

TAM-2D et alternatives

ANDRIEU Christophë - DUVAUT Patrick

Laboratoire ETIS - Groupe Signal / 6, avenue du Ponceau 95014 Cergy-Pontoise Cedex

RÉSUMÉ

Nous nous proposons d'étendre l'algorithme d'analyse spectrale haute résolution TAM au cas bidimensionnel. Cette extension ne consiste pas uniquement en une réécriture de l'algorithme au moyen de produits tensoriels. En effet, il apparaît rapidement un problème d'appariement des couples de fréquences. Nous proposons donc une solution à ce problème, puis une alternative à l'algorithme bidimensionnel pur, dont le coup de calcul est élevé. Nous proposons enfin une étude expérimentale des performances en termes de pouvoir séparateur, résolution et variance d'estimation pour diverses conditions de bruit.

ABSTRACT

In this paper, we address the problem of estimating bidimensional sinusoids embedded in white gaussian noise, using the TAM (Toeplitz Approximated Method) procedure. The paper does not only consist in rewriting the TAM procedure using Kronecker products : indeed, a fundamental problem arises, called "frequency decoupling". We thus propose a method in order to solve this problem. We also propose an alternative to the 2D algorithm, in order to avoid the huge quantity of calculus required in this later case. We also provide experimental results, concerning the estimation accuracy, that is resolution, resolving power and empirical variance estimate.

1. INTRODUCTION

L'analyse spectrale bidimensionnelle, comme en attestent les travaux récents [1][3], suscite un intérêt tout particulier, sous l'impulsion notamment de la communauté du traitement de l'image. La méthode d'analyse spectrale haute résolution MUSIC a déjà fait l'objet d'une adaptation [1] et d'une étude de performances [3]. Nous prolongeons ici ces travaux par une extension de la méthode TAM (Toeplitz Approximated Method) au cas bidimensionnel, suivie par la présentation d'une alternative 'dégénéréscente' beaucoup moins coûteuse en calculs que la méthode bidimensionnelle pure, valable dans le cas où le nombre de sources est supposé réduit.

2. RAPPEL SUR LA MÉTHODE DANS LE CAS 1D.

2.1. Le cas non bruité.

2.1.1. Mise en forme des données.

Considérons un signal y , somme de p exponentielles complexes :

$$y[k] = \sum_{n=1}^p a_n e^{i(k\omega_n + \varphi_n)} \text{ pour } k = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

où a_n , ω_n et φ_n sont respectivement les amplitudes, les fréquences et les phases de chacune des exponentielles. Les fréquences sont supposées distinctes.

Les données sont ensuite disposées dans une matrice de type Hankel de taille $L \times (N - L + 1)$:

$$Y = [y[k+l]]_{\substack{0 \leq k \leq N-L \\ 0 \leq l \leq L-1}} \quad (2)$$

où L est un entier vérifiant les inégalités suivantes : $p+1 \leq L \leq N+1-p$.

On montre que cette matrice peut se réécrire de la manière suivante :

$$Y = S_L \text{Diag}(a_k e^{i\varphi_k}) S_{N-L+1} \quad (3)$$

où S_L désigne la matrice dont les p colonnes sont les vecteurs de direction classiques :

$$S_L = \text{Col}(e_k^L), \text{ avec } e_k^L = [e^{jq\omega_k}]_{0 \leq q \leq L-1} \quad (4)$$

On remarque, du fait des hypothèses sur L et de la structure de type Van der Monde de la matrice S_L , que Y est de rang p .

On peut d'autre part décomposer cette matrice Y en valeurs singulières, soit :

$$Y = U_s \Sigma_s V_s^* \quad (5)$$

où l'on a uniquement conservé les p valeurs singulières non nulles.

Il est alors clair que les colonnes de U_s et S_L sont des bases de l'espace image de Y . Il existe donc une matrice régulière P telle que l'on ait la relation suivante :

$$S_L = U_s P \quad (6)$$



2.1.2. Relation fondamentale de TAM.

La clef de la méthode TAM se trouve dans la relation suivante :

$$S_L \downarrow \text{Diag}(e^{i\omega_k}) = S_L \uparrow \quad (7)$$

où \uparrow (resp. \downarrow) signifie que l'on a retiré la première (resp. la dernière) ligne de la matrice S_L pour obtenir cette nouvelle matrice $S_L \uparrow$ (resp. $S_L \downarrow$).

L'équation (6) donne d'autre part les deux relations suivantes :

$$S_L \downarrow = U_s \downarrow P \text{ et } S_L \uparrow = U_s \uparrow P \quad (8)$$

qui par (7) et puisque P est supposée régulière donnent avec $D = \text{Diag}(e^{i\omega_k})$:

$$U_s \downarrow (PDP^{-1}) = U_s \uparrow \quad (9)$$

que l'on réécrit par commodité :

$$U_s \downarrow F = U_s \uparrow \quad (10)$$

Il est clair que les pulsations $e^{i\omega_k}$ à estimer sont les valeurs propres de :

$$F = U_s \downarrow \# U_s \uparrow \quad (11)$$

où $\#$ signifie pseudo-inverse.

