



## ANALYSE SPECTRALE HAUTE RESOLUTION SANS ESTIMATION DU NOMBRE DE COMPOSANTES DU SIGNAL

**Olivier CASPARY, Dominique DALPONTE,  
Marc TOMCZAK, David BRIE**

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CNRS URA 821)  
Université H. Poincaré, Nancy 1, B.P. 239, 54506 Vandœuvre Cedex.  
E-mail : tomczak@cran.u-nancy.fr

### RESUME

Dans le cadre de l'analyse spectrale de signaux sinusoïdaux, les performances des estimateurs haute résolution sont généralement subordonnées à l'estimation du nombre de composantes du signal. Pour remédier à cela, différents critères d'estimation de ce dernier ont été proposés dans la littérature (AIC, MDL). Une autre approche, permettant de s'affranchir de ce choix souvent délicat, consiste à appliquer une pondération judicieuse pour effectuer la séparation sous-espaces signal/bruit. Dans le cas de la famille des estimateurs MUSIC, nous proposons une pondération qui réalise un compromis entre deux critères de performance antagonistes, l'un de séparation des sous-espaces signal et bruit et l'autre, de conditionnement matriciel. Elle s'inspire des pondérations de Silverstein et Choi déjà existantes [SIL91] [CHO93], mais permet d'atteindre des performances plus proches de celles obtenues, à nombre de composantes exact, avec l'estimateur MUSIC.

### 1. INTRODUCTION

L'analyse spectrale de signaux sinusoïdaux trouve de nombreuses applications dans des domaines aussi différents que le traitement d'antenne, l'analyse vibratoire ou la spectroscopie RMN. A ce titre, de nombreuses méthodes ont été développées pour fournir des estimations avec une résolution fréquentielle supérieure à la classique Transformée de Fourier. Cependant, l'efficacité de ces méthodes, que l'on regroupe sous le terme générique de méthodes haute résolution, est étroitement liée à la connaissance a priori du nombre de composantes du signal. L'objectif de cette communication est de présenter une approche qui, grâce à une pondération adéquate des vecteurs propres de la matrice de covariance  $R_x$ , permet d'éviter l'estimation du nombre de composantes du signal. La nouvelle pondération que nous proposons s'applique à la famille des estimateurs MUSIC et s'inspire de travaux précédents réalisés par Silverstein [SIL91] et Choi [CHO93]. Elle effectue un compromis entre deux critères antagonistes, l'un de séparation des sous-espaces signal et bruit et l'autre, de conditionnement matriciel.

Dans la section suivante, nous présentons brièvement la famille des estimateurs MUSIC pondérés. Puis, après avoir rappelé la forme des pondérations de Silverstein et de Choi, nous introduisons une nouvelle pondération qui combine, dans une certaine mesure, les avantages des deux précédentes (section 3). Celle-ci fait intervenir deux paramètres de réglage dont le choix est discuté et illustré en section 4. Enfin, les parties 5 et 6 sont respectivement consacrées aux simulations, que nous avons effectuées dans le but de comparer les performances de notre approche à celles de l'estimateur MUSIC, et à la discussion des résultats obtenus.

### ABSTRACT

In the case of spectral analysis of sinusoidal signals, the results of high resolution estimators depend generally on the estimation of the number of signal components. For this purpose, different estimation criteria have been suggested in literature (AIC, MDL). To avoid having to choose the number of components, another approach consists in applying a relevant weighting to separate the signal/noise subspaces. Concerning the category of MUSIC estimators, we put forward a new weighting scheme which reaches a compromise between two opposed performance criteria : the first one to separate signal and noise subspaces, and the second one to improve the matrix conditioning. It is based on a combination of Silverstein and Choi's weightings ([SIL91], [CHO93]), and allows us to obtain results nearly equivalent to those achieved with MUSIC estimator when the latter is used with the exact number of components.

