes chaotiques abaisse la barrière traditionnelle entre le déterminisme et le hasard, et la variété des situations révélées par l'étude des systèmes non linéaires ouvre de multiples perspectives, y compris à la physique quantique elle-même. Un mécanisme renouvelé se met en place, entraînant la constitution progressive d'une nouvelle vision du monde".

Evoquer un tel sujet implique avant tout une remarque importante : la notion de comportement, ou signal, ou mouvement, chaotique (vocabulaire récent - 1975) recouvre des situations dynamiques différentes qu'il convient de distinguer, et qui étaient connues depuis longtemps. C'est ainsi que dans son livre "Dynamical Systems" (Am. Math. Soc. Colloquium Publications 9, 1966, nouvelle édition de l'ouvrage paru en 1927) G.D. BIRKHOFF écrivait :

"The final aim of the theory of dynamical systems must be directed towards the qualitative determination of all possible types of motions and the interrelations of these motions".

Allant vers cet objectif, ce mathématicien proposait en 1927 une première classification des mouvements dynamiques, qui fut affinée en 1933 par A.A. ANDRONOV avec le diagramme de la figure 1.

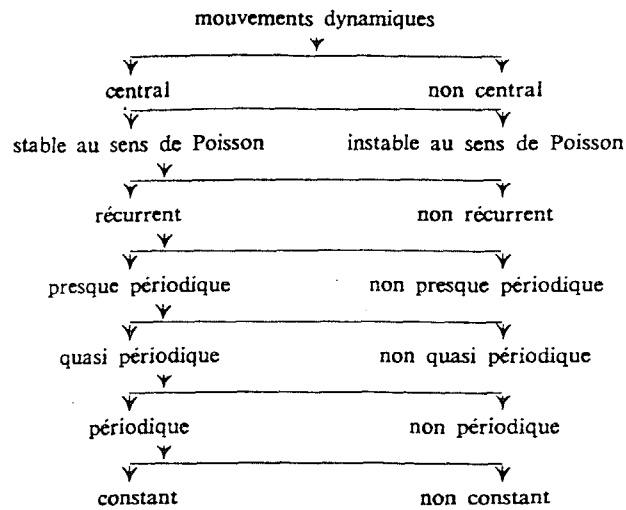


Figure 1

Dans ce diagramme en allant de bas en haut, un accroissement de "complexité structurelle" des mouvements se traduit par une transition graduelle de mouvements ordonnés à des mouvements de plus en plus "chaotiques". Ainsi les mouvements quasi périodiques correspondent à des états stationnaires donnés par $x(t) = \sum_m a_m \cos(\omega_m t + \phi_m)$, ($\max m) < \infty$, toutes les pulsations ω_m étant mutuellement incommensurables. Pour ce type de mouvement il est facile de voir que, même pour $m = 1, 2$, toute prédiction à partir de $x(t)$ devient impossible en pratique dès que t devient suffisamment grand, si l'on considère que les données disponibles (dont dépendent les a_m et ϕ_m) sont d'origine expérimentale, c'est-à-dire connues avec une précision finie. Le mieux que l'on puisse espérer est une prédiction qualitative. Dans le cas des mouvements presque périodiques l'indice m dans $x(t)$ est tel que $m \rightarrow \infty$. Les définitions de "récurrent", "stable au sens de POISSON", "central" peuvent être trouvées dans les ouvrages classiques traitant la théorie des systèmes dynamiques. Plus grossièrement, en considérant la fig. 1 à partir des "mouvements presque périodiques" et allant vers le haut de celle-ci, il est possible de dire qu'on a d'abord des mouvements avec une apparence répétitive, mais sans reproduction évidente dans le temps. Ensuite une oscillation bornée, mais sans apparence répétitive et enfin des mouvements pseudo-aléatoires.

Actuellement il n'y a pas de définition généralement acceptée de "l'état stationnaire chaotique". *En fonction du contexte, on dit qu'un état stationnaire est chaotique quand il est non périodique.* On parle même de mouvement chaotique pour un mouvement périodique très irrégulier sur une période, et pour lequel la durée des observations physiquement possibles est inférieure à cette période. Un tel mouvement est "pratiquement chaotique". En outre, il apparaît généralement que plus la dimension du système dynamique est grande, plus la complexité structurelle de son mouvement s'accroît.

Il faut souligner que *les mouvements considérés ici sont engendrés par des mécanismes purement déterministes.* Les différents "degrés" de chaos apparaissant fig. 1 sont une indication de la complexité de différents types de mouvements dynamiques déterministes donnant naissance en pratique à une difficulté croissante de prédiction, quand on va des mouvements quasi périodiques à ceux qualifiés de centraux et non centraux.

Cette *absence de capacité prédictive* (ou "imprédictibilité") des modèles correspondants est une caractéristique essentielle, des processus chaotiques. Elle sera abordée dans le deuxième paragraphe.

Parmi les processus évolutifs rencontrés dans les différentes disciplines, on peut distinguer ceux pour lesquels les non linéarités entraînent de petits effets, et ceux pour lesquels leur influence est dominante. C'est dans ce dernier cas que le problème de la *transition ordre* \leftrightarrow *désordre* (chaos), sous l'effet de variations de paramètres, ou d'une petite perturbation de structure, qui se traduit par des propriétés caractéristiques de *bifurcation* (changement qualitatif des propriétés d'une solution) pour un modèle, prend une importance particulière. Ces bifurcations, fort diverses, sont de type non classique, et sont la conséquence, dans le sens ordre \rightarrow désordre, de l'accroissement des effets non linéaires.

Une autre cause de désordre concerne le cas où un mouvement collectif macroscopique constitue une manifestation "statistique" d'un grand nombre de mouvements microscopiques, décrits par la même équation, mais correspondant à des conditions initiales différentes. Ces conditions initiales peuvent être situées dans des "cellules" de l'espace de phase correspondant à des modes différents de fonctionnement. Les mouvements issus de ces différentes conditions initiales peuvent alors constituer un mouvement collectif complexe. De telles situations se rencontrent en dynamique des particules chargées, physique des gaz, chimie, dans la théorie du laser (augmentation de l'intensité du faisceau), en propagation d'épidémies. Les mouvements dus à cette cause ne seront pas considérés ici.

Contrairement aux Sciences Physiques, aux Sciences de la vie, et à la Cinétique Chimique, où les comportements chaotiques sont acceptés comme un effet de la "Nature", dans les Sciences de l'Ingénieur ils sont en général indésirables. Paradoxalement ceci renforce la nécessité de leur étude. En effet la connaissance fondamentale des mécanismes de bifurcation, à l'origine du chaos, devient essentielle au niveau de la synthèse pour choisir les paramètres, et les initialisations qui assurent l'absence de ce chaos. Ceci même sous l'effet de modifications d'environnement, ou du vieillissement des composants, ce qui se traduit par des variations de paramètres du processus. La compréhension de ces mécanismes fondamentaux permet alors de remédier à certains comportements défectueux.

Le but de cet article est de fournir, sous forme non abstraite et la plus simple possible, une première connaissance élémentaire des phénomènes chaotiques, susceptibles de concerner les spécialistes du traitement du signal.

Pour cela une première partie est consacrée au caractère imprédictible de ces phénomènes. Le paragraphe suivant traite de l'outil fondamental d'étude des problèmes correspondants, à savoir la récurrence, ou transformation ponctuelle, et de ses différentes formes. Ce type d'équation soit, décrit directement un processus pour lequel l'information est essentiellement disponible sous forme discrète, soit est associé à un processus continu à excitation périodique avec la propriété d'être de dimension inférieure à celle du processus, ce qui en facilite l'étude. Les troisième et quatrième parties définissent les singularités de ces équations et leurs bifurcations élémentaires. Sont introduites les notions de chaos stable, et de chaos instable, et de bifurcations de ces états. La présence de tels comportements implique une structure fractale de l'espace paramétrique (un point représente un vecteur paramètre) et de l'espace de phase (un point représente l'état) du processus. La cinquième partie concerne la caractérisation des comportements chaotiques (mesure invariante, entropie topologique, exposants de LJAPUNOV, dimension fractale). La dernière partie est consacrée aux effets pervers de la discrétisation des processus continus (simulation numérique en particulier), qui peuvent favoriser l'apparition du chaos.

