



ALGORITHME DE BURG REGULARISE FSDS (Fonctionnelle Stabilisatrice de Douceur Spectrale) COMPARAISON AVEC L'ALGORITHME DE BURG MFE (Minimum Free Energy)

Frédéric BARBARESCO

THOMSON-CSF, Division Systèmes Défense et Contrôle
Direction Technique et Scientifique, Service Etudes Théoriques et Simulations
7, rue des Mathurins 92223 BAGNEUX

RESUME

Nous présentons une analyse spectrale autorégressive obtenue par la régularisation de l'algorithme de Burg (BURG RFSDS). Cette méthode consiste à déterminer le coefficient de réflexion à chaque ordre du modèle par minimisation de la moyenne quadratique des erreurs de prédiction directe et rétrograde, sous la contrainte de douceur spectrale introduite par Kitagawa et Gersch [1]. Cette régularisation résout le problème de la détermination de l'ordre du modèle, dans le cas d'un nombre faible d'échantillons où les statistiques deviennent "non consistantes", tout en utilisant les avantages des filtres en treillis. L'algorithme est généralisable au cas du filtrage, en définissant un coefficient de réflexion régularisé multisegment. BURG RFSDS est comparé à l'algorithme récent de Silverstein et Pimbley [2] : BURG MFE, qui développe une analogie entre traitement de signal et physique statistique sur la base de la notion d'énergie libre.

1. PREAMBULE

Dans la méthode d'estimation spectrale haute résolution de Burg, le choix de l'ordre du processus AR sous-jacent est un problème crucial, qui a des conséquences directes sur la résolution de l'analyse spectrale (un ordre faible livrera un estimateur lissé alors qu'un ordre trop important induira des pics parasites). De nombreux critères ont été proposés pour estimer pratiquement cet ordre : les critères basés sur l'énergie de l'erreur de prédiction (critère de Akaike, de Hannan, de Rissanen), les critères basés sur la blancheur du résidu (test statistique de portmanteau, la mesure de l'aplatissement du spectre), les critères basés sur l'optimisation d'un compromis entre un terme de biais et un terme de variance afin de déterminer l'ordre optimal au sens de ce compromis. Dans certaines applications, l'incertitude sur la détermination de l'ordre du modèle, qui est liée au fait que l'horizon d'observation est extrêmement court, peut être grande. En effet, pour des horizons d'observation courts, les statistiques utilisées pour estimer l'ordre optimal du modèle AR ne sont plus valides (l'indétermination sur les estimations devient trop grande) car les erreurs sont non normalement distribuées. De plus, l'estimation de l'ordre du modèle peut être coûteuse en temps de calcul et donc pénalisant pour des applications temps réel.

C'est pourquoi nous avons développé une méthode de régularisation de l'algorithme de Burg qui permette de choisir un ordre de modèle élevé sous une contrainte de douceur spectrale. Cette idée de contrainte de douceur spectrale a été introduite, pour la première fois, en 1985 par Kitagawa et Gersch [1], en définissant une classe d'a priori de douceur spectrale. Il a été montré que lorsque le nombre d'échantillons devient de l'ordre du modèle, la solution du problème des moindres carrés est inacceptable en raison de la variance excessive de la solution qui peut aller jusqu'à la singularité de la matrice normale du problème. Il s'agit d'un problème "mal-posé" qu'il s'agit de stabiliser. Pour ce faire, nous allons introduire une fonctionnelle stabilisatrice au critère initial. Notre approche consiste à régulariser la solution de l'algorithme de Burg, qui présente le triple avantage d'être implantable en temps réel (coût calculatoire faible) avec une structure treillis, d'être généralisable au cas multisegment introduit par Haykin dans le cas du filtrage ou du lissage temporel et d'être robuste face au bruit de calcul, aux erreurs de quantification et d'arrondis. Notre approche est, en ce sens, plus comparable à l'application du principe du minimum d'énergie libre à l'algorithme de Burg, développé par S.D. Silverstein et J.M. Pimbley [2].

2. PRESENTATION DES DIFFERENTES APPROCHES

ABSTRACT

We expound an autoregressive spectrum analysis based on a regularized method of Burg algorithm (BURG RFSDS). A reflection coefficient is calculated, for each AR model order, by minimizing the sum of the mean-squared values of the forward and backward prediction errors, with spectral smoothness constraints proposed by Kitagawa & Gersch [1]. This regularised Burg algorithm solves AR model order estimation when only a short span of data is available for analysis, and when statistics are no longer valid. This algorithm conserves lattice structure advantages, and can be bring in widespread use with a multisegment regularized reflection coefficient version. BURG RFSDS is compared with Silverstein & Pimbley's Algorithm : BURG MFE (Minimum Free Energy) [2], based on the statistic physic model of free energy.

