Coefficients de Réflexion des Spectres à Bande Limitée et Estimation Spectrale

Thierry CHONAVEL, Serge DEGERINE*, Philippe LOUBATON**,

EFP, GDR 134, Mansfelda 4, PO box 31, 60–854 Poznań, Poland, chonavel@efp.poznan.pl
*LMC-IMAG, GDR 134, URA 397, BP53, 38041 Grenoble, cedex 9, serge.degerine@imag.fr
**ENST, GDR 134, Dept Signal, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, loubaton@sig.enst.fr

Résumé : Le problème de l'estimation d'un spectre à partir de la connaissance de ses premiers coefficients de corrélation peut être vu comme celui de l'extension de cette séquence. Dans le cas de signaux de bande limitée fixée, ce problème peut être abordé de façon plus satisfaisante à partir de l'extension de la séquence de ses premiers coefficients de réflexion. Aussi, on étudie ici les propriétés des coefficients de réflexion des signaux à bande limitée. En particulier, on montre qu'il est possible de construire une extension à bande limitée de façon indépendante des données. Ces résultats sont illustrés par des simulations.

Absract : The problem of the estimation of a spectrum from its first correlation coefficients can be considered as that of extending this sequence of correlations. For band-limited signals with known bandwith, this problem can be addressed in a more convenient way by looking for an extension of the corresponding sequence of reflexion coefficients. In view to do this, we study the properties of the reflexion coefficients of band-limited processes. In particular, we show that it is possible to build a band-limited extension that is independent from the given reflexion coefficients. These results are illustrated by simulations.

1. Introduction

Dans les problèmes d'estimation de la densité spectrale $f(\omega)$ d'un signal discret stationnaire à valeurs complexes $X=(X_n)_{n\in Z}$ une approche possible consiste à chercher un spectre dont les $N+1$ premiers coefficients de corrélation correspondent à ceux du signal, donnés par $r_n=E(X_{n+k}\bar{X}_k)$ $(k=0,N)$. Ce probème équivaut à celui de la construction d'une extension infinie $r_{N+1},r_{N+2},\dots$ de la séquence $(r_n)_{n=0,N}$.

Il est bien connu que toute extension positive $r_{N+1},r_{N+2},\dots$ est caractérisée de façon équivalente par un ensemble de coefficients $\beta_{N+1},\beta_{N+2},\dots$, appelés coefficients de réflexion, qui appartiennent au disque unité, noté D. Les coefficients de réflexion, encore appelés coefficients de Schur, ont été introduits par ce mathématicien au début du siècle dans le cadre de l'étude de certains problèmes d'interpolation. Ils apparaissent également en statistiques sous le nom d'autocorrélations partielles. En traitement du signal, ils sont couramment employés, dans de nombreuses situations d'estimation spectrale [kay], et sont en particulier à la base de l'algorithme de Levinson [lev]. Plus récemment, ils ont été utilisés pour estimer, au sens du maximum de vraisemblance, des matrices de covariance de processus stationnaires (e.g. [deg1]).

Dans cet article, nous nous intéressons aux extensions positives, dites à bande limitée, pour lesquelles le spectre μ défini par

$$r_n = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{in\omega}d\mu(\omega) \qquad (1)$$

$(n\in Z)$ est porté par un sous intervalle $[-\Omega,\Omega]$ de $]-\pi,\pi]$, fixé à l'avance. Concrètement, cette problématique sera pertinente dans des contextes où l'on sait *a priori* que le spectre du signal à estimer possède un support contenu dans $[-\Omega,\Omega]$. A la différence de diverses contributions antérieures (e.g. [cho-lou], [cho2]), on cherche ici à caractériser ce type d'extension par le biais de leurs coefficients de réflexion β_{N+k} $(k>0)$. Cette nouvelle approche est motivée par les considérations indiquées ci dessous.

