# Extension des cyclocorrélations et estimation spectrale au sens du maximum d'entropie pour les processus aleatoires périodiquement corrélés

D. Alpay
Beer-Sheva University, Mathematics Dept.
P.O.B. 653, Beer-Sheva, Israël

A. Chevreuil, Philippe Loubaton
Telecom Paris, Dept. Signal
46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13

## Résumé

*Le problème de l'extension* d'une séquence finie de corrélations contigües est classique en estimation spectrale. Connaissant l'importance que revêt la classe des signaux cyclostationnaires, il nous est apparu intéressant de replacer le problème précédent dans ce nouveau cadre, en remplaçant corrélations par cyclo-corrélations. *Essentiellement*, cette recherche a abouti à des résultats de nature semblable au cas stationnaire : la positivité d'une certaine matrice assure l'existence de solutions, et parmi ces dernières, on montre que celle ayant un taux d'entropie maximale est "auto-régressive périodique".

## Abstract

The extension of stationary signal auto-correlation coefficients is a well known problem in the field of spectral estimation : due to the importance of cyclo-stationary processes - particularly in digital communications - we give here some new results of the previous problem in this context, replacing cyclo-correlation by correlation coefficients. These results are essentially the same as those obtained in the stationary case : the positivity of a correlation matrix yields to possible extensions; moreover, the one which maximises the entropy is characterised, and its structure is Periodic Auto Regressive (in the stationary case, this solution has an AR structure).

## 1 Position du problème.

Soit $(y(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ un signal aléatoire. On dit que $y$ est cyclostationnaire de période $T$ (où $T$ est un entier naturel) si la fonction $R(n,\tau) = E[x(n+\tau)x(n)^*]$ est périodique de période $T$ en la variable $n$. Pour étudier les propriétés du second ordre de $y$, une première approche immédiate consiste à remarquer que $y$ est cyclostationnaire de période $T$ si et seulement si (ssi) le processus "vectorisé" $Y(n)$ défini par $Y(n) = (y(nT), y(nT+1), \cdots, y(nT+T-1))^T$ est stationnaire. Cet artifice n'étant pas très naturel, on préfère souvent décrire les statistiques du second ordre de $y$ par le biais de ses $T$ fonctions de cyclo-corrélation $R_0, R_1, \cdots, R_{T-1}$ définies par ([GLA]) $R(n,\tau) = \sum_{n=0}^{T-1} R_k(\tau)e^{\frac{i2\pi nk}{T}}$ Les fonctions $R_k$ ainsi définies constituent une généralisation naturelle de la fonction d'autocorrélation du cas stationnaire. Dès lors, il est naturel de se demander quelles conditions doivent remplir $T$ suites indexées par $\mathbb{Z}$ $R_0, R_1, \cdots, R_{T-1}$ pour représenter les fonctions de cyclo-corrélation d'un processus cyclo-stationnaire de période $T$. Soit $(R(\tau))_{\tau\in\mathbb{Z}}$ la suite de matrices $T\times T$ définie par

$$R_{k,l}(\tau) = R_{l-k}(\tau)e^{\frac{i2\pi k\tau}{T}} \tag{1.1}$$

où la valeur de l'indice $l-k$ est à prendre modulo $T$. Alors, Gladyšev a établi dans ([GLA]) un théorème de type Bochner qui stipule que $R_0, R_1, \cdots, R_{T-1}$ sont des fonctions de cyclo-corrélation ssi la suite $(R(\tau))_{\tau\in\mathbb{Z}}$ est la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire vectoriel de dimension $T$, i.e. ssi toutes les matrices bloc-Toeplitz $\Gamma_n$ définies par bloc par

$$(\Gamma_n)_{i,j} = R(i-j) \tag{1.2}$$

pour $(i,j) = (0, 1, \cdots, n)$ sont positives. Dans le cadre de cet article, nous nous intéressons au problème de l'extension des fonctions de cyclo-corrélation, qui peut être posé comme suit:

on se donne $T$ suites finies de nombres complexes $(R_0(\tau))_{\tau=0,\dots,N}, \cdots, (R_{T-1}(\tau))_{\tau=0,\dots,N}$. Quelles sont les conditions sous lesquelles elles représentent les premières valeurs prises par des cyclo-corrélations ? Si ces conditions sont respectées, comment décrire l'ensemble des extensions des suites $(R_0(\tau))_{\tau=0,\dots,N}, \cdots, (R_{T-1}(\tau))_{\tau=0,\dots,N}$, i.e. l'ensemble des cyclo-corrélations dont les premières valeurs coïncident avec les données de départ ? Enfin, quelle est l'extension dont le taux d'entropie est maximum ?