II - CHAOS ET "IMPREDICTIBILITE".

Pour un modèle mathématique, la capacité de prédiction, dans une situation dynamique chaotique, dépend du fait que la solution analytique correspondante est connue exactement, ou approximativement.



Si la solution analytique est exacte, et si toutes les opérations sur les nombres peuvent être exécutées sans erreur (ce qui n'a aucun sens dans la réalité pratique), alors la prédiction est toujours possible. Cette situation idéale est celle rencontrée en mathématiques pures.

Cette prédiction devient difficile, et même impossible, si les nombres caractérisant les paramètres du modèle, et les coefficients de la solution, ainsi que les opérations sur ces nombres sont approchés (précision finie). Cette situation est celle de la réalité pratique, les nombres ayant alors une origine expérimentale. L'exemple le plus simple est celui du mouvement quasi périodique :

$$f(t) = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t,$$

ω_1, ω_2 étant deux pulsations dans un rapport irrationnel. Comme indiqué dans l'introduction le mieux que l'on puisse espérer est une prédiction qualitative, et non quantitative, ou alors en termes de probabilités.

Dans les modèles dynamiques continus, ou discrets, la propriété d'imprédictibilité est liée essentiellement à une *grande sensibilité de la solution par rapport aux conditions initiales*. L'exemple le plus simple qui illustre ce point est celui du modèle discret sous forme de la récurrence quadratique unidimensionnelle :

$$(1) \quad x_{n+1} = f(x_n, \lambda) \equiv x_n^2 - \lambda, \lambda = 2, n = 0, 1, 2, \dots$$

Dans l'intervalle $-2 < x_n < 2$, sa solution, pour l'initialisation $x(n=0) = x_0$, reste bornée et est chaotique, et, fait exceptionnel, s'exprime analytiquement à partir de fonctions transcendentes classiques de l'Analyse Mathématique :

$$(2) \quad x_n = 2 \cos [2^n \arccos (x_0/2)],$$

où une détermination appropriée de (\arccos) est choisie pour chaque condition initiale x_0 . Le chaos est ici engendré par les ordonnées d'une fonction périodique prise à des abscisses exponentiellement croissantes.

La sensibilité de la solution (2), par rapport aux conditions initiales x_0 , peut être définie par le coefficient :

$$(3) \quad S_n = \delta x_n / \delta x_0 = [-2^{n+1} (1 - (x_0/2)^2)^{-1/2} \sin [2^n \arccos (x_0/2)]]$$

Ce coefficient est une fonction de n , en moyenne rapidement croissante à cause du terme 2^{n+1} . Deux conditions initiales très voisines x_0, x'_0 de l'intervalle $[-2, +2]$ engendrent à partir de (1) deux suites bornées, mais la différence $|x_n - x'_n|$ augmente rapidement quand n augmente, pour $n < N$. Pour $n > N$ cette différence cesse d'augmenter et varie de façon désordonnée.

Avec (2) on a un comportement dynamique discret, *intrinsèquement déterministe*, mais donnant une évolution chaotique liée à une *très grande sensibilité à de très petites variations de l'état initial*. Le mécanisme à la base de ce comportement, qui transparait à travers l'exemple simple (1) grâce à la possibilité d'une représentation analytique (exceptionnelle), se reproduit dans des situations équivalentes

avec des récurrences dont le second membre est une fonction non monotone de x_n . La solution est alors une fonction transcendante non classique de l'Analyse Mathématique, et la sensibilité n'est pas aussi transparente. Les problèmes de dimension supérieure ont les mêmes propriétés.

Le segment $-2 \leq x \leq 2$ obtenu à partir de (1) est appelé *segment chaotique*. Il est caractérisé par l'existence dans celui-ci d'une infinité de suites infinies de points singuliers répulsifs (instables) présentant une organisation *fractale* (le tout est semblable aux parties même infinitésimales). Ces singularités sont associées à des états stationnaires qui seront définis ci-dessous dans le § 4.

Dans le cas général, quelle que soit la nature du modèle ou du processus (continu ou discret), l'existence d'une *infinité d'états stationnaires instables* est l'une des caractéristiques de comportements chaotiques à origine déterministe. Ceux-ci peuvent être stables et donnent alors lieu à des *attracteurs étranges (états stationnaires stables)*. Ils peuvent être aussi *instables* et correspondent alors à des *répulseurs étranges*. Là deux situations dynamiques différentes sont possibles. La première est celle du *transitoire chaotique* vers un seul état stationnaire stable. La seconde est celle d'une *frontière floue* (ou *frontière fractale*), séparant dans un espace de phase (ou d'état) les domaines d'influence (appelés bassins) de m états stationnaires stables $m > 1$.

Une initialisation dans une zone de frontière floue conduit à une incertitude sur la convergence de l'état du modèle, ou du processus, vers l'un des m états stationnaires, après un transitoire chaotique qui dure tant que l'état n'a pas quitté la région de frontière floue. Dans le cas du transitoire chaotique vers un seul état stationnaire stable, on se trouve devant la propriété surprenante suivante : une prédiction à court terme est difficile, mais à long terme elle ne pose aucun problème, car le transitoire finit par converger vers le seul état stationnaire stable qui souvent est non chaotique.

En présence de comportements dynamiques désordonnés (qui selon les auteurs sont appelés chaotiques, ou stochastiques), observés expérimentalement, une question fondamentale se pose : *quelles sont les propriétés qui caractérisent l'existence d'une source déterministe*, cachée par la précision finie des observations ? Il y a là un problème non encore complètement résolu.

III - RECURRENCE OU TRANSFORMATION PONCTUELLE.

III.1 - FORMES DES EQUATIONS.

Soit directement, soit indirectement, certains systèmes dynamiques conduisent à une formulation où la variable temporelle t ne varie plus continûment, mais correspond à une suite d'entiers n (temps discret) avec l'une des représentations vectorielles ($\dim X = p$) :

$$(4) \quad X_{n+1} = F(X_n, \lambda),$$

$$(5) \quad X_{n+1} = F(X_n, \gamma_n, \lambda), \quad g(X_n, \gamma_n, \lambda) = 0,$$

$$(6) \quad H(X_{n+1}, X_n, \lambda) = 0,$$

$$(7) \quad H_i(X_{n+1}, X_n, V_n, \lambda) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s + 1, \dim V = s,$$



λ étant un vecteur représentant les paramètres du système, le vecteur X_n représentant son état aux instants discrets $n = 0, 1, 2, \dots$. Si les fonctions F, H, H_i ont une forme indépendante de n , on dit que l'on a affaire à un système *autonome*. Si leur forme dépend de n , par exemple $F \equiv F_n = F(X_n, \lambda, n)$, le système est alors dit *non autonome*.

Selon les auteurs les équations (4) - (7) sont appelées *réurrences, itération*, et parfois par abus de langage équations aux différences finies. Elles sont aussi nommées *transformations ponctuelles*, ou simplement *transformations T*, un point X_n étant transformé en un point X_{n+1} par application de l'une des relations (4) - (7) dont la représentation symbolique s'écrit :

$$(8) \quad X_{n+1} = T X_n$$

L'équation (4) a une *forme explicite*. Nombre de systèmes dynamiques, tels que les systèmes à données échantillonnées avec période d'échantillonnage dépendant de l'état, certains systèmes de commande à modulation d'impulsions (modulation de largeur, modulation de fréquence, cf. [2] p. 348-356, 366-370, les redresseurs de courant alternatif à thyristors à contre réaction de tension, ou de courant ([2] p. 370-387), conduisent à une équation telle que (5), où γ_n est une *variable auxiliaire* qui dépend de X_n à travers $g(X, \gamma, \lambda) = 0$. γ_n peut être l'intervalle de temps qui sépare les instants notés n et $n + 1$, et $g(X, \gamma, \lambda)$ peut être une expression intégrale dont l'une des bornes est γ (par exemple modulation IPFM, Integral Pulse Frequency Modulation). L'équation (6) a une *forme implicite*. L'équation (7) est une *forme implicite avec variable auxiliaire vectorielle*.

