Caractérisation d'un polynôme et application à la distribution de Wigner-Ville

Messaoud BENIDIR

Université de Paris Sud, Laboratoire des Signaux et Systèmes
Supélec, France
e-mail : benidir@lss.supelec.fr, tél : (33-1) 69 41 80 40, fax : (33-1) 69 41 30

RÉSUMÉ

Nous proposons une représentation de l'ensemble de tous les polynômes ϕ de degré $\leq N$ en fonction de $Q = N+1$ paramètres arbitraires $t_1, ..., t_Q$. Cette représentation permet d'exprimer $\phi(t)$ en fonction de t, $t_1, \ldots, t_Q$ et $\phi(t_1), \ldots, \phi(t_Q)$. Nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit un polynôme. Nous montrons, en particulier, qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ϕ soit un polynôme de degré $\leq N$ est que sa dérivée soit égale à une combinaison linéaire de q taux d'accroissement de ϕ calculés autour de q points arbitraires $\tau_1, \ldots, \tau_q$, $q \geq$ à la partie entière de $(N+1)/2$. Le cas particulier des polynômes de degré N est largement discuté. Comme applications, une formule qui permet de calculer $\phi'(t)$ sans faire intervenir les coefficients de ϕ est proposée ainsi qu'une démonstration d'une propriété importante de la distribution de Wigner-Ville polynomiale [Boashash], [Arnold].

ABSTRACT

We propose a representation of the set of all polynomials ϕ of degree $\leq N$ in terms of $Q = N+1$ arbitrary parameters $t_1, ..., t_Q$. This representation allows us to express $\phi(t)$ in terms of t, $t_1, \ldots, t_Q$ and $\phi(t_1), \ldots, \phi(t_Q)$. A necessary and sufficient condition for a function to be a polynomial is established. We then deduce that a necessary and sufficient condition for a function $\phi(t)$ to be a polynomial is that the derivative of this function equals a linear combination of q arbitrary increment rates of $\phi(t)$ calculated around q arbitrary points $\tau_1, \ldots, \tau_q$, where q denotes the integer part of $(N+1)/2$. The particular case of polynomials of degree N is largely discussed. As applications, we give a formula that allows us to compute $\phi'(t)$ without using the coefficients of the polynomial $\phi(t)$ and establish an important property of the polynomial Wigner-Ville distribution already proposed in [Boashash], [Arnold].

1 Introduction

On rencontre souvent des problèmes de traitement du signal où l'on doit calculer la valeur d'un polynôme en un point connaissant seulement les valeurs de ce dernier sur un certains ensemble de points. De même, le calcul de la dérivée d'un polynôme est un problème assez courant dans beaucoup de situations pratiques. Par exemple, l'étude des signaux $z(t) = e^{j\phi(t)}$ où $\phi(t)$ désigne une phase polynomiale a fait l'objet de techniques récentes faisant intervenir la dérivée $\phi'(t)$ en tant que fréquence instantanée (FI) de $z(t)$. Parmi ces techniques, on peut citer des transformations integrales [Peleg] et des distributions temps-fréquence de Wigner-Ville polynomiales (WVP) [Boashash], [Arnold]. La définition de la distribution de WVP est fondée sur l'estimation de la dérivée $\phi'(t)$ par une combinaison linéaire des translatés $\phi(t - t_k)$ où les t_k sont des instants fixés. Ce papier a pour objectif d'étudier l'existence de telles combinaisons linéaires aussi bien pour un polynôme que pour sa dérivée, d'établir des propriétés caractéristiques d'une fonction polynomiale et d'appliquer ces résultats à la distribution de Wigner-Ville polynomiale proposée dans [Boashash], [Arnold]. Pour les démonstrations des résultats de ce papier, on peut consulter [5].

2 Représentation des polynômes de degré $\leq N$

Nous commençons par énoncer les résultats préliminaires suivants qui seront utilisés dans la suite de ce papier.

Lemme 1 *Considérons le système $S_{Q,N}$ de Van der Moonde suivant associé aux réels $t_1, ..., t_Q$ supposés distincts deux à deux et non nuls*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_Q \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t_Q^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_1^N & t_2^N & \ldots & t_Q^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Alors on a les résultats suivants.
1. Le système $S_{Q,N}$ admet une solution ssi $Q \geq N+1$.
2. Cette solution est unique ssi $Q = N+1$. Dans ce cas, elle sera notée α^Q et ses composantes α_k^Q sont toutes différentes de zéro et ont pour expression :

$$\alpha_k^Q = \frac{1}{\prod_{i \neq k}^{Q} (1 - \frac{t_k}{t_i})}, \quad k = 1, ..., Q. \quad (2)$$