Dans le cas stationnaire, les réponses à ces trois questions font l'objet du très classique problème des moments trigonométriques, mais il semble que dans le cadre cyclostationnaire, aucune publication n'ait annoncé de résultat de ce type. Nous allons montrer que la condition nécessaire et suffisante d'extension est la positivité de la matrice bloc Toeplitz $\Gamma_N$ construite à partir des données, et nous donnerons une caractérisation des solutions dans le cas où $\Gamma_N$ est définie positive. Enfin, nous montrerons que l'extension du maximum d'entropie correspond à un processus PAR (periodically autoregressive).

## 2 L'approche utilisée.

Avant de donner une idée de l'approche utilisée ici, il convient de mentionner qu'on ne peut pas se ramener au cas stationnaire par une simple vectorisation. Le problème majeur posé par cette approche réside dans le fait que les données du problème ne sont pas exactement équivalentes aux premiers coefficients de corrélation du processus vectorisé $Y$ que nous avons introduit plus haut. Dès lors, les questions considérées ici ne sont pas équivalentes à des problèmes de moment trigonométrique matriciel, et on ne peut pas les aborder par ce biais. Notre approche est basée sur la résolution d'un problème d'interpolation classique, mais dans lequel des symétries sont imposées.

D'après le théorème de Bochner évoqué plus haut, les $T$ suites $(R_0(\tau))_{\tau=0,\ldots,N}, \cdots, (R_{T-1}(\tau))_{\tau=0,\ldots,N}$ possèdent des extensions si la suite matricielle $R(\tau)_{\tau=0,N}$ construite par le biais des relations (1.1) possède des extensions positives $R(N+1), R(N+2), \cdots$, dont les termes s'écrivent encore sous la forme (1.1). Afin d'introduire les contraintes correspondantes, appelons $\Lambda$ la matrice de permutation de dimension $T$ définie par :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Il est alors facile de constater que $R(\tau)$ vérifie 1.1 ssi

$$\Lambda^* R(\tau) e^{-i\alpha\tau} \Lambda = R(\tau) \text{ où : } \alpha = \frac{2\pi}{T} \tag{2.4}$$

Par conséquent, notre problème se résume à celui de la recherche d'extensions de la suite finie de corrélations matricielles $R(\tau)_{\tau=0,N}$ qui possèdent la symétrie 2.4. Afin de résoudre ce problème, commençons par rappeler qu'une suite infinie $R(N+1), R(N+2), \cdots$ est une extension positive de la suite $R(\tau)_{\tau=0,N}$ ssi la fonction $F(z)$ définie par

$$F(z) = R(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} R(k) z^k \tag{2.5}$$

est positive réelle, i.e. si $F$ est analytique dans le disque unité $\mathbb{D}$ du plan complexe, et si $F(z) + F(z)^* \geq 0$ pour $z \in \mathbb{D}$. Par conséquent, caractériser l'ensemble des extensions positives de la suite $R(\tau)_{\tau=0,N}$ équivaut à résoudre le problème d'interpolation $\mathcal{P}$ suivant, dit de Carathéodory-Féjer:

> $\mathcal{P}$ : déterminer les fonctions positives réelles $F(z)$ dont les $N+1$ premiers termes du développement en voisinage de 0 sont $R(0), 2R(1), \cdots, 2R(N)$.

Le point fondamental consiste à remarquer qu'une extension positive de la suite $R(\tau)_{\tau=0,N}$ possède la symétrie (1.1) ssi sa fonction positive réelle associée $F(z)$ définie par (2.5) vérifie la condition

$$\Lambda^* F(ze^{-i\alpha})\Lambda = F(z) \tag{2.6}$$

Par conséquent, les questions considérées ici sont équivalentes à la détermination de l'ensemble des fonctions positives réelles $F(z)$ dont les $N+1$ premiers termes du développement en voisinage de 0 sont $R(0), 2R(1), \cdots, 2R(N)$, et qui satisfont la contrainte (2.6). Afin ce résoudre ce problème d'interpolation avec contraintes de symétries, nous commençons par rappeler la forme générale des solutions de $\mathcal{P}$. Puis, en utilisant le fait que les coefficients $(R(\tau))_{\tau=0,N}$ vérifient (1.1), nous établissons directement que la condition $\Gamma_N > 0$ implique l'existence de solutions de $\mathcal{P}$ vérifiant (2.6). De plus, nous montrons comment caractériser ces solutions. Nous n'abordons pas le cas où $\Gamma_N$ est positive et singulière; sous cette hypothèse cependant, on peut par des arguments de théorie des perturbations montrer l'existence de solutions. Quant à décrire ces dernières, c'est là un problème plus délicat.