L'algorithme de Burg utilise la contrainte de Levinson sur les coefficients autorégressifs et optimise le coefficient de réflexion par minimisation de la moyenne quadratique des erreurs de prédiction directe et rétrograde. La solution optimale (formule de Burg) satisfait la condition de stabilité (prédicteur à phase minimale et inverse stable).

Silverstein et Pimbley utilise une analogie avec la physique statistique, qui dit qu'une fonction de densité de probabilité qu'un système occupe un état spécifique d'énergie E est représentée par une fonction de distribution de Gibbs. L'expression de l'énergie libre montre qu'il existe un équilibre entre énergie basse et entropie élevée. Augmenter la température du système accentue l'importance de l'entropie au dépend de l'énergie. Inversement, la réduction de la température jusqu'au zéro absolu force le système dans le plus faible état d'énergie. Ainsi, la température sert de paramètre de contrôle du système qui conduit les fluctuations. Silverstein et Pimbley ont défini une fonction de coût qui est une fonction monotone de l'entropie spectrale H : $-\alpha.H$ par analogie directe avec le terme $-T.S$, terme entropique de l'énergie libre en physique statistique. α définit la température effective du traitement de signal. Silverstein et Pimbley ont pris comme mesure de l'entropie spectrale H, l'entropie suivant la forme de Shannon-Burg et non pas quelqu' autre faisant partie de l'ensemble infini des mesures spectrales lissées, parce que c'est la seule qui conduisent à une expression simple du gradient de la fonction de coût par rapport au coefficient de réflexion.

$$\Phi(E) = e^{-\frac{F-E}{KT}} \text{ avec } \begin{cases} \Phi(E) : \text{fonction de densité de probabilité} \\ \text{que le système occupe l'état E d'énergie} \\ E : \text{énergie du système} \\ F : \text{énergie libre du système} \\ T : \text{température d'équilibre du système} \\ K : \text{constante de Boltzmann} \end{cases}$$

L'entropie du système est donnée par : $S = -K \cdot \langle \log \Phi(E) \rangle$
D'où l'expression de l'énergie libre : $F = \langle E \rangle - T.S$

Notre méthode de régularisation de l'algorithme de Burg consiste à déterminer le coefficient de réflexion par minimisation, à chaque étage du filtre treillis, de la moyenne quadratique des erreurs de prédiction directe et rétrograde sous la contrainte de douceur spectrale introduite par Kitagawa et Gersch.

Nous présentons ici de façon comparative les fonctions de coût définies dans les méthodes que nous venons de citer (avec m l'ordre du modèle AR).



. Burg par Maximum d'Entropie :

$$E_{ME}^{(m)} = U^{(m)} \quad \text{avec} \quad U^{(m)} = \frac{1}{2 \cdot (N-m)} \sum_{n=m+1}^N |f_m(n)|^2 + |b_m(n)|^2$$

. Burg par Minimum d'Énergie Libre :

$$E_{MFE}^{(m)} = U^{(m)} - \alpha \cdot H^{(m)} \quad \text{avec} \quad H^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \ln \left[\frac{P_m}{|A^{(m)}(f)|^2} \right] \cdot df$$

. Burg Régularisé par Fonctionnelle Stabilisatrice de Douceur Spectrale :

$$E_{RFSDS}^{(m)} = U^{(m)} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot D_k^{(m)} \quad \text{avec} \quad D_k^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{d^k A^{(m)}(f)}{df^k} \right|^2 \cdot df$$