Remarque 1 *Partant de (2), il est facile d'établir que les composantes de α^Q et α^{Q+1} sont reliées par les relations de récurrence suivantes :*

$$\alpha_k^{Q+1} = \alpha_k^Q \frac{1}{1 - \frac{t_k}{t_{Q+1}}}, k = 1, ..., Q \tag{3}$$

et

$$\alpha_{Q+1}^{Q+1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{Q}(1 - \frac{t_{Q+1}}{t_i})}. \tag{4}$$

Ces relations permettent de calculer récursivement sur Q, les composantes de α^{Q+1} à partir de celles de α^Q

Nous allons maintenant utiliser le lemme ci-dessus pour discuter la décomposition d'un polynôme comme combinaison linéaire de ses translatés.

Proposition 1 *Soient $t_1, ..., t_Q$ des réels arbitraires, distincts deux à deux et non nuls et α^Q la solution du système carré (1) où $N = Q - 1$. On a les résultats suivants.*
1. Tous les polynômes de degré $\leq N$ vérifient l'identité suivante :

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{Q} \alpha_k^Q \phi(t - t_k) \tag{5}$$

et cette identité est minimale pour les polynômes de degré N, i.e., ces derniers ne vérifient aucune identité analogue à (5) et comportant moins de Q termes.
2. La valeur du polynôme ϕ de degré $\leq N$ en un point arbitraire t_{Q+1} est donnée explicitement en fonction des $\phi(t_k)$ par :

$$\phi(t_{Q+1}) = \frac{1}{\alpha_{Q+1}^{Q+1}} \sum_{k=1}^{Q} \frac{\alpha_k^Q}{1 - \frac{t_{Q+1}}{t_k}} \phi(t_k). \tag{6}$$

Comme l'ensemble $\mathcal{R}_N[t]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à N est un espace vectoriel de dimension $N + 1$, la décomposition (5) existe toujours pourvu que l'ensemble $\phi(t - t_k)$, $1 \leq k \leq Q$ engendre l'espace $\mathcal{R}_N[t]$. Mais a priori, les coefficients dépendent du polynôme. La relation (5) est une décomposition particulière qui est vérifiée par tous les éléments de $\mathcal{R}_N[t]$ et dans laquelle les coefficients sont indépendants du polynôme considéré. Ainsi, on peut donc représenter les polynômes de degré N sous la forme (5) de plusieurs manières différentes suivant la valeur choisie pour Q, $Q > N$. Mais la relation qui comporte le nombre minimal de termes est unique et correspond à $Q = N + 1$.

3 Caractérisation d'une fonction polynomiale

Dans la section précédente, on a établi une identité qui doit être vérifiée par tout polynôme de degré $n < Q$. Mais cette identité n'est pas une propriété caractéristique d'un polynôme. Afin d'obtenir une CNS, on va étudier la décomposition de la dérivée d'un polynôme $\phi(t)$ sous une forme analogue à (5). Nous commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 2 *Considérons le système $S'_{Q,N}$ de Van der Moonde suivant associé aux réels $t_1, ..., t_Q$ supposés distincts deux à deux et non nuls.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_Q \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_Q^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_1^N & t_2^N & \dots & t_Q^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Alors on a les 4 situations suivantes pour la solution du système (7).

1. Si $N < Q - 1$, le système est indéterminé et admet une infinité de solutions.
2. Si $N = Q - 1$, le système est carré et admet une solution unique.
3. Si $N = Q$, le système admet une solution si, et seulement si, les réels $t_1, ..., t_Q$ sont tous non nuls et vérifient la condition

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{t_k} = 0. \tag{8}$$

La solution est alors unique.

4. Si $N > Q$, quel que soit le choix des t_k, le système est impossible.

Lemme 3 *Soient $t_1, ..., t_Q$ des réels supposés distincts deux à deux et considérons les cas où le système $S'_{Q,N}$ admet une solution unique, i.e., $Q = N$ ou $Q = N + 1$. Cette solution, notée γ^Q, est alors donnée comme suit.*

Cas 1 : *$Q = N$ et les t_k vérifient (8) :*

$$\gamma_k^N = \frac{-t_k^{-1}}{\prod_{i \neq k}^{N}(1 - \frac{t_k}{t_i})}, \quad k = 1, ..., N. \tag{9}$$

Cas 2 : *$Q = N + 1$ et l'un des t_k est nul, par exemple $t_{N+1} = 0$:*

$$\gamma_k^{N+1} = \gamma_k^N, \quad k = 1, ..., N \tag{10}$$

$$\gamma_{N+1}^{N+1} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{t_k}. \tag{11}$$