# 3 Le problème de Carathéodory-Féjer.

Les solutions du problème $\mathcal{P}$ font intervenir les polynômes de Szegö matriciels de première et deuxième espèce ([DGK2]) associés à la matrice $\Gamma_N$. Définissons les matrices $T \times T$ $(A_{k,N})_{k=0,N}$ et $(B_{k,N})_{k=0,N}$ par les relations

$$(A_{0,N}|A_{1,N}|\ldots|A_{N,N})\Gamma_N = (I|0|\ldots|0) \tag{3.7}$$

$$(B^*_{N,N}|\ldots|B^*_{0,N})\Gamma_N = (0|0|\ldots|I) \tag{3.8}$$

et posons $A_N(z) = \sum_{k=0}^{N} A_{k,N} z^{N-k}$ et $B_N(z) = \sum_{k=0}^{N} B_{k,N} z^{N-k}$. Les matrices $A_{0,N}$ et $B_{0,N}$ étant définies positives (elles coïncident avec les blocs $(1,1)$ et $(N+1, N+1)$ de $\Gamma_N$), on peut définir les racines carrées hermitiennes $U_N = A_{0,N}^{-1/2}$ et $V_N = B_{0,N}^{-1/2}$ de leurs inverses. Les polynômes de Szegö de première espèce associés à $\Gamma_N$ sont alors définies par

$$P_N(z) = U_N A_N(z), \; Q_N(z) = B_N(z) V_N$$

Les polynômes de seconde espèce $R_N(z)$ et $S_N(z)$ se définissent à partir de $P_N(z)$ et $Q_N(z)$ via les relations

$$\begin{aligned} R_N(z) &= [P_N(z)(R(0) + 2R^*(1)z^{-1} + \ldots + 2R^*(N)z^{-N})]_+ \\ S_N(z) &= [(R(0) + 2R^*(1)z^{-1} + \ldots + 2R^*(N)z^{-N})Q_N(z)]_+ \end{aligned}$$

où le symbole "$_+$" désigne la partie polynomiale du terme entre crochets. En notant $\tilde{R}_N(z)$ et $\tilde{P}_N(z)$ les polynômes (matriciels) retournés et conjugués de $R_N(z)$ et $P_N(z)$, on sait qu'une fonction $F(z)$ est solution du problème $\mathcal{P}$ ssi il existe une fonction de Schur $G(z)$ (i.e. une fonction $G(z)$, analytique dans $\mathbb{D}$, et qui vérifie $||G(z)|| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$) telle que

$$F(z) = \left(\tilde{R}_N(z) - zS_N(z)G(z)\right)\left(\tilde{P}_N(z) - zQ_N(z)G(z)\right)^{-1} \tag{3.9}$$

Il est intéressant de signaler que la densité spectrale associée à la fonction d'autocorrélation $(R(\tau))_{\tau\in\mathbb{Z}}$ correspondant à $F(z)$ n'est rien d'autre que la fonction $\mathcal{F}(e^{i\omega}) = (F(e^{-i\omega}) + F(e^{-i\omega})^*)/2$ et que l'extension autorégressive du maximum d'entropie est obtenue lorsque l'on choisit $G(z) = 0$. Dans ce cas, la fonction $\mathcal{F}(e^{i\omega})$ est égale à :

$$\mathcal{F}(e^{i\omega}) = \tilde{P}_N(e^{-i\omega})^{-*}\tilde{P}_N(e^{-i\omega})^{-1} \tag{3.10}$$

# 4 Les solutions de $\mathcal{P}$ sous contraintes

Montrons à présent qu'il existe des solutions de $\mathcal{P}$ qui vérifient (2.6), et qu'on peut les caractériser très simplement. Pour ceci, nous prouvons que les relations (1.1) vérifiées par les matrices $R(0), \ldots, R(N)$ induisent des symétries sur les polynômes de Szegö. A l'aide de ces nouvelles relations, nous déduirons immédiatement pour quelles fonctions de Schur $G(z)$ la fonction $F(z)$ donnée par (3.9) vérifie $\Lambda^* F(ze^{-i\alpha})\Lambda = F(z)$.