### 2. LES ESTIMATEURS MUSIC PONDERES

Pour une séquence  $x$  de  $L$  échantillons, constituée de  $M$  exponentielles complexes (ou  $M/2$  sinusoïdes) et d'un bruit blanc gaussien additif  $b$  de variance  $\sigma_b^2$ , on peut former la matrice de covariance  $R_x$  de dimension  $(N, N)$  où  $M \leq N \leq (L - M)$ . Celle-ci peut se décomposer comme suit :

$$R_x = S_S P S_S^H + R_B = R_S + R_B \quad (1)$$

où  $P = \text{diag}(P_1 \dots P_M)$  est la matrice des puissances des composantes ( $P_i = |A_i|^2$ ,  $A_i$  amplitude complexe),  $R_B = \sigma_b^2 I$  ( $I$  matrice identité  $(N, N)$ ), et  $S_S = [s_1 \dots s_M]$  forme, par définition, le sous-espace signal ( $s_i = [1 e^{j\omega_i} \dots e^{j(N-1)\omega_i}]^T$ ). La décomposition en valeurs propres de la matrice  $R_S$  s'écrivant  $R_S = \sum_{i=1}^M \mu_i e_i e_i^H$ , on montre que la décomposition en valeurs propres de la matrice  $R_x$  est de la forme :

$$R_x = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i e_i^H \quad (2)$$

où les valeurs propres  $\lambda_i$  sont telles que :

$$\lambda_1 = \mu_1 + \sigma_b^2 \geq \dots \geq \lambda_M = \mu_M + \sigma_b^2 \geq \lambda_{M+1} = \dots = \lambda_N = \sigma_b^2 \quad (3)$$

Elles sont associées aux vecteurs propres  $e_1 \dots e_N$ . Les matrices  $S = [e_1 \dots e_M]$  et  $B = [e_{M+1} \dots e_N]$  définissent les sous-espaces signal et bruit. Les vecteurs propres étant orthogonaux, et les matrices  $S$  et  $R_S$  définissant le même sous-espace signal, les vecteurs de direction,  $s(\omega) = [1 e^{j\omega} \dots e^{j(N-1)\omega}]^T$ , vérifient la relation  $s(\omega)^H B = 0$  pour  $\omega \in \{\omega_1 \dots \omega_M\}$ .



D'où l'expression de l'estimateur fréquentiel MUSIC ([BIE79], [SCH81]):

$$S_{MU}(\omega) = 1 / (s^H(\omega) \hat{B} \hat{B}^H s(\omega)) \quad (4)$$

Ceci suppose, bien sûr la séparation des sous-espaces signal/bruit réalisée.

Toutefois, le problème peut être envisagé de façon différente. En effet, le dénominateur de l'estimateur MUSIC  $f_{MU}(\omega)$  constitue un cas particulier de la forme générale :

$$\begin{aligned} f(\omega) &= s^H(\omega) S \Lambda_S^{-1} S^H s(\omega) + s^H(\omega) B \Lambda_B^{-1} B^H s(\omega) \\ &= s^H(\omega) F \Lambda^{-1} F^H s(\omega) \end{aligned} \quad (5)$$

pour laquelle on définit  $F = [S \ B]$  et une matrice diagonale de pondération  $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_S & 0 \\ 0 & \Lambda_B \end{bmatrix}$ . Lorsque  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , on

retrouve l'estimateur de Capon  $S_{CA}(\omega) = 1 / (s^H(\omega) \hat{R}_x^{-1} s(\omega))$ . De manière plus générale, on pose  $\Lambda = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  où les  $\alpha_i$  sont appelées pseudo-valeurs propres (p.vp) de  $R_x$ . Suivant le choix opéré pour ces p.vp, on retrouve les différents estimateurs MUSIC pondérés, que l'on peut classer en deux catégories (cf. tableau 1) : la première suppose une troncature de la matrice  $R_x^{-1}$  ( $\Lambda_S = 0_{(M,M)}$ ), ce qui correspond à la forme classique de MUSIC si de plus,  $\Lambda_B = I_{(N-M, N-M)}$ , tandis que la seconde famille comprend les pondérations qui s'appliquent à l'ensemble des valeurs propres et qui tendent à annuler le premier terme de la relation (5) ( $\Lambda_S \rightarrow 0_{(M,M)}$ ), éludant ainsi le problème du choix de la valeur de M.