Cas 3 : *$Q = N + 1$ et tous les t_k sont différents de zéro :*

$$\gamma_k^{N+1} = \frac{-t_k^{-1} + \sum_{i=1}^{Q} t_i^{-1}}{\prod_{i \neq k}^{Q}(1 - \frac{t_k}{t_i})}, \quad k = 1, ..., N + 1. \tag{12}$$

Remarque 2 *Supposons que les réels $t_1, ..., t_N$ sont tous non nuls et vérifient la condition (8) et t_{N+1} quelconque. Alors les solutions γ^N et γ^{N+1} des systèmes respectifs $S'_{N,N}$ et $S'_{N+1,N}$ vérifient :*

$$\gamma_k^N = \gamma_k^{N+1}, \quad k = 1, ..., N, \quad \text{et} \quad \gamma_{N+1}^{N+1} = 0 \tag{13}$$

et $\gamma_1^N, \dots, \gamma_N^N$ sont tous différents de zéro et déterminés de manière unique par (9).

Les deux propositions suivantes donnent une propriété caractéristique d'un polynôme.

Proposition 2 *Soient $t_1, ..., t_N$ des réels arbitraires, distincts deux à deux et non nuls et γ_k^N les coefficients introduits par (12). Alors, on a les résultats suivants.*
1. Tous les polynômes de degré $< N$ vérifient l'identité suivante :

$$\tau\phi'(t) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^N \phi(t - t_k\tau), \quad \forall t, \quad \forall\tau. \tag{14}$$

2. Si l'on suppose de plus que les t_k vérifient la condition (8), alors tous les polynôme de degré $n = N$ vérifient aussi l'identité (14) et cette identité est alors minimale pour les polynômes de degré N, i.e., ces derniers ne vérifient aucune identité analogue contenant moins de N termes.

Proposition 3 *Soit $\phi(t)$ une fonction dérivable jusqu'à l'ordre $N+1$ sur un intervalle réel et vérifiant une identité du type*

$$\tau\phi'(t) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \phi(t - t_k\tau), \quad \forall t, \quad \forall\tau. \tag{15}$$

où $t_1, ..., t_N$ sont des réels non nuls et distincts deux à deux et les γ_k des réels non nuls. Alors $\phi(t)$ est forcément un polynôme de degré $\leq N$. Si les t_k vérifient en plus la condition (8) et si l'identité (15) est minimale, alors $\phi(t)$ est de degré N et les coefficients γ_k sont déterminés d'une manière unique par les relations (9).

Remarque 3 *L'identité (14) permet seulement de dire si la fonction est un polynôme ou non et de préciser le degré de ce dernier. Elle ne permet pas de déterminer le polynôme puisque les t_k sont choisis arbitrairement et les γ_k sont déterminés uniquement à partir des t_k.*

Afin de particulariser la relation (14) pour obtenir une décomposition de la dérivée sous forme d'une somme de taux d'accroissement de $\phi(t)$ du type :

$$\Delta\phi(t) \triangleq \frac{\phi(t + t_k\tau) - \phi(t - t_k\tau)}{\tau} \tag{16}$$

on va choisir un nombre de paramètres t_k pair $Q = 2q$. Si N est pair, on prend $Q = N = 2q$ et si N est impair, on prend $Q = N + 1 = 2h + 2 = 2q$. Le nombre q est donc égal à la partie entière de $\frac{N+1}{2}$. On choisit les q paramètres $t_1, \ldots, t_q$ et l'on détermine ensuite les q autres par :

$$t_{q+k} = -t_k, k = 1, \ldots, q. \tag{17}$$

Les $2q$ paramètres t_k ainsi choisis vérifient la conditions (10). Pour qu'il soient deux à deux distincts, on impose la condition $t_i^2 \neq t_j^2$ pour $i \neq j$. Le résultat suivant précise la décomposition de la dérivée dans ce cas particulier important.

Proposition 4 *Soient $t_1, ..., t_q$ des réels non nuls vérifiant $t_i^2 \neq t_j^2$ pour $i \neq j$. Alors tout polynôme de degré $\leq 2q$ est égale à la combinaison linéaire de q taux d'accroissement arbitraires définie par :*

$$\phi'(t) = \sum_{l=1}^{q} \gamma_k \frac{\phi(t + t_k\tau) - \phi(t - t_k\tau)}{\tau}, \quad \forall t, \quad \forall\tau \tag{18}$$

où les γ_k sont donnés par :

$$\gamma_k = \frac{1}{2t_k \prod_{i\neq k}^{q}(1 - \frac{t_k^2}{t_i^2})} \quad k = 1, ..., q. \tag{19}$$

Cette identité est minimale pour les polynômes de degrés $N = 2q-1$ et $N = 2q$, i.e. il n'existe pas d'identité analogue contenant moins de q termes et vérifiée par les polynômes de degrés $N = 2q - 1$ et $N = 2q$.