Appelons $\mathcal{G}$ la matrice bloc diagonale $T(N+1) \times T(N+1)$ diag$(\Lambda, \ldots, \Lambda)$ et par $\mathcal{D}$ la matrice $T(N+1) \times T(N+1)$ diag$(I_T, e^{i\alpha}I_T, \ldots, e^{iN\alpha}I_T)$. Des relations (1.1), on déduit immédiatement que

$$\mathcal{D}^*\mathcal{G}^*\Gamma_N\mathcal{G}\mathcal{D} = \Gamma_N \tag{4.11}$$

D'après (3.7), ceci implique que

$$(A_{0,N}|A_{1,N}|\dots|A_{N,N})\mathcal{D}^*\mathcal{G}^*\Gamma_N\mathcal{G}\mathcal{D} = (I|0|\dots|0)$$

En multipliant à droite cette équation, et en utilisant le caractère diagonal des deux matrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$, et le caractère orthogonal de $\Lambda$, on obtient immédiatement que

$$(A_{0,N}\Lambda^*|A_{1,N}\Lambda^*e^{-i\alpha}|\dots|A_{N,N}\Lambda^*e^{-iN\alpha})\Gamma_N = \Lambda^*(I|0|\dots|0)$$

et que

$$(\Lambda A_{0,N}\Lambda^*|\Lambda A_{1,N}\Lambda^*e^{-i\alpha}|\dots|\Lambda A_{N,N}\Lambda^*e^{-iN\alpha}) = (A_{0,N}|A_{1,N}|\dots|A_{N,N})$$

Cette dernière identité se traduit finalement par la relation

$$A_N(z) = e^{iN\alpha}\Lambda^*A_N(ze^{-i\alpha})\Lambda \qquad (4.12)$$

Par ailleurs, la matrice $A_{0,N}$ vérifie $\Lambda^*A_{0,N}\Lambda = A_{0,N}$. Toutes ses puissances la vérifiant également, il est clair que l'on a aussi $U_N = \Lambda^*U_N\Lambda$. Par conséquent,

$$P_N(z) = e^{iN\alpha}\Lambda^*P_N(ze^{-i\alpha})\Lambda \qquad (4.13)$$

On montre de même que $Q_N(z)$ satisfait à la même symétrie. Enfin, on déduit de la définition du polynôme de seconde espèce à gauche et de (1.1) que $R_N(z) = e^{iN\alpha}\Lambda^*R_N(ze^{-i\alpha})\Lambda$ et que $S_N(z) = e^{iN\alpha}\Lambda^*S_N(ze^{-i\alpha})\Lambda$. En remarquant que (4.13) implique que $\tilde{P}_N(z) = \Lambda^*P_N(ze^{-i\alpha})\Lambda$ et que $\tilde{R}_N(z) = \Lambda^*R_N(ze^{-i\alpha})\Lambda$, on montre immédiatement que $F(z)$ donnée par (3.9) vérifie (2.6) ssi

$$G(z) = e^{-i(N+1)\alpha}\Lambda^*G(ze^{-i\alpha})\Lambda \qquad (4.14)$$

L'ensemble des fonctions de Schur vérifiant (4.14) n'étant pas vide (la fonction identiquement nulle en fait partie), on en déduit que le problème $(\mathcal{P})$ sous la contrainte (2.6) admet donc des solutions, et ces dernières sont simplement données par (3.9) pour des fonctions $G(z)$ de Schur vérifiant (4.14).

# 5 Solution du maximum d'entropie

Etant donné une famille finie $[R_k(\tau)]_{k=0\dots T-1,\tau=0\dots N}$ telle que la matrice $\Gamma_N$ donnée par (1.2) soit positive, définie, nous avons donc montré qu'il existe une famille de signaux T-cyclostationnaires dont les $N+1$ premiers coefficients de cyclo-corrélation sont les $R_k(\tau)$. Soit donc une extension que nous noterons par commodité $[R_k(\tau)]_{k=0\dots T-1,\tau\in\mathbb{Z}}$ Soit alors un signal $y(n)$ dont les caractéristiques du second ordre sont données par les $R_k(\tau)$. On note enfin $(R(\tau))$ la suite positive de matrices définies par (1.1), et on prend un signal $G(n)$ stationnaire dont les coefficients de corrélation sont précisément les $R(\tau)$.