La première famille fait l'objet d'une abondante littérature ([BIE79], [JOH82], [KUM83]). Dans le deuxième cas, les p.vp sont obtenues à partir des valeurs propres de départ, par normalisation éventuelle, puis élévation à une puissance p [CHO93], ce qui accentue l'écart entre les valeurs les plus élevées, supposées associées au signal, et les plus faibles censées être associées au bruit.

### 3. PONDERATION PROPOSEE

La transformation proposée par Silverstein [SIL91] (dans le contexte particulier des méthodes AR) consiste à rehausser les valeurs propres d'un pourcentage  $\beta$  de la moyenne de celles-ci :

$$\alpha_i = \lambda_i + \beta \bar{\lambda} \quad (6)$$

Dans le cas des méthodes AR, Silverstein a obtenu des résultats très proches de ceux atteints après troncature au nombre exact de composantes, sauf en cas de faibles rapports signal sur bruit où l'on observe une dégradation importante des performances de son approche. Pour quantifier l'influence de la transformation de Silverstein sur le conditionnement matriciel, on considère le critère 1 (à minimiser)  $C_f = \alpha_1 / \alpha_N$ , à comparer à celui initial  $C_i = \lambda_1 / \lambda_N$ . On montre aisément qu'ici,  $C_f < C_i$ , et donc que le conditionnement est amélioré.

Pour sa part, Choi a proposé une pondération qui, à un facteur constant près, est équivalente à celle de Johnson [JOH82] élevée à une puissance p, soit la pondération suivante :

$$\alpha_i = (\lambda_i / \lambda_N)^p \quad (7)$$

Cependant, contrairement à Johnson, qui n'avait pondéré que les vecteurs propres du sous-espace bruit, donc après troncature, Choi a étendu sa pondération à l'ensemble des vecteurs propres disponibles. Quand p tend vers l'infini, la pondération de Choi est pratiquement équivalente à une troncature. Néanmoins, l'écart entre les valeurs  $\alpha_i$  extrêmes augmente rapidement avec p ce qui limite sa gamme de valeurs. Dans la pratique, cette pondération permet de mieux séparer les sous-espaces signal et bruit, ce que l'on peut vérifier à l'aide du critère 2 (à maximiser) de séparation finale  $S_f = \alpha_M - \alpha_{M+1}$ , à comparer à

$S_i = \lambda_M - \lambda_{M+1}$ .  $S_f$  correspond simplement à l'écart entre la plus faible p.vp associée au signal et la plus élevée des p.vp associées au bruit. On montre que :

$$S_f > S_i \text{ sous réserve que } \sum_{n=0}^{p-1} \lambda_M^{p-n-1} \lambda_{M+1}^n > \lambda_N^p \quad (8)$$

ce qui est vérifié en pratique dès lors que N est suffisamment grand par rapport à M.

Au vu de ce qui précède, il paraît intéressant d'envisager une pondération qui combine les deux propriétés. Malheureusement, celles-ci sont en fait antagonistes et un compromis doit être recherché. A cet effet, nous proposons de modifier la pondération de Choi de la manière suivante :

$$\alpha_i = (\lambda_i / \lambda_N)^p + \beta (\bar{\lambda} / \lambda_N)^p \quad (9)$$

Cette nouvelle pondération est identique à celle de Choi dans le cas où  $\beta = 0$ , et se comporte comme celle de Silverstein quand  $p=1$ , à un facteur  $\lambda_N$  près. Le critère  $S_f$  étant indépendant du paramètre  $\beta$ , on retrouve la propriété (8). D'autre part, on montre aisément que le critère  $C_f$  s'écrit :

$$C_f = (C_i)^p \left[ 1 + \frac{\beta (\bar{\lambda})^p [(\lambda_N)^p - (\lambda_1)^p]}{(\lambda_1 \lambda_N)^p + \beta (\lambda_1 \bar{\lambda})^p} \right] \quad (10)$$

Le terme  $[(\lambda_N)^p - (\lambda_1)^p]$  étant négatif, on a  $C_f < (C_i)^p$ , par conséquent, à pouvoir de séparation équivalent, le conditionnement matriciel associé à notre pondération est meilleur que celui assuré par la pondération de Choi.