Rappelons qu'une suite $(r_n)_{n=0,N}$ possède une extension positive à bande limitée si et seulement si les matrices de Toeplitz Γ_N et $\tilde{\Gamma}_{N-1}$ de tailles respectives $N+1$ et N, et définies par $[\Gamma_N]_{i,j}=r_{i-j}$ et $[\tilde{\Gamma}_{N-1}]_{i,j}=\tilde{r}_{i-j}=r_{i-j+1}+r_{i-j-1}-2r_{i-j}\cos\Omega$ sont positives. On peut alors caractériser l'ensemble des coefficients r_{N+1} tels que la séquence $(r_n)_{n=0,N+1}$ possède des extensions à bande limitée. En itérant ce procédé, on pourrait en théorie construire récursivement une extension positive à bande limitée de $(r_n)_{n=0,N}$. Malheureusement, cette technique, déjà mentionnée dans [cho-lou], se heurte à des problèmes numériques liés au mauvais conditionnement des matrices Γ_N et $\tilde{\Gamma}_{N-1}$ associées à des extensions à bande limitée.

Une autre approche, que nous développons dans cet article, consiste à caractériser itérativement les coefficients de réflexion $(\beta_{N+k})_{k>0}$ tels que les séquences $(r_n)_{n=0,N+k}$ correspondantes possèdent des extensions à bande limitée. Pour cela, on commence par exprimer la positivité des matrices Γ_N et $\tilde{\Gamma}_{N-1}$ en termes de séquences de coefficients de réflexion correspondantes, et on met en évidence des relations simples qui relient ces deux séquences. On en déduit alors facilement la forme des coefficients β_{N+1} pour lesquels le coefficient r_{N+1} correspondant permet à la séquence $(r_n)_{n=0,N+1}$ de posséder des extensions à bande limitée. On montre en particulier que cet ensemble correspond à l'intersection du disque unité et d'un autre disque qui dépend explicitement de la séquence $(r_n)_{n=0,N+1}$. On peut alors construire de façon itérative une extension $(\beta_{N+k})_{k>0}$ de la séquence des coefficients de réflexion sans être confronté aux problèmes numériques évoqués précédemment.

Par ailleurs, on sait que, sans contrainte de bande limitée, la séquence $\beta_{N+k}= 0$ $(k>0)$ fournit un procédé très simple d'extension de la séquence $(\beta_n)_{n=0,N}$ qui permet d'obtenir le fameux estimateur spectral du maximum d'entropie. Suivant cette idée, on propose dans cette article un procédé systèmatique pour construire une extension à bande limitée particulière qui soit simple, indépendante des données $(\beta_n)_{n=0,N}$, et pour laquelle le spectre correspondant puisse être calculé sous forme analytique. On peut démontrer (en utilisant [ger] p.134 et [cho1] p.62) qu'il n'existe pas d'extension à bande limitée pour lesquelles les valeurs de β_{N+k} sont constantes $(k>0)$. En fait, les extensions à bande limitée les plus simples que l'on puisse envisager alternent sur deux valeurs. En particulier, pour un choix convenable de β_{N+1}, la suite $\beta_{N+k} =(-1)^{N+k+1}\cos(\Omega/2)$ $(k>1)$ génère une extension à bande limitée de la séquence $(r_n)_{n=0,N}$.

A cette séquence particulière de coefficients de réflexion $(\beta_{N+k})_{k>1}$, on peut associer une fonction de Schur, (c'est-à-dire une fonction qui est holomorhe et de module inférieur à 1 dans D), notée $S_{N+1}(z)$, dont le calcul est simple [foi-fra]. On peut alors calculer la densité spectrale $f(\omega)$ associée à l'extension. Elle est donnée par l'application du théorème de Riesz-Herglotz (e.g. [kre-nud]) :

$$f(\omega)=\frac{\sigma^2_{N+1}\left(1-\left|S_{N+1}(e^{i\omega})\right|^2\right)}{\left|Q^*_{N+1}(e^{i\omega})-e^{i\omega}S_{N+1}(e^{i\omega})Q_{N+1}(e^{i\omega})\right|^2} \tag{2}$$

où $Q_{N+1}(z)$ est le polynôme de Szegö de première espèce de degré $N+1$ associé à la séquence $(\beta_n)_{n=0,N+1}$, σ^2_{N+1} est la variance de l'erreur de prédiction correspondante, et $A^*(z)=z^{deg(A)}\overline{A}(1/z)$ ($\overline{A}$ désigne la conjugaison des coefficients).