Après quelques définitions préliminaires, nous exprimerons le taux d'entropie de $y(n)$ en fonction de celui de $G(n)$. Nous pourrons alors exhiber la structure de $y(n)$.

On définit le taux d'entropie de $Y(n) = [y^{(0)}(n),\dots,y^{(T-1)}(n)]$ par (voir [COV]) :

$$H(\mathcal{Y}) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int f_N(v_N)\log_2 f(v_N)dv_N$$

où
$v_N = (y_1^{(0)},\dots,y_1^{(T-1)},\dots,y_N^{(0)},\dots,y_N^{(T-1)})$ et $f_N$ la densité conjointe de probabilité des variables $(Y^{(k)}(p))_{k=1..T,p=1..N}$. Il apparait ainsi clairement que le taux d'entropie du signal vectoriel $Y$ est le même que celui du signal scalaire $y$ obtenu par dépliement.

En considérant le signal gaussien (ce que nous ferons systématiquement par la suite), un résultat classique de la théorie de l'information affirme que :

$$H(\mathcal{Y}) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log_2 det(S_Y(e^{i\omega}))d\omega \quad (5.15)$$

où $S_Y(e^{i\omega})$ est la densité spectrale de $Y$. Afin de créer le lien avec le processus $G(n)$, notons $\mathcal{F}(e^{i\omega})$ la densité spectale de ce dernier. Désignons maintenant par $S_k(e^{i\omega})$ la cyclo-densité spectrale associée á la fonction de cyclo-corrélation $R_k(\tau)$. Il est clair alors que le terme général de $\mathcal{F}$ sécrit : $\mathcal{F}(e^{i\omega})_{p,q} = S_{q-p}(e^{i(\omega-\alpha p)})$ Il est montré dans [GLA] :

$$S_Y(e^{i\omega}) = U^*(e^{i\omega/T})\mathcal{F}(e^{i\omega/T})U(e^{i\omega/T}) \qquad (5.16)$$

où $U(e^{i\omega})$ est une matrice unitaire (pour tout $\omega$) de terme général :

$$U_{k,l}(e^{i\omega/T}) = \frac{1}{\sqrt{T}}exp(i2\pi kl/T - il\omega/T) \qquad (5.17)$$

En reportant 5.16 dans 5.15, il vient que $H(\mathcal{Y})$ vaut, à une constante près :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\log det(S_Y(e^{i\omega}))d\lambda &= \int_0^{2\pi}\log det(\mathcal{F}(e^{i\omega/T}))d\omega \\ &= T\int_0^{2\pi/T}\log det(\mathcal{F}(e^{i\omega}))d\omega\end{aligned}$$

Par construction de $\mathcal{F}$, on peut montrer que pour tout $k = 0\dots T-1$ : $\mathcal{F}(e^{i(\omega+k\alpha)}) = \Lambda^{T-k}\mathcal{F}(e^{i\omega})\Lambda^k$ Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\log det(S_Y(e^{i\omega}))d\lambda &= \sum_{l=0}^{T-1}\int_{l2\pi/T}^{(l+1)2\pi/T}\log det(\mathcal{F}(e^{i\omega}))d\omega \\ &= \int_0^{2\pi}\log det(\mathcal{F}(e^{i\omega}))d\omega\end{aligned}$$

ce qui montre que le taux d'entropie du processus vectorisé $(Y(n))$ est le même que celui du processus $(G(n))$. Or, parmi toutes les extensions possibles de $R(\tau)$, celle correspondant à la fonction de Schur nulle (voir 3.9) admet un taux d'entropie maximal. On peut en conclure que l'extension correspondant à la fonction de Schur nulle définit des moments cycliques du second ordre tels que les processus T-cyclostationnaires associés $(y(n))$ ont une entropie maximale. Intéressons-nous à un de ces processus $y(n)$. Le processus vectoriel stationnaire obtenu par empilement de longueur $T$ (c'est $Y(n)$) a une densité spectrale $S_Y(e^{i\omega})$ définie par (5.16) où maintenant $\mathcal{F}$ est donnée par 3.10. Moyennant certaines hypothèses de régularité (voir [GLA]): $S_Y^{-1}(e^{i\omega}) = U^*(e^{i\omega/T})\underbrace{\tilde{P}_N(e^{-i\omega/T})\tilde{P}_N^*(e^{-i\omega/T})}_{K_N(e^{i\omega/T})}U(e^{i\omega/T})$