3. RESOLUTION DES DIFFERENTES APPROCHES

. **Burg par Maximum d'Entropie : (BURG ME)**

La solution de Burg simple conduit à l'expression classique du coefficient de réflexion, ou formule de Burg :

$$\nabla_{\mu_m} U^{(m)} = \mu_m \cdot G^{(m)} + D^{(m)*}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} G^{(m)} = \frac{1}{N-m} \sum_{n=m+1}^N [|f_{m-1}(n)|^2 + |b_{m-1}(n-1)|^2] \\ D^{(m)} = \frac{2}{N-m} \sum_{n=m+1}^N b_{m-1}(n-1) \cdot f_{m-1}^*(n) \end{cases}$$

$$\text{Soit} \quad \mu_m = - \frac{D^{(m)*}}{G^{(m)}}$$

La condition sur les paramètres autorégressifs, introduite par Levinson et généralisée par Burg, lie entre eux les coefficients AR à l'ordre m avec ceux définis à l'ordre m-1. De cette relation de récurrence, on déduit une relation de récurrence sur les $A^{(m)}(f)$, utile dans la suite :

$$A^{(m)}(f) = A^{(m-1)}(f) + \mu_m \cdot e^{j2\pi f m} \cdot A^{(m-1)*}(f)$$

. **Burg par Minimum d'Énergie Libre : (BURG MFE)**

Avant de présenter notre travail sur l'algorithme de Burg régularisé, nous allons résumer l'approche par Minimum d'énergie libre développée récemment par Silverstein et Pimbley. La solution du Minimum d'énergie libre se résume à la nullité du gradient par rapport à μ_m :

$$\text{Minimum de } E^{(m)} = U^{(m)} - \alpha \cdot H^{(m)}$$

$$\text{avec} \quad H^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \ln \left[\frac{P_m}{|A^{(m)}(f)|^2} \right] \cdot df = \ln(P_m) - \int_{-1/2}^{1/2} 2 \operatorname{Re}[\ln(A^{(m)*}(f))] \cdot df$$

On calcule :

$$\nabla_{\mu_m} H^{(m)} = \frac{\nabla_{\mu_m} P_m}{P_m} - 2 \cdot \operatorname{Re} \left[\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\nabla_{\mu_m} A^{(m)*}(f)}{A^{(m)*}(f)} \cdot df \right]$$

$$\nabla_{\mu_m} A^{(m)*}(f) = 2 \cdot e^{j2\pi f m} \cdot A^{(m-1)}(f) \quad \text{en utilisant la récurrence sur les } A^{(m)}(f)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi f m} \cdot \frac{A^{(m-1)}(f)}{A^{(m)*}(f)} \cdot df = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=1} \frac{z^{m-1} \cdot A^{(m-1)}(z)}{A^{(m)*}(1/z^*)} \cdot dz = 0$$

La nullité de la dernière intégrale suppose que $|\mu_m| < 1$ (assure que $A^{(m)}(z)$: polynôme à minimum de phase), or nous verrons dans la suite que cette condition est vérifiée. Le même résultat peut être trouvé, par la décomposition cepstrale, en remarquant que :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln \left[\frac{P_m}{|A^{(m)}(f)|^2} \right] \cdot df = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{-jk2\pi f} \cdot df = c_0 = \ln(P^{(m)})$$

$$\text{Le gradient se réduit à : } \nabla_{\mu_m} H^{(m)} = \frac{\nabla_{\mu_m} P_m}{P_m} \quad \text{or} \quad P_m = (1 - |\mu_m|^2) \cdot P_{m-1}$$

On en déduit l'expression finale du gradient de la fonction de coût définie pour le minimum d'énergie libre (MFE) :

$$\nabla_{\mu_m} H^{(m)} = \frac{-2 \cdot \mu_m}{1 - |\mu_m|^2} \quad \text{car} \quad \nabla_{\mu_m} |\mu_m|^2 = 2 \cdot \mu_m$$

d'où l'équation vérifiée par μ_m :

$$\nabla_{\mu_m} E^{(m)} = 0 \quad \Rightarrow \quad D^{(m)*} + \mu_m \cdot G^{(m)} = \frac{-2 \cdot \alpha \cdot \mu_m}{1 - |\mu_m|^2}$$

Pour simplifier cette expression, on montre que le produit $\mu_m \cdot D^{(m)}$ est réel et que la solution du Minimum d'énergie libre se réduit à la résolution des zéros du polynôme du 3ème degré à coefficients réels :

$$(1 - \gamma_m^2) \cdot (\gamma_m \cdot G^{(m)} + |D^{(m)}|) = -2 \cdot \alpha \cdot \gamma_m$$

$$\text{avec} \quad \mu_m = \frac{\gamma_m \cdot D^{(m)*}}{|D^{(m)}|} \quad [(1 - \gamma_m^2) \text{ introduit 2 racines non physiques tq } |\mu_m| \geq 1]$$

Pour $\alpha = 0$, on retrouve la solution de Burg classique. Dans le cas où $\alpha \neq 0$, on peut montrer, qu'il existe une seule solution donnant μ_m dont le module soit strictement inférieur à 1.