On démontre un certain nombre de propriétés intéressantes de $f(\omega)$ et des estimateurs du maximum d'entropie qui lui sont associés. Les résultats sont illustrés par des exemples présentés dans le dernier paragraphe.

2. Coefficients de réflexion des spectres à bande limitée

On sait (e.g. [aru-pot]), qu'il existe des extensions de $(r_n)_{n=0,N}$ qui possèdent un spectre absolument continu de densité portée par $[-\Omega,\Omega]$ si et seulement si $\Gamma_N>0$ et $\tilde{\Gamma}_{N-1}>0$. On montre que de façon équivalente les coefficients de réflexion $(\beta_n)_{n=0,N}$ et $(\tilde{\beta}_n)_{n=0,N-1}$ associés respectivement aux séquences $(r_n)_{n=0,N}$ et $(\tilde{r}_n)_{n=0,N-1}$ doivent vérifier $\beta_0>0$ et $\tilde{\beta}_0>0$ (on pose par définition $\beta_0 = r_0$ et $\tilde{\beta}_0 = \tilde{r}_0$), et que les coefficients $(\beta_n)_{n=1,N}$ et $(\tilde{\beta}_n)_{n=1,N-1}$ doivent être à l'intérieur de D. On supposera ces conditions vérifiées dans toute la suite. Notons que les coefficients de réflexion peuvent être obtenus à partir de l'algorithme de Schur ([foi-fra]) ou de l'algorithme de Levinson appliqué aux séquences $(r_n)_{n=0,N}$ et $(\tilde{r}_n)_{n=0,N-1}$.

On va voir que les coefficients β_n et $\tilde{\beta}_n$ sont reliés par des relations simples. Pour cela, rappelons que le calcul récursif par l'algorithme de Levinson des polynômes de Szegö de première espèce $(Q_n(z))_{n=0,N}$ associés à $(\beta_n)_{n=0,N}$ s'écrit

$$Q_n(z) = zQ_{n-1}(z)-\beta_n Q^*_{n-1}(z) \tag{3}$$

avec $Q_0(z)=1$. On définit de même les polynômes $(\tilde{Q}_n(z))_{n=0,N-1}$ asociés à $(\tilde{\beta}_n)_{n=0,N-1}$, et on montre ([alp-lou]-[deg2]) que pour $n\geq 2$ $Q_n(z)$ et $\tilde{Q}_{n-1}(z)$ sont liés par les relations

$$(z-e^{i\Omega})(z-e^{-i\Omega})\tilde{Q}_{n-1}(z)=(z+R_n)Q_n(z)-C_nQ^*_n(z) \tag{4}$$

où $R_n = \tilde{\sigma}^2_{n-1}/\sigma^2_n$, σ^2_n et $\tilde{\sigma}^2_{n-1}$ sont les erreurs de prédiction associées à $Q_n(z)$ et à $\tilde{Q}_{n-1}(z)$, et $C_n = \tilde{\beta}_{n-1}-\beta_n R_n$. Comme $Q_n(0) =-\beta_n$ et $\tilde{Q}_n(0)=-\tilde{\beta}_n$, on déduit alors simplement de (4) et d'un calcul direct pour $n=0,1$, le résultat suivant :

Proposition 1 : *les coefficients $\tilde{\beta}_n$ s'expriment en fonction des coefficients β_n par*

$$\tilde{\beta}_0 = 2\beta_0\left[Re(\beta_1)-cos(\Omega)\right],\ \tilde{\beta}_1=\beta_1+(\beta_2+1)/R_1$$
$$\tilde{\beta}_n=\beta_n+(\beta_{n+1}+\tilde{\beta}_{n-1})/R_n \text{ pour } n\geq 2 \tag{5}$$