Finalement, la pondération proposée permet au paramètre p de pouvoir jouer pleinement son rôle de paramètre "séparateur" des sous-espaces signal et bruit, tout en maintenant le conditionnement numérique à des valeurs raisonnables à l'aide du paramètre  $\beta$ . Cela est nécessaire car, en pratique, les N-M dernières valeurs propres estimées ne sont pas égales mais continuent de décroître.

Afin d'illustrer quelque peu les performances des diverses approches, nous considérons le jeu de valeurs propres  $\lambda_i = \{10, 10, 3, 3, 1, 1\}$ , où, par exemple, les deux premières valeurs sont supposées liées au signal et les quatre dernières au bruit. Les résultats sont présentés dans le tableau 2. La qualité de séparation signal/bruit est bien sûr déterminée par la valeur de p, indépendamment de  $\beta$ . Le conditionnement tend à s'améliorer quand  $\beta$  augmente, quelque soit la valeur de p. La pondération proposée offre un bon compromis conditionnement/séparation, on constate comme prévu, qu'à critère 2 fixé, le critère 1 se dégrade plus fortement avec la pondération de Choi. De même, à conditionnement donné, la séparation obtenue avec notre méthode apparaît supérieure.

### 4. CHOIX DES PARAMETRES $\beta$ ET p

La valeur de M étant inconnue, le critère 2 doit être maximisé, ce qui conduit à fixer p aussi élevé que possible. La valeur de p étant choisie, on peut, pour un conditionnement fixé, en réécrivant la relation (10), exprimer  $\beta$  :

$$\beta = \frac{C_i^p - C_f}{(C_f - 1)(\bar{\lambda} / \lambda_N)^p} \quad (11)$$

Dans la pratique, nous avons pu observer que p devait être limité à une valeur raisonnable ( $p < 10$ ). En effet, une valeur de p trop élevée peut entraîner des écarts disproportionnés entre des p.vp associées au signal. Dès lors, certaines d'entre elles ne sont plus différenciées des p.vp associées au bruit. Au niveau spectral, cela se traduit par une perte de résolution. Cette apparente contradiction réside dans l'insuffisance du critère 2 qui ne prend pas en compte l'ensemble des p.vp associées au signal, mais seulement la dernière. La dégradation des performances est d'autant plus importante que les puissances

des composantes du signal sont au départ différentes, ou bien que certaines d'entre elles soient à des niveaux proches de celui du bruit. On peut imaginer qu'un choix de  $\beta$  trop élevé produirait les mêmes effets, toutefois, le choix d'un conditionnement final suffisamment grand et d'une valeur relativement réduite de  $p$ , garantit une valeur de  $\beta$  faible. De manière générale, il y a intérêt à fixer le conditionnement à une valeur proche de la limite acceptable ( $1/(N\epsilon)$ ), où  $\epsilon = 2.2204 \cdot 10^{-16}$  représente la précision relative de notre machine), ce qui a pour effet de dilater la gamme de variation de  $p$ , permettant ainsi de se limiter à des valeurs entières de celui-ci, tout en préservant une certaine finesse d'ajustement.

Afin d'illustrer les comportements décrits ci-dessus, nous fixons au préalable le critère 1 à  $C_f = 10^{13}$ , puis considérons les exemples suivants pour lesquels  $\beta$  est déterminé par la relation (11) selon la valeur de  $p$ .

Le premier exemple correspond à un signal  $x(t)$  de 64 échantillons comprenant deux sinusoides d'amplitude différente et de fréquences normalisées  $f_1 = 0,25$ ,  $f_2 = 0,26$ , noyées dans un bruit blanc gaussien  $b(t)$  de variance unitaire :

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + b(t) \quad (12)$$

où  $t=1, 2, \dots, 64$ ,  $A_1 = A_2 = 14,14$  (20 dB). La matrice de covariance  $\hat{R}_x$  est estimée sous forme covariance modifiée avec  $N=32$ . Les estimateurs obtenus avec notre pondération, pour les valeurs  $p=5$  et  $p=16$ , sont comparés à l'estimateur MUSIC ( $M$  supposé connu ( $M=4$ )), qui constitue notre référence (cf. figure 1). Ainsi, quand  $p=5$ , on retrouve l'estimateur MUSIC d'une manière quasi-parfaite, et ceci pour des valeurs de  $p$  pouvant s'élever jusqu'à 12. Quand  $p=16$ , on observe comme prévu une perte de résolution fréquentielle.