Dans les formes (5) - (7), la résolution de $g = 0$ par rapport à γ , de $H = 0, H_i = 0$ par rapport à X_{n+1} conduit en général à *plusieurs déterminations*. Dans un problème d'ingénieur, des conditions sont ajoutées pour fixer le choix sur la *détermination qui a un sens physique*.

III.2 ORIGINE DE TELLES EQUATIONS.

Lorsque l'information disponible sur un processus est essentiellement discrète une transformation telle que (8) décrit *directement* ce processus.

Cependant (8) peut aussi se présenter comme une transformation associée à un modèle sous forme d'équation différentielle. C'est-à-dire (8) est un modèle indirect associé à un processus continu, et est obtenu par la méthode de la *surface de section de Poincaré*. Pour illustrer cette méthode, considérons les équations différentielles suivantes :

$$(9) \quad du_i/dt = f_i(u_1, u_2, u_3), i = 1, 2, 3$$

$$(10) \quad du_i/dt = g_i(u_1, u_2, \omega t), i = 1, 2,$$

où f_i, g_i sont des fonctions au moins continues et différentiables de leurs arguments (réels), g_i étant périodique en t , de période $\tau = 2\pi/\omega$. L'équation autonome (9) de dimension trois, et l'équation non autonome (10) de dimension deux, peuvent être considérées comme ayant la même *dimension effective* $m = 3$. En effet en ajoutant à (10) $du_3/dt = \omega$, on obtient une forme équivalente à (9).

Pour (9) on considère la trajectoire de l'espace de phase (u_1, u_2, u_3) passant par un point M_n d'une surface S transverse "régulière" coupant l'ensemble des trajectoires de (9). Soient (x_n, y_n) les coordonnées du point M_n de S , qui peuvent être fixées par rapport à un repère de S . Pour t croissant, soit M_{n+1} la première intersection de S et de la trajectoire $u_i = u_i(t, M_n)$ $i = 1, 2, 3$, issue de M_n , qui a lieu dans le même sens que l'évolution de u_i à partir de M_n . Alors M_n, M_{n+1} sont liés par la transformation bi-dimensionnelle autonome $T, M_{n+1} = TM_n, n = 0, 1, 2, \dots$

Pour (10) on définit aussi une transformation bi-dimensionnelle autonome équivalente en considérant $M_n(x_n = u_1(n\tau), y_n = u_2(n\tau)), M_{n+1}(x_{n+1} = u_1[(n+1)\tau], y_{n+1} = u_2[(n+1)\tau])$.

Dans les deux cas, l'étude des équations différentielles de dimension effective trois se ramène à celle d'une transformation ponctuelle associée autonome de dimension deux. Ceci a lieu pour des dimensions effectives supérieures. C'est cette *diminution de la dimension originelle du problème d'une unité* qui en facilite l'étude.

III.3 SINGULARITES DE CES EQUATIONS.

III.3.1 GENERALITES.

La solution d'équations telles que (4) - (7), mises sous la forme (8), pour une condition initiale X_0 ($n = 0$), se présente sous forme d'une suite de points (*suite itérée, ou trajectoire discrète*) :

$$(11) \quad X_n = X(n, X_0, \lambda).$$

T peut être considéré comme une définition implicite de X_n , solution de la récurrence. Bien que théoriquement satisfaisante, pratiquement une telle définition est sans intérêt, car en général la fonction X_n est inconnue, excepté le cas linéaire et quelques rares exemples non linéaires. Dans toutes les autres situations X_n ne peut être explicitée à partir des fonctions transcendantes élémentaires connues. X_n est une fonction transcendante non classique. Pour la caractériser, le plus commode consiste à *identifier les singularités* de la fonction X_n , et à étudier leur évolution quand le paramètre λ varie. Cette approche constitue ce qui est classé sous le nom de "*méthodes qualitatives*" de la théorie des Systèmes Dynamiques. Tout changement qualitatif affectant les singularités (leur nombre, leur nature), sous l'effet d'une variation de λ , est une *bifurcation*.

A partir de (8) ou (11), X_{n+r} est défini comme le *conséquent de rang r* de X_n ; X_n est l'*antécédent de rang r* de X_{n+r} .

III.3.2 SINGULARITES DANS DES SITUATIONS NON CHAOTIQUES.

Un *point fixe* est défini par $X_{n+1} = X_n = X^*$ (c'est-à-dire $X = TX$).

Un *cycle d'ordre k* (k entier) est constitué par k points $q_j, j = 1, 2, \dots, k$, solutions de $X_{n+k} = X_n, X_{n+l} \neq X_n$ ($X = T^k X, X \neq T^l X$), $l < k$, et tels que $q_{j+1} = Tq_j, j = 1, \dots, k - 1$. Un cycle est caractérisé par l'ordre d'échange de ses points q_j par applications successives de T .



Points fixes et cycles sont des singularités de dimension zéro pour T . Si X est un vecteur de dimension 2 de composantes (x, y) , en plus des singularités de dimension zéro, apparaissent des singularités de dimension 1 : les *courbes invariantes*, $G(x, y) = \text{constante}$, par T (resp. par T^k), solution de l'équation fonctionnelle $G(x_n, y_n) = G(x_{n+1}, y_{n+1}) = \text{constante}$, (resp. $G(x_n, y_n) = G(x_{n+k}, y_{n+k})$).

Si X est de dimension p , des *variétés invariantes de dimensions* $p - 1, p - 2, p - 3, p - 4, \dots, 1$ sont alors définies.

Les valeurs propres de la matrice A des coefficients de l'approximation linéaire, écrite en un point fixe (pour T), ou un point d'un cycle (pour T^k), sont appelés *multiplicateurs* $S_i, i = 1, 2, \dots, p$, de la singularité considérée. Leur définition suppose que les fonctions F, g, H, H_i dans (4) - (7) sont continues et au moins une fois différentiables au point considéré. Si tous les $|S_i| < 1$ le point fixe, ou le cycle, est dit *attractif* pour X_0 pris dans un voisinage suffisamment petit de la singularité. Un seul S_i , tel que $|S_i| > 1$, rend le point fixe *répulsif*. Les vecteurs propres de A permettent la définition des variétés linéaires tangentes aux variétés invariantes passant par un point fixe. Dans le cas d'une dimension $p = 2$, ils donnent les pentes des tangentes aux courbes invariantes passant par un point fixe, ou un point de cycle.

Le *bassin* d'un point fixe, ou d'un cycle, attractif est l'ensemble ouvert des points initiaux X_0 , tels que T engendre une suite itérée qui converge vers ce point, ou ce cycle. La frontière d'un bassin est de dimension entière $p - 1$, dans des situations non chaotiques.

Soit T défini par une relation uniforme par exemple (4). La transformation inverse T^{-1} , $X_n = F^{-1}(X_{n+1})$ peut être multiforme (inverse non unique) dans certains cas. Un exemple, pour $p = 1$, est donné par T défini par $x_{n+1} = x_n^2 - \lambda$, $\lambda = \text{paramètre du système dynamique}$. T^{-1} est alors $x_n = \pm \sqrt{x_{n+1} + \lambda}$, et un point x_n peut avoir 0, ou deux antécédents réels de rang un, ceux-ci pouvant être confondus pour $x_{n+1} = -\lambda$ (*point critique*). Une transformation T à inverse unique est appelée *difféomorphisme* si $F(X)$ est continue et au moins une fois différentiable. Une transformation T à inverse non unique est appelée un *endomorphisme*. Une condition suffisante, mais non nécessaire (cf. [1], p. 14 - 16) pour que T soit un endomorphisme est que le jacobien $J(F)$ de $F(X)$ puisse s'annuler quand $F(X)$ est continue et différentiable ($F \in C_r, r \geq 1$), ou que T soit tel que X_n ait deux antécédents de rang un confondus, pour X_n appartenant à une variété de dimension $\leq p - 1$ (*variété critique* de rang un au sens de JULIA-FATOU [5, 6]) si le jacobien ne peut être défini ($F \notin C_1$, F n'est pas différentiable aux points considérés). Quand $F \in C_r$, cette variété critique est le conséquent de rang un de la variété $J(F) = 0$.