Par suite, il suffit d'appliquer l'algorithme de Levinson à la seule séquence $(r_n)_{n=0,N}$ pour en déduire les séquences $(\beta_n)_{n=0,N}$ et $(\tilde{\beta}_n)_{n=0,N-1}$. Outre un test simple du caractère bande limitée d'une séquence, on obtient par la proposition 1 un procédé de construction des extensions à bande limitée d'une séquence de coefficients de réflexion que l'on va maintenant détailler.

3. Extension à bande limitée d'une séquence de coefficients de réflexion

Nous cherchons maintenant à étendre la séquence $(\beta_n)_{n=0,N}$. D'après (5), il apparait que les contraintes $|\tilde{\beta}_N|\leq 1$ et $|\beta_{N+1}|\leq 1$ indiquent que l'ensemble des valeurs admissibles pour β_{N+1} est défini par l'intersection de D avec le disque D_N, de centre C_N et de rayon R_N. On peut montrer que les cercles ∂D et ∂D_n se coupent exactement en deux points distincts, donnés par $\beta^-_{N+1}=B_N(e^{-i\Omega})$ et $\beta^+_{N+1}=B_N(e^{i\Omega})$, où

$B_N(z) = zQ_N(z)/Q_N^*(z)$. De plus, la relation (4) exprimée en $z=e^{\pm i\Omega}$ fournit les coefficients $\tilde{\beta}_N^{\pm} = -e^{-(\pm i\Omega)}\beta_{N+1}^{\pm}$ correspondants à $\beta_{N+1}^{\pm}$. Comme $\beta_{N+1}^{\pm} = C_N + \tilde{\beta}_N^{\pm} R_N$, il vient finalement que $\beta_{N+1}^{\pm} = C_N/(1+R_N e^{\mp i\Omega})$.

Il est important de noter que l'extension directe de la séquence $(r_n)_{n=0,N}$ conduit à chercher r_{N+k} (k>0) dans l'intersection de 2 disques dont les rayons respectifs sont σ_n^2 et $\tilde{\sigma}_{n-1}^2$ qui tendent vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Ce problème peut être éliminé lorsque c'est la séquence $(\beta_n)_{n=0,N}$ que l'on étend. En effet, remarquons que $R_{N+k+1}=R_{N+k}\times(1-|\tilde{\beta}_{N+k}|^2)/(1-|\beta_{N+k+1}|^2)$. Il est donc possible, par un choix convenable de β_{N+k+1} de faire varier R_{N+k+1} entre 0 (lorsque $\beta_{N+k+1}\to\partial D$) et $+\infty$ (lorsque $\beta_{N+k+1}\to\partial D_{N+k}$) Ainsi, R_{N+k+1} ne tend pas nécessairement vers 0, ce qui est vérifié en particulier si on impose à R_{N+k+1} d'être indépendant de k, (i.e. $R_{N+k+1}/R_{N+k}=1$ pour tout k). On montre que cela revient à prendre pour β_{N+k+1} un point de l'arc $\{C_{N+k}/(1+R_{N+k}e^{j\phi});\phi\in]-\Omega,\Omega[\}$.

Parmis toutes les stratégies possibles pour obtenir une extension à bande limitée de la séquence $(\beta_n)_{n=0,N}$, certaines conduisent à une suite $(\beta_n)_{n>N}$ qui alterne sur deux valeurs. C'est le cas des trois extensions définies respectivement par $\tilde{\beta}_n = \beta_n$, $\beta_n = \frac{1}{2}(\beta_n^+ + \beta_n^-)$, et $\beta_n = -\tilde{\beta}_{n-1}$ pour $n>N$.