Dans le second exemple, seules les puissances des deux sinusoides sont modifiées (20 dB et 5 dB). Au problème de résolution fréquentielle s'ajoute un problème de résolution dynamique. La pondération proposée, avec  $p=5$ , fournit une estimation très proche de MUSIC ( $M = 4$ ) (cf. figure 2), mais le niveau de bruit est légèrement plus élevé à 0.47 Hz. D'autre part, la gamme de choix de  $p$  est plus restreinte. A titre de comparaison, la pondération de Choi permet de séparer les deux sinusoides de fréquence proche, mais fait apparaître d'autres composantes, dont certaines proches du niveau du signal. Ce comportement se retrouve également dans les autres exemples. Dans le troisième exemple, le signal décrit par l'équation (12) comprend une troisième sinusoïde à 0.4 Hz de 5dB. De même que dans le premier exemple, notre estimateur pondéré présente une allure similaire à celle de MUSIC ( $M = 6$ ) (cf. figure 3). Quand  $p$  atteint la valeur 8, on observe une perte de résolution au niveau de la composante à 0.4 Hz de plus faible puissance.

Sur ces exemples, et sous réserve que le choix de  $p$  s'effectue dans une gamme correcte, la pondération proposée offre des résultats comparables à ceux de l'estimateur MUSIC avec  $M$  supposé connu.

## 5. SIMULATIONS

Dans ce paragraphe, nous étudions les performances de la méthode proposée du point de vue de la précision et de la variance fréquentielles. Nous avons retenu le signal  $x(t)$  de la relation (12) avec les caractéristiques suivantes :

signal1 : 32 échantillons,  $f_1 = 0,25$  (20 dB),  $f_2 = 0,27$  (20 dB)

signal2 : 32 échantillons,  $f_1 = 0,25$  (20 dB),  $f_2 = 0,27$  (10 dB)

La matrice de covariance est également estimée sous forme de covariance modifiée avec  $N=16$ . 50 simulations multiples sont effectuées dans chaque cas et nous permettent de comparer les résultats à ceux obtenus avec MUSIC ( $M$  connu). Enfin, le dernier exemple est destiné à évaluer l'intérêt de notre pondération lorsqu'elle est utilisée avec une variante, dite

ROOT-MUSIC [BAR83], et connue pour sa résolution fréquentielle supérieure à celle de MUSIC. L'ensemble des résultats est résumé dans le tableau 3.

Dans le cas du signal1, l'estimateur MUSIC non pondéré et les estimateurs MUSIC pondérés (avec des valeurs de  $p$  adéquates), présentent un biais fréquentiel sensiblement égal. Il en est de même pour les variances et erreurs quadratiques moyennes (EQM) fréquentielles. Pour ces mêmes simulations, la variante ROOT-MUSIC offre des performances en précision légèrement supérieures à celles de MUSIC. Dans ce dernier cas, notre méthode entraîne un biais plus important sur la deuxième fréquence.

Dans le cas du signal2, où se pose un problème supplémentaire de résolution dynamique, la composante à 10dB ( $f_2 = 0,27$ ), est moins bien estimée que l'autre avec MUSIC. Avec notre approche ( $p=5$ ), les deux fréquences sont moins bien estimées, mais le biais reste toutefois raisonnable, ainsi que la variance et l'EQM. Les performances se dégradent d'autant plus avec  $p=7$ . Avec des valeurs de  $p$  inférieures à 5, des composantes erronées surgissent. Comme prévu, la variante ROOT-MUSIC (pondérée ou non) donne de meilleurs résultats que MUSIC dans tous les cas. On observe que les performances, en terme de variance et d'erreur quadratique moyenne, avec l'estimateur ROOT-MUSIC associé à notre pondération, surpassent légèrement celles de ROOT-MUSIC non pondéré, le biais fréquentiel restant cependant plus élevé.