. **Burg Régularisé par Fonctionnelle Stabilisatrice de Douceur Spectrale : (BURG RFSDS)**

Pour l'algorithme de Burg régularisé. La relation de récurrence qui lit le spectre du filtre AR à l'ordre m avec celui à l'ordre (m-1) va nous permettre de dérouler nos calculs, et de calculer la nouvelle expression du coefficient de réflexion compte tenues des contraintes de douceur spectrale ajoutées à la fonction de coût à minimiser. La position du problème est la suivante :

$$E^{(m)} = U^{(m)} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot D_k^{(m)} \quad \text{avec} \quad D_k^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{d^k A^{(m)}(f)}{df^k} \right|^2 \cdot df$$

$$\text{et la suite } \{a_k^{(m)}\}_{k=1, \dots, m} \text{ définie par : } \operatorname{Min}_{\{a_k^{(m)}\}} E^{(m)}$$

$$\text{Soit } \nabla_{\mu_m} E^{(m)} = 0 \quad \text{pour les } \{a_k^{(m)}\}_{k=1, \dots, m} \text{ recherchés}$$

Dans la suite, nous nous limiterons à l'ordre k=1, pour les contraintes de douceur spectrale (remarque : les λ_k sont des multiplicateurs de Lagrange). Nous allons calculer le gradient suivant μ_m de $E^{(m)}$:

$$\nabla_{\mu_m} E^{(m)} = \nabla_{\mu_m} U^{(m)} + \lambda_0 \cdot \nabla_{\mu_m} D_0^{(m)} + \lambda_1 \cdot \nabla_{\mu_m} D_1^{(m)}$$

$$\text{avec} \quad D_0^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} |A^{(m)}(f)|^2 \cdot df \quad \text{et} \quad D_1^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{dA^{(m)}(f)}{df} \right|^2 \cdot df$$

$$\text{On a déjà montré que : } \nabla_{\mu_m} U^{(m)} = \mu_m \cdot G^{(m)} + D^{(m)*}$$

Il reste à calculer les deux autres gradients provenant de la fonctionnelle stabilisatrice de douceur spectrale et qui traduit l'a priori (au sens de l'estimation bayésienne) sur la solution que l'on recherche :

$$\text{On a } \nabla_{\mu_m} |A^{(m)}(f)|^2 = 2 \cdot \mu_m \cdot |A^{(m-1)}(f)|^2 + \nabla_{\mu_m} A^{(m)*}(f) \cdot A^{(m-1)}(f)$$

en utilisant la relation de récurrence sur les $A^{(m)}(f)$ (Levinson)

$$\text{en notant que : } A^{(m-1)}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m-1)} \cdot e^{-j2\pi k f} \quad \text{et} \quad \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi(k+1-m)f} \cdot df = \delta_{k+1, m}$$



on en déduit : $\nabla_{\mu_m} D_0^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \nabla_{\mu_m} |A^{(m)}(f)|^2 \cdot df = 2 \cdot \mu_m \cdot D_0^{(m-1)} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} a_k^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1}$

avec $D_0^{(m-1)} = \sum_{k=0}^{m-1} |a_k^{m-1}|^2$

Il nous reste à calculer le terme du gradient suivant μ_m , de $D_1^{(m)}$:

on cherche à calculer : $\nabla_{\mu_m} D_1^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \nabla_{\mu_m} \left| \frac{dA^{(m)}(f)}{df} \right|^2 \cdot df$

or $\nabla_{\mu_m} \left| \frac{dA^{(m-1)}(f)}{df} \right|^2 = 2 \cdot \mu_m \cdot \left| \frac{d\Gamma^{(m)}(f)}{df} \right|^2 + 2 \cdot M^{(m)}(f)$

avec $M^{(m)}(f) = \frac{d\Gamma^{(m)}(f)}{df} \cdot \frac{dA^{(m-1)}(f)}{df}$ et $\Gamma^{(m)}(f) = e^{-j2\pi f m} \cdot A^{(m-1)*}(f)$