Le fait que ces stratégies conduisent à des séquences alternées les rend particulièrement intéressantes car cette propriété permet de calculer de façon simple les fonctions de Schur qui leurs sont associées, et par suite leur densité spectrale via la relation (2). Pour obtenir ces fonctions de Schur, commençons par rappeler que si $(\beta_n)_{n>k}$ sont les coefficients de Schur associés à une fonction de Schur $S_k(z)$, alors la fonction de Schur $S_{k+1}(z)$ associée à la séquence $(\beta_n)_{n>k+1}$ est liée à $S_k(z)$ par la relation (e.g. [foi-fra])

$$S_{k+1}(z) = \frac{S_k(z)-\bar{\beta}_{k+1}}{z(1-\beta_{k+1}S_k(z))} \qquad (6)$$

Par suite, comme $(\beta_n)_{n>N+3} = (\beta_n)_{n>N+1}$, il est clair que $S_{N+3}(z)=S_{N+1}(z)$. En appliquant deux fois la relation (6), on obtient alors une équation du second degré en $S_{N+1}(z)$ dont la racine de module inférieur à 1 pour $|z|<1$ fournit $S_{N+1}(z)$.

Il existe un cas particulièrement intéressant qui est celui pour lequel on choisit β_{N+1} de telle sorte que l'on ait $R_{N+1}=1$. L'ensemble des points β_{N+1} situés dans l'intersection de D et de D_N et qui satisfont cette condition définit l'arc de cercle $\delta=\{(C_N - 2\beta R_N e^{i\alpha})/(1-R_N);\alpha\in]\alpha^+,\alpha^-[\}$, avec

$$\alpha^{\pm} = \phi_N \pm \frac{(1+R_N)\beta}{\sqrt{1+R_N^2+2R_N\cos\Omega}} \qquad (7)$$

où $\beta=\cos(\Omega/2)$ et $\phi_N = \arg(C_N)$. Pour $n>N+1$, les trois stratégies indiquées plus haut deviennent alors équivalentes, et on a $\beta_n = (-1)^{n+1}\beta e^{i\phi_{N+1}}$, où $\phi_{N+1}=\arg(C_{N+1})$. L'équation $S_{N+3}(z) = S_{N+1}(z)$ conduit alors à

$$S_{N+1}(e^{i\omega}) = e^{-i\phi_{N+1}}e^{-i\omega/2}\left[\cos\frac{\omega}{2} - \sqrt{\cos^2\frac{\omega}{2}-\beta^2}\right]/\beta \qquad (8)$$

pour $\omega\in]-\Omega,\Omega[$. En choisissant

$$\beta_{N+1} = [C_N - 2sign(C_N)R_N\beta]/(1-R_N) \qquad (9)$$

on a $\phi_{N+1}=0$, et $S_{N+1}(z)$ présente alors l'avantage d'être défini de façon indépendante des données. On peut aussi choisir

$$\beta_{N+1} = [C_N - 2R_N\beta e^{i\phi_N}]/(1-R_N) \qquad (10)$$

On a dans ce cas $\phi_{N+1}=\phi_N+\pi$. La valeur de β_{N+1} donnée par (10) est le point de δ qui maximise l'erreur de prédiction de la séquence étendue jusqu'à l'ordre $N+k$, donnée par

$$\sigma_{N+k}^2 = \beta_0 \prod_{n=1,N}(1-|\beta_n|^2)(1-|\beta_{N+1}|^2)\sin(\Omega/2)^{2(k-1)} \qquad (11)$$

Cette propriété est intéressante, car σ_{N+k}^2 peut être vu comme une mesure de régularité de la densité spectrale de l'extension à l'ordre $N+k$.

4. Estimateurs au sens du maximum d'entropie des séquences étendues

Dans ce paragraphe, on va présenter quelques remarques concernant les estimateurs spectraux du maximum d'entropie associés aux spectres à bande limitée, et en particulier à ceux définis à partir de l'estimateur spectral décrit au paragraphe précédent.