Il est clair d'après (4.13) que $\Lambda^*K_N(e^{i\omega})\Lambda = K_N(e^{i(\omega-\alpha)})$ Il existe donc une famille $L_r(e^{i\omega})$ (explicitement : $L_r(.) =$

$[K_N(.)]_{0,r})$ telle que : $[K_N(e^{i\omega})]_{l,m} = L_{m-l[T]}(e^{i(\omega-l\alpha)})$. Nous poserons : $L_m(e^{i\omega}) = \sum_{r=-N}^{N} L_m(r)e^{ir\omega}$. Le terme général $(S_Y^{-1})_{pq}(e^{i\omega})$ de $S_Y^{-1}(e^{i\omega})$ s'écrit donc :

$$\frac{1}{T}\sum_{l,m=0}^{T-1} e^{-i\alpha pl}e^{ip\omega/T}(K_N)_{l,m}(e^{i\omega/T})e^{i\alpha mq}e^{-iq\omega/T}$$
$$= \frac{1}{T}e^{i(p-q)\omega/T}\sum_{l,m=0}^{T-1} e^{i\alpha(mq-pl)}L_{m-l}(e^{i(\omega/T-\alpha l)})$$
$$= \frac{1}{T}e^{i(p-q)\omega/T}\sum_{k=0}^{T-1} e^{i\alpha kq}\sum_{l=0}^{T-1} e^{i\alpha l(q-p)}\sum_{r=-N}^{N} L_k(r)e^{-i\alpha lr+ir\omega/T}$$
$$= \frac{1}{T}e^{i(p-q)\omega/T}[\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{r=-N}^{N} e^{i\alpha kq}L_k(r)e^{ir\omega/T}][\sum_{l=0}^{T-1} e^{i\alpha l(q-p-r)}]$$

Or $\sum_{l=0}^{T-1} e^{i\alpha l(q-p-r)} = 0$ dès que $r \neq q-p[T]$. On en déduit que :

$$(S_Y^{-1})_{pq}(e^{i\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{n\in\Omega} e^{i\alpha kq}L_k(q-p-nT)e^{-in\omega}$$

où $\Omega = \{n : q-p-nT \in [-N,N]_{\mathbb{Z}}\}$

Ainsi, $S_Y^{-1}$ est un polynôme trigonométrique de la variable $e^{i\omega}$, on en déduit donc que le processus vectorisé $(Y(n))$ a une structure auto-régressive. Ce qui implique naturellement que le processus T-cyclostationnaire $(y(n))$ obtenu par dépliement est un PAR (i.e Periodic auto-regressive).

## 6 conclusion

A une séquence finie $[B_k(\tau)]_{k=0\dots T-1,\tau=0\dots N}$ de coefficients de cyclo-corrélations, on a pu associer une famille d'extensions (que l'on a caractérisé analytiquement grâce aux polynômes de Szegö matriciels). De cette dernière, on a pu extraire l'extension maximisant le taux d'entropie. Et, à partir du polynôme de Szegö à gauche $P_N(z)$ (que l'on construit directement à partir des données), on est capable de calculer cette extension du maximum d'entropie. De plus, les processus T-cyclostationnaires dont les statistiques du second ordre sont données par cette extension ont une structure auto-regressive périodique. Nous avons choisi de résoudre ce problème via les polynômes matriciels : cet outil théorique puissant est à la base de nombreux problèmes d'interpolation (voir par exemple [AlLou]); et par ses liens intimes avec les prédicteurs linéaires direct et rétrograde, il est souvent rapide et élégant de l'utiliser dans le contexte du traitement du signal.

## References


[GLA] "Periodically random sequences" by E.G Gladyšev *in soviet mathematics, 1961, vol2.*

[DGK] "Orthogonal polynomial matrices on the unit circle" by P.Delsarte, Y.Genin, Y.Kamp *in IEEE transaction on circuits and systems.*

[DGK2] "Schur parametrisation of positive definite bloc-Tœplitz systems" by P.Delsarte, Y.Genin, Y.Kamp *in SIAM journal of applied mathematics, february 1979.*

[COV] "elements of information theory" by T.M Cover anc J.A Thomas. *Wiley interscience*

[AlLou] "The partial trigonometric moments problem on ai interval : the matrix case" by D.Alpay and P.Loubatoı