Soit $\nabla_{\mu_m} D_1^{(m)} = 2 \cdot \mu_m \cdot \left[D_1^{(m-1)} + (2\pi)^2 \cdot m^2 \cdot D_0^{(m-1)} - 2 \cdot (2\pi)^2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} k \cdot m \cdot |a_k^{m-1}|^2 \right] + 2 \cdot (2\pi)^2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} (k-m)^2 \cdot a_k^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1}$

En remarquant que $D_1^{(m-1)} = (2\pi)^2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} k^2 \cdot |a_k^{m-1}|^2$

soit $\nabla_{\mu_m} D_1^{(m)} = 2 \cdot \mu_m \cdot \left[(2\pi)^2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (k-m)^2 \cdot |a_k^{m-1}|^2 \right] + 2 \cdot (2\pi)^2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} (k-m)^2 \cdot a_k^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1}$

D'où, l'expression finale du gradient de l'énergie à minimiser :

$\nabla_{\mu_m} E^{(m)} = \mu_m \cdot G^{(m)} + D^{(m)*} + \lambda_0 \cdot \left[2 \cdot \mu_m \cdot \sum_{k=0}^{m-1} |a_k^{m-1}|^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} a_k^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1} \right] + \lambda_1 \cdot \left[2 \cdot \mu_m \cdot \left((2\pi)^2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (k-m)^2 \cdot |a_k^{m-1}|^2 \right) + 2 \cdot (2\pi)^2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} (k-m)^2 \cdot a_k^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1} \right]$

L'annulation de ce gradient conduit à l'expression finale du **coefficient de reflexion de l'algorithme de Burg Régularisé** :

$$\mu_m = - \frac{D^{(m)*} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-m)^2] \cdot a_k^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1}}{G^{(m)} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-m)^2] \cdot |a_k^{m-1}|^2}$$

4. INTERPRÉTATION DU RESULTAT

Interprétation du coefficient de reflexion

Une approche statistique permet d'interpréter ce nouveau μ , en remarquant :

$D^{*(m)} = 2 \cdot E[b_{m-1}^*(n) \cdot b_{m-1}(n-1)] = 2 \cdot \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=l}^m a_l^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1} \cdot c_{k-l}$ avec $c_{k-l} = E[x_{n-l} \cdot x_{n-k}^*]$

$G^{(m)} = E[|b_{m-1}(n)|^2] + E[|b_{m-1}(n-1)|^2] = 2 \cdot \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=l}^m a_l^{m-1} \cdot a_k^{m-1} \cdot c_{k-l}$

ce qui peut être écrit de façon synthétique :

$$\mu_m = - \frac{\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=l}^m a_l^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1} \cdot (c_{k-l} + [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-m)^2] \cdot \delta_{l,k})}{\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=l}^m a_l^{m-1} \cdot a_k^{m-1} \cdot (c_{k-l} + [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-m)^2] \cdot \delta_{l,k})}$$

D'où l'interprétation et le lien avec l'algorithme des moindres carrés régularisé :

$$\mu_m = - \frac{\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=l}^m a_l^{m-1} \cdot a_{m-k}^{m-1} \cdot c_{k-l}}{\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=l}^m a_l^{m-1} \cdot a_k^{m-1} \cdot c_{k-l}} \text{ avec } \begin{cases} c_{k-l} = c_{k-l} & \text{si } k \neq l \\ c_{k-l} = c_{k-l} + [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-m)^2] & \text{si } k=l \end{cases}$$

Soit la nouvelle matrice d'auto-corrélation implicite :

$R = R + D^* \cdot D$ avec $R = \{c_{k-l}\}_{k,l=1,\dots,m}$ avec $c_{k-l} = E[x_{n-l} \cdot x_n^*]$

avec $D = \text{Diag}\{[\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot m^2]^{1/2}, [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot (m-1)^2]^{1/2}, \dots, [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2]^{1/2}\}$

L'analyse de l'expression du coefficient de reflexion de l'algorithme de Burg régularisé montre que tout se passe, comme si on introduisait une matrice d'autocorrélation implicite (l'algorithme de Burg ne calcule pas la matrice d'autocorrélation) dont les termes diagonaux sont augmentés d'une valeur, qui varie avec l'indice dans le cas où on impose une douceur spectrale d'ordre 1. Or, *ce terme rajouté correspond au terme rajouté dans l'estimation de la matrice d'autocorrélation explicite de l'algorithme AR obtenu par les moindres carrés régularisé*, développé par Kitagawa & Gersch et Demoment dans leur approche bayésienne de l'analyse spectrale.