Pour une séquence à bande limitée de coefficients de réflexion $(\beta_k)_{k=0,N}$, l'extension à bande limitée construite au paragraphe précédent (définie par (8)), et notée $f_{N+1}(\omega)$, possède des estimateurs du maximum d'entropie aux différents ordres que l'on notera $h_n(\omega)$. En généralisant les résultats de [deg2], on peut démontrer que pour $\omega\in]-\Omega,\Omega[$, ces estimateurs $h_n(\omega)$ possèdent des propriétés remarquables. En effet, on a les résultats suivants :

Proposition 2 : *pour* $\omega\in]-\Omega,\Omega[$, *et* $k>1$,

$$\alpha(\omega)f_{N+1}(\omega) \le h_{N+k}(\omega) \le \alpha(\omega)^{-1}f_{N+1}(\omega) \qquad (12)$$

où $\alpha(\omega) = \frac{\cos(\omega/2)-\beta}{\cos(\omega/2)+\beta}$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{l=0,n} h_l(\omega) = f_{N+1}(\omega)$

Ces résutats sont intéressants pour la raison suivante : la convergence vers $f(\omega)$ de la suite des estimateurs du maximum d'entropie associés à une densité spectrale $f(\omega)$ est assurée lorsque $f(\omega)$ est suffisamment régulière et de plus vérifie

$$\int_{[-\pi,\pi]} \log[f(\omega)]d\omega > -\infty \qquad (13)$$

([ger] p.86). Malheureusement, cette dernière condition n'est pas réalisée pour les spectres à bande limitée, et pour ceux ci la suite des estimateurs du maximum d'entropie n'est pas convergente ([ger] p.9). Cependant, la proposition 2 établit que la suite $h_n(\omega)$ associée à l'extension de densité spectrale $f_{N+1}(\omega)$ est bornée par les fonctions $\alpha(\omega)f_{N+1}(\omega)$ et $\alpha(\omega)^{-1}f_{N+1}(\omega)$, et que sa moyenne converge vers $f_{N+1}(\omega)$.

Pour les points ω situés hors de $]-\Omega,\Omega[$, on a établi le résultat général suivant, qui s'applique en particulier à $f_{N+1}(\omega)$:

Proposition 3 : *la suite des estimateurs du maximum d'entropie associés à un spectre à bande limitée converge vers 0 en tout point situé hors de la bande du spectre.*

5. Exemples

Dans un premier temps, on considère le spectre à bande limitée défini par la séquence $\beta_0=1$, et $\beta_n=(-1)^{n+1}cos(\Omega/2)$ ($n>0$). Sur la figure 1, on a tracé ce spectre dont la densité vaut

$$f(\omega)=\frac{1}{1-\beta}\left[1-\frac{\beta^2}{cos^2(\omega/2)}\right]^{1/2} \qquad (14)$$

sur $[-\Omega,\Omega]$. On a également représenté les fonctions majorantes et minorantes des estimateurs du maximum d'entropie $h_n(\omega)$ associées à ce spectre, et données par (12), ainsi que $h_n(\omega)$ pour $n=10$ et $n=20$. Ici, on a choisi $\Omega=\pi/2$. De plus, on a tracé la moyenne $(1/21)\Sigma_{n=0,20}h_n(\omega)$ dont on vérifie la bonne proximité à $f(\omega)$.

Sur la figure 3, on représente l'extension à bande limitée obtenue suivant le même procédé, mais pour le spectre dont la densité est l'indicatrice de $[-\Omega,\Omega]$. On voit, en prenant seulement $N+1=6$ que l'extension à bande limitée est beaucoup plus régulière que celle du maximum d'entropie à l'intérieur de la bande.

6 Conclusion

Dans cette article, on a montré comment le problème de l'estimation spectrale à bande limitée pouvait être envisagé de façon satisfaisante comme un problème particulier d'extension d'une séquence de coefficients de réflexion. On a donné un procédé qui fournit une expression analytique simple d'un estimateur spectral à bande limitée et qui de plus possède certaines propriétés très satisfaisantes.