Si la dimension de X est $p = 1$, $J(F) = 0$ donne les extrémums différentiables de la fonction $F(X)$ que certains auteurs appellent points critiques (sens différent de celui de JULIA-FATOU).

Dans le cas d'un *endomorphisme*, le *bassin* d'un attracteur peut être formé d'un nombre fini, ou infini, de *régions sans connexions* [1] - [4], pour certains choix du vecteur paramètre λ .

Remarque : cas d'une transformation associée à une équation différentielle.

Pour une transformation T , associée à une équation différentielle telle que (9), ou (10), ou une des équations correspondantes de dimension supérieure :

- un point fixe correspond, soit à un point d'équilibre, soit à une solution périodique, qui pour (10) a la période τ ,
- un cycle d'ordre k correspond à une solution périodique *sous harmonique* par rapport à une période fondamentale définie par un point fixe de (9), cette solution ayant la période $k \tau$ dans le cas de (10).

Pour de telles transformations, il faut noter que la connaissance de l'ordre d'un cycle, de l'échange de ses points, de ses multiplicateurs, ne donnent pas toute l'information sur la solution périodique correspondante. Ceci apparaît simplement à partir de l'équation non autonome de DUFFING :

$$(12) \quad du_1/dt = u_2, \quad du_2/dt = -k u_2 - u_1^3 + B \cos t + B_0.$$

Selon la région de l'espace paramétrique (k, B, B_0) , la trajectoire fermée du plan (u_1, u_2) , correspondant à la solution périodique de période $\tau = 2\pi$, et passant par le point fixe de T , a des allures différentes selon le choix des paramètres B, B_0 dans les régions $A_i, i = 0, \dots, 5, B_j, j = 0, \dots, 3$ et C_0, C_1 , du plan paramétrique de la fig. 2. Les frontières de ces régions (qui peuvent se recouvrir), sont des courbes de bifurcation.

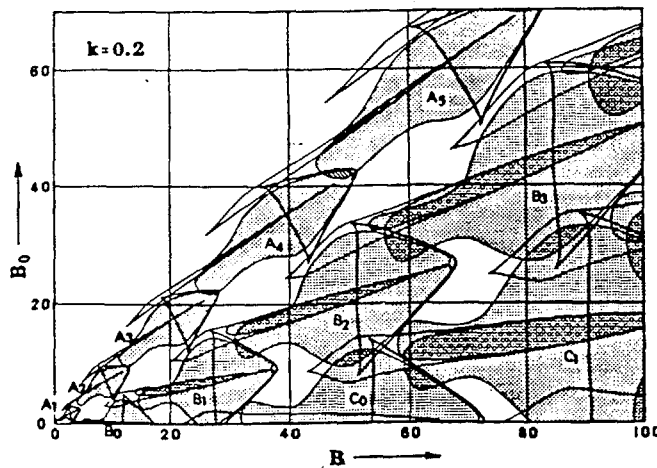


Figure 2 a
Structure de bifurcation de l'équation de DUFFING (d'après [16])

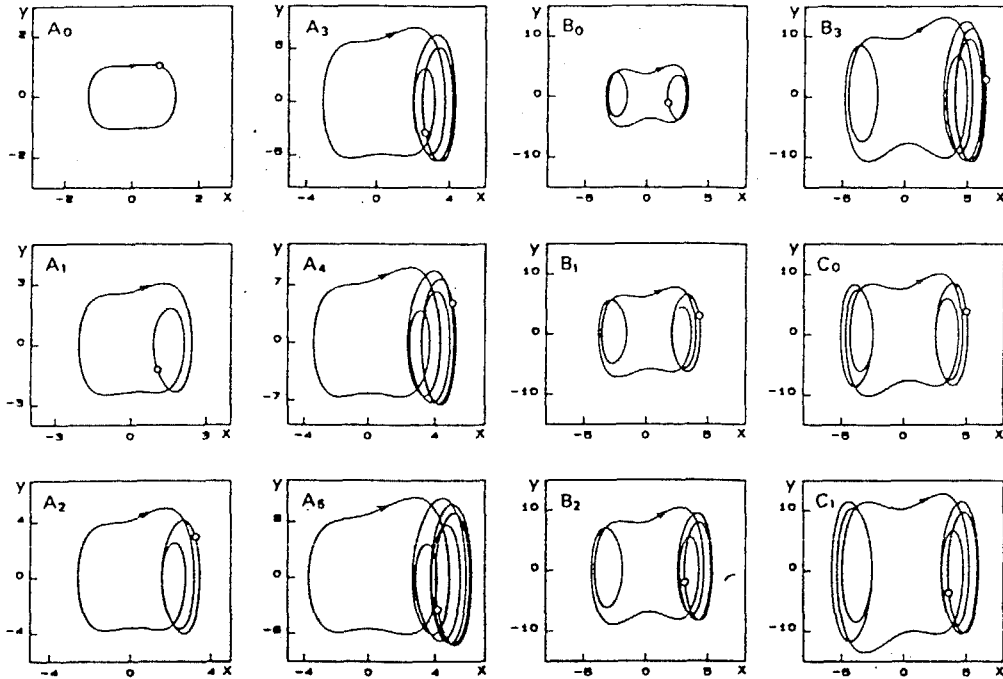


Figure 2 b

Trajectoires de solutions périodiques de période 2π obtenues dans les régions de la figure 2 a. Le petit cercle sur une trajectoire indique le point fixe correspondant (d'après [16])

Pour une trajectoire fermée passant par un point fixe, le nombre de boucles est lié au rang d'un *sur harmonique*. Pour une trajectoire fermée passant par les k points d'un cycle d'ordre k , le nombre de boucles et k sont les numérateur et dénominateur d'un *harmonique fractionnaire*.

Selon la nature de l'équation différentielle considérée on parle soit de *résonance* sous harmonique, sur harmonique, fractionnaire, soit de *synchronisation* sous harmonique, sur harmonique ou fractionnaire.

III.3.3 SINGULARITES EN SITUATIONS CHAOTIQUES.

Ces singularités sont le résultat d'*accumulations très complexes de points de cycles répulsifs d'ordre k , quand $k \rightarrow \infty$, et des variétés invariantes correspondantes répulsives* (associées à des multiplicateurs S , $|S| > 1$). Ces accumulations sont liées à une infinité de suites infinies de telles variétés invariantes de dimension zéro (points de cycles), un (courbes invariantes), ..., $p - 1$. Les limites correspondantes se définissent avec différentes classes d'accumulation ([1] p. 99). Il en résulte une organisation *fractale* de ces variétés invariantes de dimension $m = 0, \dots, p - 1$, c'est-à-dire une organisation présentant la propriété d'*autosimilarité* (le tout est semblable aux parties, même infinitésimales).

Les intersections de deux variétés invariantes de stabilités opposées donnent des situations dites *homoclines* ou *hétéroclines*, selon l'origine des variétés. Celles-ci sont des accumulations de cycles répulsifs.

Ainsi dans les systèmes continus tels que (9), ou (10), ou leurs extensions à des dimensions supérieures, le chaos résulte d'un phénomène d'accumulation de régimes stationnaires périodiques

instables, c'est-à-dire de sous harmoniques, ou d'harmoniques fractionnaires dont le rang tend vers l'infini.

Selon les cas, les accumulations mentionnées donnent naissance :

- soit à un ensemble attractif, appelé *attracteur étrange*,
- soit à un ensemble répulsif, appelé *répulsif étrange*. Deux situations sont alors possibles. D'abord celle du *transitoire chaotique* vers un attracteur (étrange, ou non), pour laquelle cet ensemble est localisé à l'intérieur d'un domaine simplement connexe limité par une partie de la frontière du bassin de l'attracteur, l'autre partie étant le répulsif étrange. Ensuite celle de la *frontière floue* (ou *fractale*) séparant les bassins de plusieurs attracteurs ([1], p. 74 -77, 296 - 298). Dans la zone de frontière floue, une initialisation donne un transitoire chaotique avec incertitude sur l'évolution finale vers l'un ou l'autre de ces attracteurs.