$\hat{A}_M = -(X^* \cdot X + D^* \cdot D)^{-1} \cdot X^* \cdot x$: moyenne de la loi a posteriori par maximisation de

$f(x/A_M, P_M) \cdot f(A_M/\lambda_0, \lambda_1, P_M) \propto e^{-\left\{ \frac{1}{2 \cdot P_M} (A_M^* \cdot X^* \cdot X \cdot A_M) \right\}} \cdot e^{-\left\{ \frac{1}{2 \cdot P_M} (A_M^* \cdot D^* \cdot D \cdot A_M) \right\}}$

Interprétation à partir des pôles

Soit $A^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^m a_k^m \cdot z^{-k} = z^{-m} \cdot \prod_{k=1}^m (z - z_k^m)$ avec $\mu_m = a_m^m = (-1)^m \prod_{k=1}^m z_k^m$

La relation de Levinson devient $A^{(m)}(z) = A^{(m-1)}(z) + \mu_m \cdot z^m \cdot A^{(m-1)*}(1/z^*)$

soit $\prod_{k=1}^m (z - z_k^m) = z \cdot \prod_{k=1}^{m-1} (z - z_k^{m-1}) + \mu_m \cdot \prod_{k=1}^{m-1} (1 - z \cdot z_k^{m-1*})$ or pour $z = z_i^m, i=1, \dots, m$

$$\mu_m = - \frac{\prod_{k=1}^m (z_i^m - z_k^{m-1})}{\prod_{k=1}^{m-1} (1 - z_i^m \cdot z_k^{m-1*})} \text{ pour } i=1, \dots, m \text{ en posant } z_i^{m-1} = 0$$

Les expressions $D_k^{(m)}$ peuvent être recalculées à partir des transformées en z , en appliquant le théorème de Cauchy et la relation :

$[U \cdot V]^{(n)} = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} U^{(p)} \cdot V^{(n-p)}$ avec $(\cdot)^{(p)}$: la dérivée p-ème

$$D_0^{(m)} = \oint z^{-(m+1)} \prod_{k=1}^m (z - z_k^m) \cdot \prod_{k=1}^m (1 - z \cdot z_k^{m*}) \cdot \frac{dz}{z^m} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} \left[\prod_{k=1}^m (z - z_k^m) \cdot \prod_{k=1}^m (1 - z \cdot z_k^{m*}) \right]_{z=0}$$

$$\frac{D_1^{(m)}}{(2\pi)^2} = \oint \left[(-m) z^{-(m+1)} \prod_{k=1}^m (z - z_k^m) + z^{-m} \sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^m (z - z_k^m) \right] (-m) \prod_{k=1}^m (1 - z z_k^{m*}) + \sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^m (1 - z z_k^{m*}) \frac{dz}{2\pi j}$$

On retrouve les expressions $D_k^{(m)} = (2\pi)^{2k} \sum_{p=0}^m p^{2k} \cdot |a_p^m|^2$

avec $a_p^m = \frac{(-1)^{m-p}}{p!} \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m \dots \sum_{j_p=1}^m \prod_{k=1}^m z_k^m = \frac{(-1)^{m-p}}{(m-p)!} \sum_{i_1=1}^m z_{i_1}^m \sum_{i_2=1}^m z_{i_2}^m \dots \sum_{i_{m-p}=1}^m z_{i_{m-p}}^m$

Par exemple pour $m=3$, on a :

$$D_0^3 = 1 + |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3|^2 + |z_1^3 z_2^3 + z_2^3 z_3^3 + z_1^3 z_3^3|^2 + |z_1^3 z_2^3 z_3^3|^2$$

$$D_1^3 = (2\pi)^2 \cdot [|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3|^2 + 4 \cdot |z_1^3 z_2^3 + z_2^3 z_3^3 + z_1^3 z_3^3|^2 + 9 \cdot |z_1^3 z_2^3 z_3^3|^2]$$

Il apparaît, à travers les $D_k^{(m)}$ que la régularisation a deux effets sur les pôles : rapprocher les pôles du centre, favoriser une répartition isotrope des pôles sur 2π (approximation d'un bruit blanc par un nombre restreint de pôles : isotropie des pôles au niveau de la puissance bruit).