Références

[alp-lou] D. ALPAY, Ph. LOUBATON, The partial Trigonometric Problem on an Interval : the Matrix Case, a paraitre *dans Linear Algebra and its applications*.

[aru-pot] K.S. ARUN, L.E. POTTER, Existence and Uniqueness of Band-Limited, Positive Semi-Definite Extrapolations, *IEEE Trans. Acous. Speech Sig. Proc.*, vol. 38, n. 3, pp. 673-676, mars 1990.

[cho1] T. CHONAVEL, *Estimation Spectrale à Bande Limitée et Traitement d'Antenne*, document de thése, Télécom Paris, 1993.

[cho2] T. CHONAVEL, Construction d'Estimateurs spectraux Absolument continus à Partir d'Estimateurs Ponctuels Particuliers, Application aux Signaux à Bande, *actes du Quatorziéme colloque GRETSI*, pp.73-76, septembre 1993

[cho-lou] Th. CHONAVEL, Ph. LOUBATON, Extension à Bande Limitée d'une Suite de Corrélations Contiguëes, *actes du Treiziéme colloque GRETSI*, pp.381-384, septembre 1991.

[deg1] S. DEGERINE, Maximum Likelihood Estimation of Autocovariance Matrices from replicated Short Time Series, *Jour. Time Series Analysis*, vol. 8, n. 2, pp. 135-146.

[deg2] S. DEGERINE, Autocorrélations Partielles et Spectres à Bande Limitée, *Rapport Technique, Laboratoire de Modélisation et Calcul*, IMAG, Grenoble, juil. 1994.

[kay] S. M. KAY, *Modern Spectral Estimation, Theory and Applications*, Prentice Hall, 1988.

[kre-nud] M. G. KREIN, A. NUDEL'MAN, *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*, Transl. Math. Monographs 50, American Math. Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[foi-fra] C. FOIAS, A.E. FRAZO, *The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems*, Birkhäuser Verlag, Berlin, 1990.

[ger] Ya. L. GERONIMUS, *Polynomials Orthogonal on a Circle and Interval*, Pergamon Press, Paris, 1960.

[lev] N. LEVINSON, The Wiener RMS (root mean Square Error) Criterion in Filter Design and Prediction, *J. Math. Phys.*, 25, pp. 261-278, 1947.

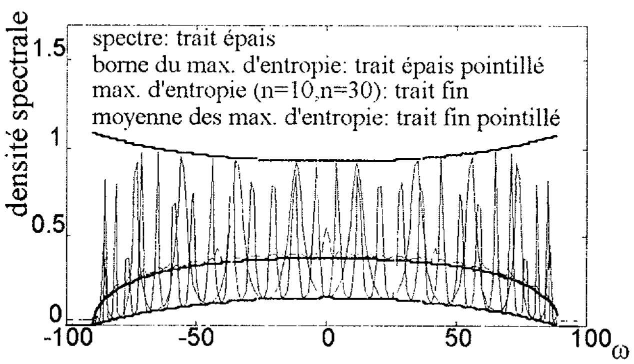

Figure 1

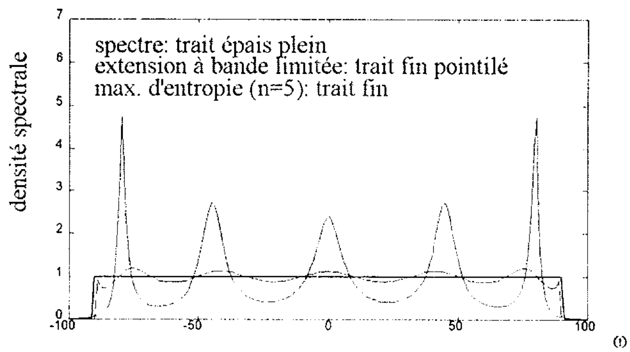

Figure 2