De tels ensembles attractifs, ou répulsifs, ont alors la caractéristique d'être de *dimension non entière* [7], et de présenter à première vue un enchevêtrement inextricable de variétés invariantes.

IV - BIFURCATIONS.

IV.1 BIFURCATIONS EN SITUATIONS NON CHAOTIQUES.

IV.1.1 BIFURCATIONS LOCALES.

Elles ont lieu, dans le cas général, lorsque sous l'effet d'une variation du vecteur paramètre λ , dont dépend la transformation T , au moins l'un des multiplicateurs S d'un point fixe, ou d'un cycle, traverse la valeur $|S| = 1$. Ceci se traduit par une modification du nombre, de la nature, ou de la dimension (par exemple naissance d'une courbe fermée invariante, à partir d'un point fixe) des singularités avant et après bifurcation ([1], p. 47 - 56, 207 - 250). Cette modification a lieu dans un petit voisinage des singularités considérées.

Dans l'espace du paramètre λ , le lieu géométrique de ces bifurcations pour un cycle d'ordre k est une variété (point si $\dim \lambda = 1$, courbe si $\dim \lambda = 2$, surface si $\dim \lambda = 3$). d'équation paramétrique :

$$(12) \quad X = F_k(X, \lambda), \quad |S(X, \lambda)| = 1,$$

où F_k (itérée $k^{\text{ème}}$ de F) définit T^k , X jouant le rôle du paramètre. L'élimination de X , si elle était possible, conduirait à une équation implicite, $A(\lambda) = 0$, de la variété de bifurcation. Dans la pratique, pour $\dim \lambda = 2$, les courbes de bifurcation pour des valeurs de k non exagérément grandes se déterminent numériquement à partir de (12) sans de trop grandes difficultés.

IV.1.2 BIFURCATIONS GLOBALES.

Elles se traduisent par des modifications qualitatives non locales de l'espace de phase (X). C'est le cas de certaines situations particulières de traversées de $S = \pm 1$ ([1], p. 207 - 210 et [3], p. 252 - 260). Pour les endomorphismes ces bifurcations ont lieu par contact de deux singularités de natures différentes : les variétés invariantes et les variétés critiques ([1], p. 70 - 71, [3], p. 241 - 247). A cette catégorie appartient la bifurcation qui transforme un bassin d'attracteur d'un seul tenant en un nombre fini, ou infini, de régions sans connexion.



IV.2 TRANSITION ORDRE-DESORDRE. BIFURCATIONS EN SITUATIONS CHAOTIQUES.

La *structure des bifurcations dans l'espace paramétrique est alors fractale*, le cas le plus simple étant celui de l'endomorphisme uni-dimensionnel à variable réelle,

$$(13) \quad x_{n+1} = x_n^2 - \lambda$$

dont l'organisation des bifurcations sur l'axe λ a été appelée "*structure boîtes-emboîtées*" ([1], [3]), et a été décrite pour la première fois en 1975 [8].

Pour $-1/4 \leq \lambda \leq \lambda_S = 1.401155189\dots$, avec λ croissant on a une suite de bifurcations donnant naissance à un cycle d'ordre 2^{i+1} à partir de la destabilisation d'un cycle d'ordre 2^i , $i = 0, 1, 2, \dots$, la valeur λ_S correspondant à l'accumulation de ces bifurcations quand $i \rightarrow \infty$ (cascade de MYRBERG, 1963). Pour $i = \infty$ l'ensemble limite des points des cycles constitue un *attracteur dit critique* ayant la structure d'un ensemble de cantor.

Pour $\lambda_S < \lambda \leq 2$, le comportement de la suite x_n devient chaotique, avec toujours présence d'un répulseur étrange, associé soit à un cycle attractif d'ordre $k \neq 2^i$, soit à un attracteur étrange. Cet intervalle est le siège d'accumulations complexes de points de bifurcations ([1], p. 149 - 160).

Quand $\dim X > 1$ et $\dim \lambda > 1$, la situation se complique. La structure de bifurcation reste fractale de type boîtes emboîtées mais devient *feuilletée*, un point de l'espace paramétrique pouvant être associé à plusieurs cycles de nature et d'ordre différents, et à plusieurs ensembles de Cantor définis ci-dessus (pour $\dim X = \dim \lambda = 2$, cf. [1], p. 326 - 406).

Les mécanismes de transition ordre-désordre et de bifurcations de comportements chaotiques sont différents selon qu'il s'agit d'un difféomorphisme, ou d'un endomorphisme. Dans le premier cas les bifurcations mettent en jeu des tangences de variétés invariantes de stabilité différente et conduisent soit à la naissance de situations homoclines ou hétéroclines, soit à la création du maximum possible de ces situations (après bifurcations il ne peut se créer de nouvelles situations) ([1], p. 334 - 341). Dans le second cas, le contact d'une variété critique avec une variété invariante, et le contact de deux variétés critiques jouent un rôle essentiel ([3], p. 357 - 371). Parmi ces mécanismes citons : celui de la *naissance d'un transitoire chaotique* ([1], p. 74 - 77, 296 - 298) celui de la *naissance d'une frontière floue* ([1], p. 77 - 78, 296 - 298).

V - CARACTERISATION DES COMPORTEMENTS CHAOTIQUES.

V.1 GENERALITES.

Directement, par observation d'une suite finie de X_n , il est difficile de distinguer un comportement purement chaotique au sens défini dans l'introduction c'est-à-dire à origine déterministe de celui du à un effet de bruit, ou lorsqu'il y a coexistence des deux phénomènes, d'extraire le signal significatif (chaotique).

Un comportement chaotique implique en général une certaine régularité implicite qui peut devenir discernable par examen d'une *représentation "collective"*, convenablement choisie, de l'évolution chaotique "microscopique" de X_n . En principe le passage de variables "microscopiques" X_n , à des variables collectives, ou "macroscopique", peut être fait de différentes façons examinées ci-dessous.

Soit un système dissipatif de dimension quelconque m , qui, dans le cas discret, est un difféomorphisme. Un attracteur A est un sous-ensemble de l'espace de phase de dimension m , tel que, dans un voisinage suffisamment petit de A , un volume initial se contracte et tend asymptotiquement vers zéro (volume de A). En dynamique chaotique cette contraction ne se fait pas dans toutes les directions. Il y a en effet étirement du volume dans certaines directions, ce qui conduit à un pliage complexe donnant une structure feuilletée avec une infinité de feuillets, quand le temps (continu, ou discret) tend vers l'infini. A la limite la figure obtenue devient localement un ensemble de Cantor par section dans les directions de contraction. Pour un processus discret de type endomorphisme la situation est un peu plus complexe. L'attracteur (étrange) est fractal et de dimension non entière. Pour des processus, connus seulement à partir de séries temporelles, la détermination de la dimension d'un tel attracteur présente un grand intérêt. Ceci est lié au fait qu'une dimension finie ^{non entière} est le signe d'une origine déterministe pour l'apériodicité observée, celle-ci n'étant pas seulement due à des effets de bruit.

Ainsi, lorsqu'on ne dispose que de données expérimentales, sous forme d'une série temporelle, un problème essentiel est de savoir différencier le chaos (phénomène à origine déterministe) du bruit, ou encore de savoir extraire le signal significatif apériodique du bruit aléatoire environnant. Les techniques utilisées sont essentiellement phénoménologiques, en fournissant une compréhension de l'aspect qualitatif de la dynamique sans nécessité de la connaissance des mécanismes à l'origine des comportements observés, (par exemple les singularités des équations correspondantes).

V.2 SPECTRE DE PUISSANCE.

Dans le cas d'un processus continu, l'analyse d'un *spectre de puissance* permet de distinguer les comportements quasi périodiques et les comportements périodiques. Sa structure fine peut faire apparaître des périodicités d'ordre élevé associées à du chaos. Pour des attracteurs engendrés par le phénomène de doublement de période (ordre d'un cycle lié au rang d'un sous-harmonique) le spectre fait apparaître des pics étroits sur fond irrégulier. Cependant les possibilités de l'analyse spectrale restent limitées pour une caractérisation plus fine des comportements chaotiques. Cette analyse reste seulement intéressante pour la mise en évidence de phénomènes périodiques, ou quasi-périodique, et leur discrimination par rapport aux évolutions chaotiques plus complexes (fig. 1). La caractérisation de ces dernières évolutions ne peut se déduire de l'examen de spectres de puissance, car ceux-ci perdent l'information relative à la phase (ils font intervenir le carré de valeurs absolues), information essentielle dans le "mécanisme interne" d'un attracteur étrange.