Lien entre les méthodes

Le problème du Minimum d'énergie libre peut se présenter sous la forme d'une extension non-linéaire des équations de Yule-Walker, on démontre ainsi que le problème MFE conduit à l'équation suivante :



$$\sum_{k=0}^m a_k \cdot c_{1-k} = P \cdot \delta_{1,0} - \frac{\alpha}{P} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \frac{1}{w_{1,i}} \cdot a_j \cdot a_i \cdot a_{j+i}^* \text{ avec } w_u=1 \text{ pour } |u| \leq m, 0 \text{ ailleurs}$$

avec $S_c(f) = \frac{P}{|A(f)|^2}$ DSP consistante, on montre alors que :

$$\frac{\alpha}{P} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \frac{1}{w_{1,i}} \cdot a_j \cdot a_i \cdot a_{j+i}^* = \frac{\alpha}{4 \cdot P} \nabla_a \left[\int_{-1/2}^{1/2} |A(f)|^4 \cdot df \right] = \frac{\alpha \cdot P}{4} \nabla_a \left[\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{S_c(f)^2} \cdot df \right]$$

Ce qui est une extension du cas $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{S_c(f)} df$ qui donne $E = A^*(R + \alpha \cdot I)A$

Il existe également des méthodes de régularisation, qui adoptent l'approche par espaces propres et partent de l'expression du ME suivante :

$$S_{ME}(f) = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \rho_{ik} e^{+j\omega_i} v_i^+ e_r^+ \right)^{-1} \text{ avec } \rho_{ik} = (\lambda_i \lambda_k)^{-1} v_{i,N}^+ v_{k,N}^* \text{ et } e_r^+ = (e^{-j2\pi(N-1)f} \dots 1)^T$$

$$\text{obtenu classiquement par } \text{Max}_{S(f)} \left[\int_{-1/2}^{1/2} \ln S(f) \cdot df + \sum_{m=0}^{N-1} \theta_m \int_{-1/2}^{1/2} S(f) \cdot e^{-j2\pi m \Delta} df \right]$$

Mais on peut également imposer que les données à toutes les fréquences possèdent des valeurs de projection sur les vecteurs propres fixées [3] :

$$\sum_{i=1}^N \theta_i \int_{-1/2}^{1/2} S(f) \cdot |e^+ v_i|^2 \cdot df \text{ ou } \sum_{i=1}^N \theta_i \int_{-1/2}^{1/2} S(f)^{1/2} e^+ v_i \cdot df$$

5. GENERALISATION AU CAS MULTISEGMENT

. Burg Multisegment Régularisé

En adoptant l'approche de Haykin, on généralise notre algorithme au cas multisegment, et on le robustifie en y intégrant une pondération statistique des segments (applications : filtrage, estimation lissée, ...)

$$\mu_{I,p} = - \frac{D_I^{(p)*} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{p-1} [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-p)^2] \cdot a_k^{p-1} \cdot a_{p-k}^{p-1}}{G_I^{(p)} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{p-1} [\lambda_0 + \lambda_1 \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-p)^2] \cdot |a_k^{p-1}|^2}$$

$$\text{avec } \begin{cases} D_I^{(p)} = 2 \cdot \sum_{i=1}^I K(\chi_{i,p-1}) \cdot \sum_{n=p+1}^N b_{p-1,i}(n-1) \cdot f_{p-1,i}^*(n) \\ G_I^{(p)} = \sum_{i=1}^I K(\chi_{i,p-1}) \cdot \sum_{n=p+1}^N [|f_{p-1,i}(n)|^2 + |b_{p-1,i}(n-1)|^2] \end{cases}$$

$$K(\chi_{i,p-1}) = \frac{P(\chi_{i,p-1}/s_j = 1) \cdot P(s_i = 1)}{P(\chi_{i,p-1}/s_j = 1) \cdot P(s_i = 1) + P(\chi_{i,p-1}/s_i = 0) \cdot P(s_i = 0)}$$

avec $\begin{cases} s_i = 1 : \text{ la cellule } i \text{ appartient à la population statistique majoritaire de la fenêtre} \\ s_i = 0 : \text{ la cellule } i \text{ appartient à la population statistique minoritaire de la fenêtre} \end{cases}$

Cette formule est obtenue en minimisant la puissance d'erreur moyenne

$$U_p^{stat} = E(P_p / \chi_{p-1}) = \sum_{i=1}^I K(\chi_{i,p-1}) \cdot P_{i,p} = \sum_{i=1}^I P(C_i / \chi_{p-1}) \cdot E(P_p / C_i \cap \chi_{p-1})$$