Une proposition réciproque de ce résultat peut être obtenue en considérant la Proposition 3 avec des paramètres t_k vérifiant la condition (17).

4 Exemples

Exemple 1 *Les relations (4) permettent de calculer récursivement les α_k^Q à partir des conditions initiales $Q = 1$ et $\alpha_1^1 = 1$. Par exemple, pour $(t_1, t_2) = (1, 2)$ on obtient $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, -1)$ et pour $(t_1, t_2, t_3) = (1, 2, 3)$, on obtient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, -3, 1)$.*

Si l'on remplace dans (6) α_{Q+1}^{Q+1} par son expression, t_{Q+1} par τ et si l'on pose :

$$L_k^Q(\tau) \triangleq \alpha_k^Q \prod_{i\neq k}^{Q}(1 - \frac{\tau}{t_i}), \quad k = 1, \ldots, Q \tag{20}$$

on obtient :

$$\phi(\tau) = \sum_{k=1}^{Q} \phi(t_k) L_k^Q(\tau). \tag{21}$$

Les polynômes L_k^Q intervenant dans la relation (20) sont connus sous la dénomination de polynômes d'interpolation de Lagrange [Hacques] et les paramètres α_k^Q intervenant dans ces polynômes sont définis explicitement à partir des réels $t_k, k = 1, \ldots, Q$ et sont évidemment indépendants de τ.

Exemple 2 *Si l'on prend $t_k = k$, $k = 1, \ldots, Q$, les polynômes L_k^Q sont donnés par :*

$$L_k^Q(\tau) = (-1)^{Q-1} C_Q^k \prod_{i\neq k}^{Q}(1 - \frac{\tau}{i}) \tag{22}$$

où C_Q^k désigne le nombre de combinaisons de Q objets pris k à k. Si l'on prend $t_{Q+1} = Q + 1$, la relation (6) donne

$$\phi(Q + 1) = \sum_{k=1}^{Q} (-1)^{Q-k} C_{Q+1}^k \phi(k). \tag{23}$$

Se plaçant, par exemple, dans le cas particulier $\phi(t) = t^{Q-1}$, on obtient :

$$(Q + 1)^{Q-1} = \sum_{k=1}^{Q} (-1)^{Q-k} C_{Q+1}^k k^{Q-1}. \tag{24}$$

Il est intéressant de voir comment se modifient les α_k^Q lorsqu'on modifie un des paramètres t_k. Comme l'ordre des paramètres ne joue aucun rôle dans la décomposition (5), sans perte de généralité, il suffit de considérer le cas suivant. Appelons $\alpha_1^Q, ..., \alpha_Q^Q$ les coefficients associés à $t_1, ..., t_Q$

et $\beta_1^Q, ..., \beta_Q^Q$ ceux associés à $t_2, ..., t_{Q+1}$. Tenant compte des expressions (2), un calcul simple montre que les β_k^Q se déduisent des α_k^Q et de t_{Q+1} à l'aide des relations suivantes :

$$\beta_k^Q = \alpha_{k+1}^Q \frac{1 - \frac{t_{k+1}}{t_1}}{1 - \frac{t_{k+1}}{t_{Q+1}}}, k = 1, ..., Q-1 \quad (25)$$

$$\beta_Q^Q = \frac{1}{\prod_{i=2}^{Q}(1 - \frac{t_{Q+1}}{t_i})} \quad (26)$$

Dans beaucoup de problèmes pratiques, on ne connait pas le degré du polynôme mais on dispose d'un certains ensemble de points $t_1, \ldots, t_n$ pour lequels on connait les valeurs $\phi(t_k)$ du polynôme ϕ. Il est alors intéressant de pouvoir passer d'une représentation de ϕ sur un ensemble $t_i, \ldots, t_{i+Q-1}$ à une autre représentation de ϕ sur l'ensemble $t_{i+1}, \ldots, t_{i+Q}$. Les relations (25) et (26) constituent un algorithme qui répond à cette question et qui permet de calculer $\phi(t_{Q+1})$ à partir de $\phi(t_1), \ldots, \phi(t_Q)$. Si l'on veut une procédure itérative qui permet de calculer $\phi(t_{Q+2})$ à partir de $\phi(t_2), \ldots, \phi(t_{Q+1})$, on détermine les $\beta_k, k = 1, ..., Q-1$ à l'aide de la relation (25) et l'on recommence la procedure.