Dans certains cas, et pour des rangs de sous-harmoniques pas trop élevés, un spectre de puissance peut permettre d'identifier la "boîte" d'une structure fractale "boîtes-emboîtées" à l'origine du phénomène chaotique observé [19].

V.3 DENSITE INVARIANTE.

Pour une transformation telle que (8), une caractérisation du chaos peut se faire à partir de la notion de *densité invariante* (cf. par exemple [9], p. 50, 227), [1], p. 166 - 174). Sous forme la plus simple celle-ci peut se définir à partir du problème suivant : si une masse finie M est uniformément distribuée à



l'intérieur du bassin d'un attracteur, avec la densité w_0 , chaque "point particule" x_n de M évoluant selon (8), que devient la densité de masse $w_m(x_n)$ après m itérations ? Est-ce que $w_m(x_n)$ converge vers une fonction limite $w(x_n)$ quand $m \rightarrow \infty$? On peut prendre pour caractériser cette limite :

$$(14) \quad w(x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} w_i(x_n)$$

Si cette limite existe, alors $w(x)$ est indépendant de la distribution de masse initiale. Une définition équivalente de $w(x)$ est donnée par une solution particulière de l'équation fonctionnelle de PERRON-FROBENIUS ([9], p. 51).

V.4 ENTROPIE TOPOLOGIQUE.

L'entropie topologique h d'une transformation T uni-dimensionnelle est liée à une mesure asymptotique du nombre de cycles de cette transformation ([8], p. 57 - 60). Pour (13), $h = 0$ dans l'intervalle $-1/4 < \lambda < \lambda_s$ (nombre fini de cycles), et h croît, avec une allure "escalier du diable", de 0 à 2, dans l'intervalle $\lambda < \lambda \leq 2$ ([1], p. 174 - 176).

Cependant cette notion ne donne aucune information sur la stabilité du chaos obtenu. Utilisée par un certain nombre de mathématiciens son intérêt pratique reste à prouver.

V.5 DIMENSION D'UNE SOLUTION CHAOTIQUE.

Une autre possibilité de caractérisation d'un ensemble chaotique consiste à évaluer sa *dimension* (non entière). Ceci peut se faire de différentes façons. Une première consiste à diviser la portion de l'espace de phase où se situe cet ensemble en petites cellules de "grandeur linéaire" ε , et à compter le nombre $N(\varepsilon)$ de ces cellules contenant au moins un pont de la solution (ou trajectoire) chaotique considérée. La dimension est calculée par :

$$(15) \quad D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln N(\varepsilon)] / [\ln (1/\varepsilon)].$$

D_C est appelée *dimension de capacité* de KOLGOMOROV. Pratiquement $N(\varepsilon)$ est compté pour des ε finis, et D_C est obtenue à partir de la pente de la courbe $[\ln N(\varepsilon)]$ en fonction de $\ln (1/\varepsilon)$.

La détermination de D_C ne tient pas compte du nombre de fois qu'une trajectoire peut traverser une cellule, qui n'est comptée qu'une seule fois. Pour corriger l'erreur ainsi introduite, on peut faire intervenir la fréquence de visite d'une cellule. Ainsi si la $j^{\text{ème}}$ cellule est visitée avec une probabilité p_j , alors (15) est remplacé par la *dimension d'information* :

$$(16) \quad D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [I(\varepsilon)] / [\ln (1/\varepsilon)], \quad I(\varepsilon) = - \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} p_j \ln p_j,$$

où $N(\varepsilon)$ est le nombre de cellules visitées. En général $D_I \leq D_C$. $I(\varepsilon)$ est l'*entropie d'information* [10]. Pour beaucoup d'attracteurs $I(\varepsilon)$ croît logarithmiquement avec $1/\varepsilon$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$(17) I(\epsilon) \simeq I_0 - D_I \ln \epsilon.$$

La mesure de corrélations entre points d'un attracteur évoluant erratiquement peut être faite par l'intégrale de corrélation. Soit un ensemble $(X_i, i = 1, \dots, N)$ de points d'un attracteur obtenus par exemple expérimentalement, $X_i \equiv X_i(t + i\tau)$, $\tau = \text{constante}$. A cause de la divergence exponentielle des trajectoires, la plupart des couples (X_i, X_j) , $i \neq j$, paraissent des points à évolution erratique dynamiquement non corrélés. Appartenant cependant à l'attracteur, ils sont spatialement corrélés. La mesure de cette corrélation est l'intégrale de corrélation :

$$(18) C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \{\text{nombre de paires } (i, j) \text{ avec distance } |X_i - X_j| < \epsilon\}$$

Pour ϵ petit, $C(\epsilon)$ varie comme

$$C(\epsilon) \sim \epsilon^{\overline{D}_C},$$

\overline{D}_C étant la *dimension de corrélation* [10] :

$$(19) \overline{D}_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon} \right].$$

En général $\overline{D}_C \leq D_I < D_C$. A partir d'un signal expérimental si \overline{D}_C est inférieur à la dimension m de l'espace de phase, on peut conclure à une origine déterministe, plutôt qu'à un effet de bruit qui donne $C(\epsilon) \sim \epsilon^m$.

L'avantage de la dimension de corrélation est qu'elle peut être déterminée plus aisément que D_C et D_I . C'est en particulier le cas pour des dimensions supérieures à deux, pour lesquelles le recouvrement par petites cellules de la solution chaotique devient pratiquement impossible.

Avec des données expérimentales, sous forme de série temporelle à une seule variable, $x_i = x_i(t + i\tau)$, $i = 1, 2, \dots, N$, un problème important est celui de la *reconstitution de l'espace de phase*, qui peut être de dimension finie, ou infinie, l'attracteur ayant une dimension inférieure finie. L'hypothèse nécessaire est que N soit suffisamment grand. La méthode décrite en [10] s'appuie sur le fait qu'en présence des interactions non linéaires dans le système considéré, les x_i contiennent une information sur les autres variables, qu'il est possible d'extraire de la série temporelle. A partir de la série temporelle on construit des vecteurs $Y_j = (x_j, x_{j+p}, x_{j+2p}, \dots, x_{j+(r-1)p})$ de dimension r suffisamment grande, $j = 1, 2, \dots, M$, M étant de même ordre que N . Si la distance entre deux vecteurs $|Y_j - Y_k|$ (mesurée par la plus grande différence des coordonnées correspondantes) est inférieure à une constante ϵ fixée à l'avance, ces vecteurs sont dits corrélés. Après normalisation de leur valeur maximale à un, la relation (18) donne l'intégrale de corrélation et \overline{D}_C . Quand ϵ est trop petit, le bruit intervient, et limite les possibilités de la méthode.

La notion de *dimension d'information généralisée* englobe les trois autres définitions comme cas particuliers [11] et donne lieu à une analogie thermodynamique.



V.6 DETERMINATION DE LA DIMENSION DE L'ESPACE DE PHASE ET DETERMINATION D'UN MECANISME CHAOTIQUE OU ALEATOIRE.

V.6.1 METHODE DE SUGIHARA-MAY.

A partir d'une série temporelle à une seule variable, la méthode qui vient d'être décrite peut donner la dimension m de l'espace de phase. Une approche plus simple, basée sur l'hypothèse qu'en régime chaotique (origine déterministe) la prédiction à court terme est possible, est décrite dans [18] [19], lorsque m n'est pas trop grand. La série temporelle est divisée en deux parties : un "passé" supposé connu, et un "futur" déclaré inconnu. Les suites de points extraites du "passé" sont utilisées pour prévoir l'évolution à court terme de chacun des points du "futur".