$C_i \in C$ avec $C = \{C_i / C_i = \{s_{i,k} = o_{i,k}\}_{k=1, \dots, I} \text{ avec } o_{i,k} = \{0, 1\}\}$

$$\text{avec } \chi_{i,p-1} = \frac{\sum_{n=p+1}^N [|f_{p-1,i}(n)|^2 + |b_{p-1,i}(n-1)|^2]}{P_{i,p-1}} \text{ et } \begin{cases} P_{1,0} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I P_{i,0} \\ P_{I,p-1} = [1 - |\mu_{I,p-1}|^2] P_{I,p-2} \end{cases}$$

pour $p > 0$, $P(\chi_{i,p-1}/s_i = 1)$ est une loi de χ^2 à $\chi(N-p)$ degrés de libertés

6. APPLICATIONS

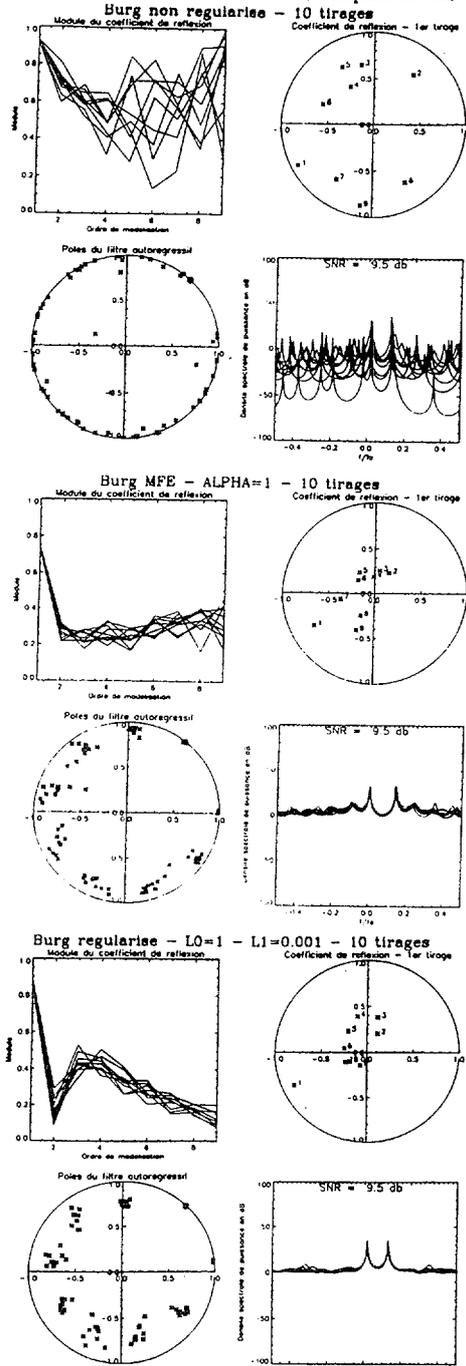
Les applications de l'analyse autorégressive par Burg RFSDS sont multiples : filtrage doppler, détection de rupture, caractérisation, ...

En particulier en traitement d'antenne, où le nombre de capteur est faible et prédispose à l'utilisation de Burg RFSDS, pour utilisation dans :

$$S(\theta) = \frac{P_M \cdot d/\lambda}{\left| \sum_{k=0}^M a_k^M \cdot e^{-j2\pi k (\theta/\lambda) \cos(\theta)} \right|^2} \text{ avec } \begin{cases} \lambda : \text{ la longueur d'onde} \\ d : \text{ la distance entre capteurs} \end{cases}$$

7. RESULTATS

ordre du modèle : 9, nombre d'échantillons : 10 / Comparaison ME, MFE, RFSDS :



8. BIBLIOGRAPHIE

[1] - Kitagawa G., Gersch W., "A Smoothness Priors long AR Model Method for Spectral Estimation", IEEE Trans., AC-30,n°1,pp.57-65,Janvier 1985
 [2] - Silverstein S.D., Pimbley J.M., "The Minimum Free Energy Method of Spectral Estimation", Chap. 6 of *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*, Vol.I, Simon Haykin Editor, pp.267-325, 1991
 [3] - Kirlin L., "New Maximum Entropy Spectrum Using Uncertain Eigenstructure Constraints", IEEE Trans.,AES-28,n°1,pp.2-14,Ja. 1992