5 Applications : Distribution de Wigner-Ville polynomiale

L'identité (18) permet de justifier la définition suivante de la distribution de Wigner-Ville polynomiale qui est une variante de celles proposées dans [Boashash], [Arnold].

Définition 1 *La distribution de Wigner-Ville polynomiale associée à un signal $z(t)$ est la transformée de Fourier par rapport à τ du noyau défini par :*

$$K_z(t,\tau) = \prod_{k=1}^{q} [z(t + t_k\tau)z^*(t - t_k\tau)]^{\gamma_k} \quad (27)$$

soit

$$W_z(t,\nu) \triangleq \int K_z(t,\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau \quad (28)$$

où les γ_k sont donnés par les relations (19)

La distribution ainsi définie est donc égal au produit de convolution suivant :

$$W_z(t,\tau) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{q} t_k} W_z^{(\gamma_k)}(t, \frac{\nu}{t_1}) * \ldots * W_z^{(\gamma_q)}(t, \frac{\nu}{t_k}) \quad (29)$$

où

$$W_z^{(\gamma_k)}(t,\nu) \triangleq \int [z(t+\tau)z^*(t-\tau)]^{\gamma_k} e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau. \quad (30)$$

La distribution $W_z(t,\nu)$ possède des propriétés pratiques intéressantes [Boashash], [Arnold]. En particulier, pour les signaux du type

$$z(t) = e^{j2\pi\phi(t)} \quad (31)$$

où $\phi(t)$ est une phase polynomiale, le noyau $K_z(t,\tau)$ prend la forme :

$$\begin{aligned} K_z(t,\tau) &= \exp\left\{ j2\pi \sum_{k=1}^{q} \gamma_k[\phi(t + t_k\tau) - \phi(t - t_k\tau)] \right\} \\ &= \exp\{j2\pi\tau\phi'(t)\} \end{aligned} \quad (32)$$

et la distribution $W_z(t,\nu)$ est donnée par :

$$W_x(t,\nu) = \delta[\nu - \phi'(t)]. \quad (33)$$

La distribution de Wigner-Ville polynomiale des signaux de la forme (31) est donc concentrée sur le graphe de leur fréquence instantanée $\phi'(t)$ lorsque l'entier q qui intervient dans la définition de $W_x(t,\nu)$ est inférieur ou égal à la partie entière de $(N+1)/2$, N étant le degré du polynôme $\phi(t)$. La distribution polynômiale ainsi définie généralise la distribution classique de Wigner-Ville dans le sens où cette dernière est aussi concentrée sur le graphe de la fréquence instantanée dans le cas où $N \leq 2$.

6 Conclusion

Nous avons proposé une représentation de l'ensemble des polynômes de degré N à l'aide de $N+1$ paramètres arbitraires $t_k, k = 1, \ldots, N+1$. Nous avons établi des propriétés caractérisant un polynôme et donc un moyen de tester si une fonction est un polynôme ou non. Tous les résultats obtenus sont fondés sur la détermination d'un endemble de Q coefficients γ_k à partir d'un ensemble donné de Q paramètres t_k. Les algorithmes de calcul qui sont à la base de cette détermination peuvent se traduire par des récurrences sur le nombre Q. Les résultats sont donnés dans le cas d'un polynôme à coefficients réels et leurs généralisation au cas complexe ne pose aucune difficulté. Les résultats obtenus nous ont permi, en particulier, de justifier la définition de la distribution de Wigner-Ville polynomiale introduite dans [Boashash] [Arnold].

Remerciements L'auteur est reconnaissant au Professeur B. Boashash pour les multiples discussions qui ont inspiré ce travail.

7 Références

[1] G. HACQUES, Mathématiques pour l'informatique, Tome 3, Algorithmique numérique, Collection U, ARMAND COLIN, Paris, 1971.

[2] S. PELEG and B. PORAT, "Estimation and classification of polynomial phase signals", *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 37, pp. 422-429, March 1991.

[3] M. J. ARNOLD and B. BOASHASH, "The generalised theory of phase difference estimators", *IEEE Tran. Signal Processing*, Submitted,1993.

[4] B. BOASHASH and P. J. O'SHEA, "Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship with time-varying higher spectra", *IEEE Tran. Signal Processing*, Vol. 42, pp. 216-220, January 1994.

[5] M. BENIDIR, "Caractérisation d'une fonction polynomiale et applications", soumis à la revue TS,1994.