La méthode consiste à choisir une dimension m , petite au départ, $m=2$ par exemple. Les points du "passé" sont alors représentés dans un plan (A) $[x(t), x(t-1)]$ donnant un nuage de points $X(t)$ de A, chacun étant associé à une valeur de t fixée. On place ensuite dans (A) un point du "futur" $Y(t)$ $[y(t), y(t-1)]$, et on isole parmi les $X(t)$, les trois points formant le plus petit triangle contenant $Y(t)$. Pour une prédiction à $p=1$ intervalle de temps dans le futur, on note la position du triangle à $(t+1)$ et son barycentre $Z(t+1)$, qui est alors une position prédite de $Y(t+1)$. On répète ces opérations pour toutes les valeurs du "futur". On compare les valeurs prédites Z aux valeurs réelles connues Y , en calculant la corrélation statistique entre ces deux ensembles. En appliquant cette technique pour différentes valeurs de m (le triangle devient un polyèdre à faces triangulaires pour $m > 2$), si une valeur de m donne une corrélation maximale (maximisation de la précision) on la retient comme dimension.

Pour cette valeur de m on fait ensuite varier p , numéro de l'intervalle de temps dans le "futur", $p=2, 3, 4, \dots$, en procédant de la même façon, et en calculant en fonction de p la corrélation statistique globale entre les valeurs observées du "futur" et les valeurs prédites. Pour des séries purement chaotiques, la corrélation élevée pour des valeurs petites de p , diminue quand p croît. Ceci est dû au fait qu'en situation de chaos (origine déterministe), les trajectoires discrètes, issues de points initiaux voisins, divergent rapidement. Pour des séries temporelles aléatoires, la corrélation est indépendante de p . On peut ainsi distinguer le chaos d'un bruit aléatoire.

V.6.2 METHODE ANALOGIQUE DE NAMAJUNAS-TAMASEVICIUS.

Les algorithmes de détermination de dimensions sont de gros consommateurs de temps de calcul, et sont souvent pratiquement impossibles à mettre en oeuvre pour des dimensions de l'espace de phase supérieure à deux, sauf pour la méthode de Sugihara-May dont la mise en oeuvre est moins lourde.

Parmi les méthodes ne faisant pas appel à un ordinateur telles que [20] [21], celle décrite dans [22] [23] [24], basée sur l'utilisation d'un circuit analogique électronique, semble très intéressante à cause de sa simplicité, et de son insensibilité à la coexistence d'un bruit aléatoire. Cette méthode est donc particulièrement adaptée aux résultats expérimentaux bruités.

La méthode fait appel à cinq circuits. Un détecteur (D) donne une impulsion quand le signal étudié $s(t)$ traverse un niveau déterminé. Un multivibrateur (M) fournit une suite de m impulsions dans un intervalle choisi à l'avance. La sortie de ces deux circuits alimente un comparateur (C) délivrant une impulsion retardée, quand les intervalles entre les impulsions de (D), et celles de (M) sont suffisamment voisins.

Cette impulsion agit sur l'entrée balayage horizontal d'un oscilloscope à mémoire (dont l'entrée verticale est alimentée par $s(t)$), et fait apparaître sur l'écran la valeur instantanée de $s(t)$. En faisant varier le nombre m d'impulsion dans la suite mentionnée, on peut trouver le nombre \overline{m} minimum suffisant pour la définition d'une trajectoire sur l'écran. Pour des valeurs inférieures, $m < \overline{m}$, les points sur l'écran occupent une bande dont la largeur est minimum pour $m = \overline{m}$.

V.7 EXPOSANTS DE LJAPUNOV.

La notion de dimension non entière ne fait que traduire globalement une action d'étirement et de contraction d'un volume de l'espace de phase, réduit finalement à un objet de dimension inférieure. Une telle opération d'étirement et de contraction apparaît plus explicitement avec la notion d'*exposants de LJAPUNOV*. Quand la loi d'évolution est connue analytiquement ces exposants se mesurent facilement par rapport aux dimensions non entières. En effet considérons l'équation différentielle autonome (9) avec $i = 1, 2, \dots, m$.

Soit un point $\overline{u} (u_1, \dots, u_m)$ de l'espace de phase, (9) peut être linéarisée au voisinage de \overline{u} , en faisant $u = \overline{u} + \delta u$. En portant u dans (9) on obtient l'équation aux variations, non autonome (u est fonction de t) :

$$(20) \quad d(\delta u_i)/dt = \sum_{j=1}^m (\partial f_i / \partial u_j)_{u=\overline{u}(t)} \delta u_j, \quad i = 1, \dots, m$$

Les valeurs propres μ_i de la matrice des dérivées partielles de (17) déterminent la stabilité locale du mouvement non perturbé \overline{u} . Si l'une des valeurs propres est à partie réelle positive le mouvement non perturbé \overline{u} est instable et u s'éloigne de \overline{u} exponentiellement. Si tous les μ_i sont à partie réelle négative u tend vers \overline{u} . Sur un volume entourant \overline{u} , les valeurs propres à partie réelle positive opèrent un étirement, les valeurs propres à partie réelle négative une contraction. En régime chaotique le volume transformé s'étire en se repliant sur lui-même de façon complexe quand $t \rightarrow \infty$.

On peut par exemple moyenner les parties réelles des valeurs propres le long d'une trajectoire et obtenir un ensemble de caractéristiques globales qui sont les exposants de LJAPUNOV, μ_1, \dots, μ_m . Une autre méthode de calcul des exposants est donnée dans [12]. Dans [14] est conjecturé que la dimension de capacité D_c est liée aux exposants de LJAPUNOV par :

$$(21) \quad D_c = k + \left(\sum_{i=1}^k \mu_i \right) / (\mu_{k+1})$$

Ici on suppose les μ_i ordonnés $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$. k est le plus grand entier permettant d'avoir $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \geq 0$. Ces exposants convergeant assez rapidement peuvent conduire à un calcul de D_c plus facile que celui issu de (15). Cependant, comme indiqué dans [10], la relation (21) n'est pas en général correcte, et ne donne qu'une borne supérieure de la dimension.

Lorsque les équations d'évolution ne sont pas connues, les exposants de LJAPUNOV peuvent être extraits de séries temporelles d'origine expérimentale. L'espace de phase peut être reconstitué par la méthode du § V.5, ou celle du § V.6.1, et à différentes étapes de l'évolution on associe une dynamique



linéarisée définie par une matrice A . Les exposants de LJAPUNOV sont calculés en moyennant les valeurs propres de A . Pour les détails on peut consulter [24] - [30], le problème de la *réduction du bruit* étant plus particulièrement traité dans [28] - [30].

Notons enfin que *l'entropie de KOLGOMOROV* est la somme des exposants de LJAPUNOV positifs.

V.8 REMARQUE.

Il faut noter que les méthodes de reconstitution d'un vecteur de l'espace de phase, de dimension finie, à partir de séries scalaires [10], utilisées pour déterminer soit la dimension de corrélation, soit les exposants de LJAPUNOV, présentent des limitations qu'il convient d'avoir à l'esprit pour éviter des erreurs. Cette question est développée dans [15].

VI - REMARQUE SUR L'EMPLOI DE L'INFORMATIQUE.

L'informatique constitue un outil expérimental irremplaçable pour la compréhension des phénomènes chaotiques. Elle a aussi grandement aidé à l'amélioration des connaissances fondamentales dans ce domaine. Ainsi de nombreux résultats mathématiques, obtenus depuis une quinzaine d'années, ont pour source des expériences numériques (universalité et opérateur de renormalisation, frontière floue (ou fractale) d'un bassin d'attracteur, structures fractales de bifurcations boîtes-emboîtées (feuilletées, ou non), etc...). Ceux-ci n'ont pu cependant être établis que par une utilisation très prudente de l'informatique, sachant que les situations chaotiques sont souvent liées à des difficultés numériques importantes.

Tout d'abord dans le cas de processus dynamiques discrets (dans le temps) en régime chaotique, la *forte sensibilité par rapport aux conditions initiales* (qui limite la prédiction) est une source majeure d'ennuis numériques.