## 6. CONCLUSION

Dans la pratique de l'analyse spectrale haute résolution, l'étape préliminaire de détermination a priori du nombre de composantes (ou de l'ordre du modèle) est la plus importante dans la mesure où elle conditionne totalement la qualité des estimations spectrales. Dans cet article, nous nous sommes intéressés à une approche qui permet de s'affranchir de ce choix crucial. Elle repose sur une pondération, appliquée à l'ensemble des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation, et issue de l'association de deux transformations proposées par ailleurs. Après avoir introduit deux mesures des propriétés que sont le conditionnement matriciel et la séparation entre les valeurs propres associées au signal ou au bruit, nous avons montré que notre pondération réalise un compromis entre ces deux propriétés. Celui-ci est réglé par l'intermédiaire de deux nouveaux paramètres pour lesquels nous avons donné des indications quant au choix de leur valeur et la démarche à suivre. Des exemples de simulation ont été présentés afin de mettre en évidence les principales caractéristiques des signaux qui influent sur ce choix et qui, le cas échéant, peuvent constituer des connaissances a priori que l'on peut mettre à profit. Enfin, à l'aide de simulations multiples, nous avons montré, dans le cas de signaux constitués de 2 ou 3 sinusoides bruitées, que notre approche permet d'atteindre des performances comparables à celles fournies par les estimateurs MUSIC ou ROOT-MUSIC non pondérés, tant sur le plan de la précision fréquentielle que de la variance des fréquences estimées. Bien que dans l'ensemble, les résultats observés soient satisfaisants, il est clair que des essais plus poussés doivent encore être menés afin d'asseoir les aptitudes réelles de la méthode. En particulier, son comportement dans des situations beaucoup plus complexes (grand nombre de composantes, grande proximité de plusieurs raies, etc.), telles qu'il s'en présente notamment en spectroscopie RMN, reste à évaluer, de même que l'influence sur la résolution fréquentielle.

## REFERENCES

- [BAR83] Barabell A.J. : Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms. Proc. of Int. Conf. on ASSP, pp. 336-339, Boston (Mass.), 1983.



[BIE79] Bienvenu G., Kopp L. : Principe de la goniométrie passive adaptative. Actes du 7ième colloque GRETSI, Nice, 1979.

[CHO93] Choi J., Song L., Kim H.M : On estimating the direction of arrival when the number of signal sources is unknown. Signal processing, Vol. 34, n°2, pp. 193-205, 1993.

[JOH82] Johnson D., DeGraaf S.R. : Improving the resolution of bearing in passive sonar arrays by eigenvalue analysis. IEEE Trans. on ASSP, Vol. 30, n° 4, pp. 638-647, 1992.

[KUM83] Kumaresan R., Tufts D.W. : Estimating the angles of arrival of multiple plane waves. IEEE Trans. on AES, Vol. 19, n° 1, pp. 134-139, 1983.

[SCH81] Schmidt R.O. : A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation. Ph.D. diss., Stanford University, Stanford, 1981.

[SIL91] Silverstein S.D. : Linear minimum free energy estimation : A computationally efficient noise suppression spectral estimation algorithm. IEEE Trans. on SP, Vol. 39, n° 6, pp. 1348-1358, 1991.

Famille $\Lambda_S = 0_{(M,M)}$	
MUSIC	$\Lambda_B = I, \alpha_i = 1$
Johnson	$\Lambda_B = \text{diag}(\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N), \alpha_i = \lambda_i$
norme minimale	$\Lambda_B^{-1} = c c^H, c^H$ : première ligne de B
Famille $\Lambda_S \rightarrow 0_{(M,M)}, \Lambda = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$	
Silverstein	$\alpha_i = \lambda_i + \beta \bar{\lambda}$
Choi	$\alpha_i = (\lambda_i / \lambda_N)^p$
pondération proposée	$\alpha_i = (\lambda_i / \lambda_N)^p + \beta (\bar{\lambda} / \lambda_N)^p$

Tableau 1 : Estimateurs MUSIC pondérés

paramètres	pondération	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_1 / \alpha_6$	$\alpha_2 - \alpha_3$
$\lambda_i$	sans	10	10	3	3	1	1	10	7
$\beta=10\%$	Silverstein	10,5	10,5	3,5	3,5	1,5	1,5	7.1	7
$p=2$	Choi	100	100	9	9	1	1	100	91
$\beta=10\%, p=2$	proposée	102,2	102,2	11,2	11,2	3,2	3,2	32.1	91
$p=4$	Choi	10000	10000	81	81	1	1	10000	9919
$\beta=10\%, p=4$	proposée	10047	10047	128,4	128,4	48,4	48,4	207	9919
$\beta=20\%, p=4$	proposée	10095	10095	176	176	96	96	105	9919