Pour les processus continus la situation est encore plus délicate car, aux difficultés qui viennent d'être mentionnées, s'ajoutent celles qui sont dues à la discrétisation du modèle continu. En effet, pour être traité sur ordinateur, le modèle dynamique continu initial doit subir une modification structurelle sous forme d'une équation aux récurrences (opération de *discrétisation* par une méthode numérique classique avec un "pas" fixé). Plus le pas est petit, plus le comportement du modèle récurrent ainsi traité est proche de celui du modèle continu, mais plus le temps de calcul est long. Dans la pratique, des contraintes inévitables sur ce temps amènent à le limiter, et donc à opérer avec un pas de discrétisation qui peut ne pas être suffisamment petit. Il est alors connu que les modèles continus et récurrents peuvent avoir des comportements qualitatifs très différents. Ainsi un état stationnaire stable du système continu, peut devenir instable après discrétisation. Mais aussi *la discrétisation peut faire apparaître un comportement chaotique*, qui n'existe pas au départ dans le modèle continu (pour ces questions cf. [2], p. 387 - 391).

De manière générale, pour éviter les effets pervers de la discrétisation, mentionnés ci-dessus, une solution doit être considérée acceptable, si après diminution du pas de base dans un rapport fixé, et modification de la méthode numérique utilisée, les résultats restent voisins avec une précision donnée à l'avance.

Enfin, il faut signaler que, pour la génération de nombres (pseudo) aléatoires, les ordinateurs exploitent une récurrence uni-dimensionnelle déterministe, appelée l'algorithme "congruentiel" de LEHMER, dont la solution est fortement chaotique.

VII - CONCLUSION.

Ainsi que nous l'avons mentionné dans l'introduction, une autre cause de comportement dynamique désordonné peut être un mouvement collectif macroscopique, manifestation "statistique" d'un très grand nombre de mouvements microscopiques, décrits par une même équation, mais correspondant à des conditions initiales différentes. Il en résulte alors un mouvement collectif complexe. Par rapport à ce comportement, un comportement purement chaotique a les caractéristiques suivantes :

- aucune source de mouvement collectif complexe, du type qui vient d'être indiqué, existe, la dynamique est purement déterministe,
- une certaine régularité implicite peut devenir discernable avec une représentation collective de l'évolution de la variable vectorielle (§ 5). Cette représentation est indépendante des conditions initiales,
- au niveau microscopique l'évolution de la variable vectorielle est très sensible à de petites variations de conditions initiales,
- lorsqu'un paramètre varie, la transition ordre-désordre a lieu à travers une suite de doublements de la période de sous-harmoniques, ou une suite de bifurcations globales qui convergent rapidement, le chaos résultant de l'accumulation de tels événements,
- l'espace de phase, et l'espace paramétrique ont une structure fractale.
- la dimension de l'espace de phase étant connue, ou évaluée, avec la méthode du § V.6.1, une série purement chaotique donne une corrélation élevée pour un nombre p petit d'intervalles, corrélation qui décroît quand p augmente. Une série aléatoire donne une corrélation indépendante de p .

- [1] C. MIRA - "Chaotic Dynamics. From the one dimensional endomorphism to the two-dimensional diffeomorphism" - World Scientifique, 1987.
- [2] C. MIRA - "Systèmes Asservis Non Linéaires" - Hermès, 1990.
- [3] I. GUMOWSKI, C. MIRA - "Dynamique Chaotique". Transition ordre - désordre" - Cépadues 1980.
- [4] C. MIRA - "Quelques situations fondamentales dans les systèmes dynamiques non linéaires et chaotiques. Exemples". Ann. Télécommunications, 1987, 42, n° 5 - 6, pp. 217 - 238.
- [5] P. FATOU - "Mémoire sur les équations fonctionnelles". Bull Soc. Math. Fr., 1919, 47, pp. 161 - 271.
- [6] G. JULIA - "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. J. Math. Pures Appl., 1918, 4, 1, pp. 47 - 244.
- [7] B.B. MANDELBROT - "Fractals, Form, Chance and Dimension". W.H. Freeman and Co, 1977.
- [8] I. GUMOWSKI, C. MIRA - "Accumulations de bifurcations dans une récurrence", C.R.A.S., 1975, Ser. A, 281, pp. 45 - 48.



- [9] I. GUMOWSKI, C. MIRA - "Recurrences and Discrete Dynamic Systems" - Lecture Notes in Mathematics n° 809, Springer-Verlag, 1980.
- [10] P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA - "Measuring the strangeness of strange attractors", 1983, Physica 9D, pp. 189 - 208.
- [11] H.G.E. HENTSCHEL, I. PROCACCIA - "The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors", 1983, Physica 8D, pp. 435 - 444.
- [12] G. BENETTIN, L. GALGANI, J.M. STRELCYN - "Kolmogorov entropy and numerical experiments", 1976. Phys. Rev. 14A, p. 2338.
- [13] G. BENETTIN, L. GALGANI, A. GIORGILLI, J.M. STRELCYN - "LJAPUNOV characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems", 1980. Mécanica 15, pp. 9 - 32.
- [14] J.L. KAPLAN, J.A. YORKE - "Chaotic behavior of multidimensional difference equations", dans "Functional difference equations", 1979. Lecture notes in Math. n° 730, pp. 204 - 228.
- [15] J.P. ECKMANN, D. RUELLE - "Fundamental limitations for estimating dimensions and LJAPUNOV exponents in dynamical systems", 1989. Pré-tirage IMES.
- [16] H. KAWAKAMI - "Bifurcations of periodic responses in forced dynamic non linear circuits", 1984. IEEE Trans. CAS, 31, n° 3, pp. 248 - 260.
- [17] Ch. UHL - "Prédiction réursive non linéaire. Bornitude et chaos". Thèse de Doctorat de Physique. université de Paris XI, 1er juillet 1991.
- [18] G. SUGIHARA, R.M. MAY - Nature n° 344, 1990, 734-740.
- [19] R.M. MAY - "Le chaos en Biologie". La Recherche, vol. 22, n° 232, 1991, 589-598.
- [20] C.K. LEE and F.C. MOON - "An optical technique for measuring fractal dimensions of planar Poincaré Maps". Phys. Lett., vol. 114A, p. 222, 1986.
- [21] K. PIRAGAS and A. CHENIS - "A method for the rapid determination of the number of active degrees of freedom of dynamic systems with chaotic behavior". Lit. fiz. sb, (Soviet Physics - Collection), vol. 27, p. 437, 1987.
- [22] A.M. NAMAJUNAS, A.V. TAMASEVICIUS - "Determination of the number of degrees of freedom of chaotic system using an analog electronic device". Litovskij Fisicheski Sbornik, vol. 28, n° 3, 1988, 401 - 403.
- [23] Z.N. BARTASHEVICH and YU. K. UL'BIKAS - "Determination of the number of active degrees of freedom in semiconducting systems with chaotic behavior". in Physics, Technology, and Manufacture of Semiconductor Devices, Proc. Republican Conference of Young Scientists (in Russian), Vilnius, 1987.

- [24] M. SANO and Y. SAWADA - "Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series", Phys. Rev. Lett. 55, 1985, 1082.
- [25] J-P. ECKMANN and D. RUELLE - "Ergodic theory of chaos and strange attractors". Rev. Mod. Phys. 57, 1985, 617 - 656.
- [26] J-P. ECKMANN, S. OLIFFSON KAMPHORST, D. RUELLE and S. CILIBERTO - "Lyapunov exponents from time series". Phys. Rev. A34, 1986, 4971 - 4979.
- [27] R. CONTE and M. DUBOIS - "Lyapunov exponents of experimental systems". In "Non Linear Evolutions" Ed. Leon J.P.P., World Scientific, 1988, 767 - 780.
- [28] J.D. FARMER and J.J. SIDOROWICH - "Predicting chaotic time series". Phys. Rev. Lett. 59, 1988, 845 - 848.
- [29] E.J. KOSTELICH and J.A. YORKE - "Noise reduction in dynamical systems". Phys. Rev. A38, 1988, 1649 - 1652.
- [30] S.M. HAMMEL, J.A. YORKE and C. GREBOGI - "Do numerical orbits of chaotic dyanmical processes represent true orbits ?" J. Complexity, 3, 1987, 136 - 140.