Tableau 2 : Effets des différentes pondérations

MUSIC	biais $\times 10^{-4}$	$-10 \log(\text{var}(\hat{f}_1, \hat{f}_2))$	$-10 \log(\text{EQM}(\hat{f}_1, \hat{f}_2))$	biais $\times 10^{-4}$	$-10 \log(\text{var}(\hat{f}_1, \hat{f}_2))$	$-10 \log(\text{EQM}(\hat{f}_1, \hat{f}_2))$
M connu (M=4)	-2.05, -0.29	62.48, 61.12	62.17, 62.11	-2.32, 37	60.44, 33.76	60.18, 33.62
pond. prop. (p=p1)	-2.09, -0.30	62.45, 61.17	62.13, 61.17	-34, 12	32.90, 36.45	32.81, 36.42
pond. prop. (p=p2)	-2.07, -0.30	62.46, 61.16	62.14, 61.15	-45, 72	32.52, 30.84	32.36, 30.57
ROOT-MUSIC	Signal1 : p1 = 5, p2 = 10			Signal2 : p1 = 5, p2 = 7		
M connu (M=4)	-1.90, 0.12	62.45, 61.15	62.19, 61.15	-1.72, 0.028	60.67, 51.25	60.51, 51.25
pond. prop. (p=p1)	-1.24, 1.39	62.53, 61.35	62.41, 61.24	-1.41, -0.49	60.72, 51.53	60.62, 51.53
pond. prop. (p=p2)	-1.36, 1.38	62.45, 61.24	62.31, 61.13	-2.27, 1.82	61.12, 51.76	60.84, 51.74

Tableau 3 : Résultats des simulations

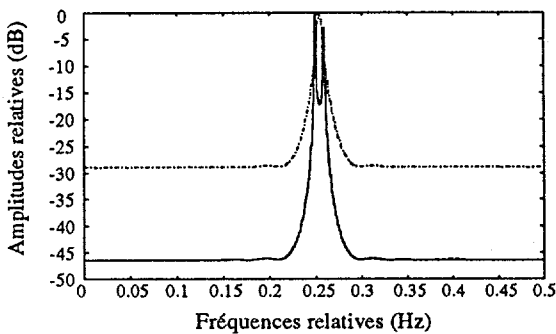


Figure 1 : MUSIC [M=4] (-), p=5 (--), p=16 (-.)

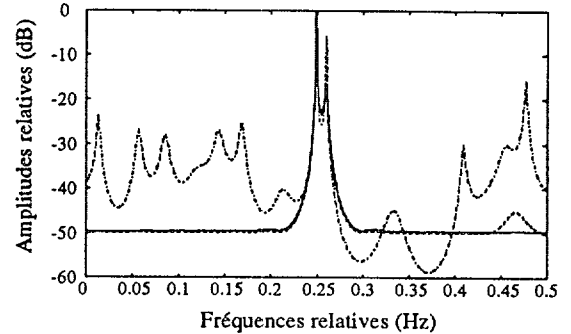


Figure 2 : MUSIC [M=4] (-), p=5 (--), Choi [p=5] (-.)

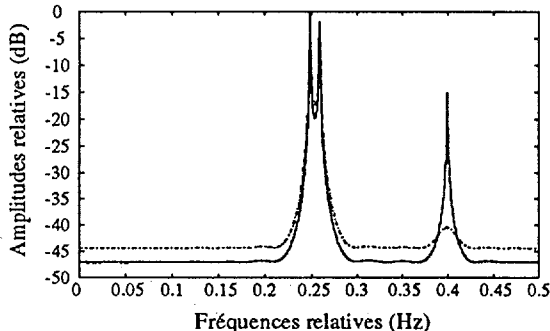


Figure 3 : MUSIC (-) (M=6), p=5 (--), p=8 (-.)