2.2. Cas bruité.

On procède exactement de la même manière que dans le cas non bruité, mais ici la matrice U_s ne donnera qu'une estimée d'une base de l'espace signal, puisqu'aux valeurs exactes du signal se superpose un bruit blanc Gaussien. Ensuite le fait de prendre la pseudo inverse pour le calcul de F dans (11) signifiera que le calcul se fait au sens des moindres carrés.

3. ADAPTATION AU CAS BIDIMENSIONNEL.

3.1. Mise en forme des données.

Ici nous nous préoccupons d'un signal constitué de la superposition de sinusoides bidimensionnelles. Le signal, s'il n'est pas bruité, est modélisé par des exponentielles complexes d'amplitudes a_k , de phases aléatoires φ_k et de couples de fréquences (ω_k, Ω_k) , dont les composantes correspondent à celles de la fréquence du phénomène selon les axes d'abscisses et d'ordonnées, soit donc :

$$y[k, l] = \sum_{n=1}^p a_n e^{i(k\omega_n + l\Omega_n + \varphi_n)} \quad (12)$$

avec $0 \leq k \leq N_1 - 1$ et $0 \leq l \leq N_2 - 1$

Nous nous inspirons alors de la méthode TAM monodimensionnelle et réécrivons l'expression (12) sous la forme suivante :

$$y[k_1 + k_2, l_1 + l_2] = \sum_{n=1}^p a_n e^{i((k_1+k_2)\omega_n + (l_1+l_2)\Omega_n + \varphi_n)}$$

où $0 \leq k_1 \leq L_1 - 1$, $0 \leq l_1 \leq L_2 - 1$,
 $0 \leq k_2 \leq N_1 - L_1$, $0 \leq l_2 \leq N_2 - L_2$ et
 $p + 1 \leq L_i \leq N_i + 1 - p$ pour $i = 1$ ou 2 .

(13)

Introduisons les notations (concernant des vecteurs colonnes) :

$$\omega_k^L = [e^{ip\omega_k}]_{0 \leq p \leq (L-1)} \text{ et } \Omega_k = [e^{ip\Omega_k}]_{0 \leq p \leq (L-1)}$$

et $\underline{\omega}_k^{L,L'} = \omega_k^L \otimes \Omega_k^{L'}$

Où \otimes est le produit de Kronecker de deux matrices.

Le produit de vecteurs (13) peut être alors interprété comme l'élément $[Y]_{k_1 L_1 + l_1, k_2 (N_1 - L_1) + l_2}$ du produit des trois matrices :

$$Y = \left[\underline{\omega}_k^{L_1, L_2} \right]_{k=1 \dots p} \text{Diag}(a_k e^{i\varphi_k}) \left[\underline{\omega}_k^{N_1 - L_1 + 1, N_2 - L_2 + 1} \right]_{k=1 \dots p}^T \quad (14)$$

Qui peut s'interpréter à partir des données $y[k, l]$ comme une matrice de Hankel dont les éléments sont eux mêmes des matrices de Hankel :

$$Y = [Y_{l_1, l_2}]_{\substack{0 \leq l_1 \leq L_2 - 1 \\ 0 \leq l_2 \leq N_2 - L_2}} \quad (15)$$

Où Y_{l_1, l_2} est la matrice de Hankel suivante :

$$Y_{l_1, l_2} = [y[k_1 + k_2, l_1 + l_2]]_{\substack{0 \leq k_1 \leq L_1 - 1 \\ 0 \leq k_2 \leq N_1 - L_1}} \quad (16)$$

Introduisons finalement la notation suivante : $S_{L, L'} = \text{Col} \left[\underline{\omega}_k^{L, L'} \right]$ qui est une matrice de dimensions $(L \times L') \times p$.

On obtient alors l'égalité suivante fondamentale de décomposition de la matrice des données Y :

$$Y = S_{L_1, L_2} \text{Diag}(a_k e^{i\varphi_k}) S_{N_1 - L_1 + 1, N_2 - L_2 + 1} \quad (17)$$

On note que le rang de la matrice Y est égal à p (On aura remarqué par exemple que les L_1 premières lignes de S_{L_1, L_2} , ou les L_1 premières lignes de chacun des groupes de L_i lignes constituent une matrice de Van der Monde dont le rang est p du fait de la condition sur L_1 et L_2 , et des fréquences supposées différentes).

Cette matrice Y est par ailleurs décomposable en valeurs singulières :

$$Y = U_s \Sigma_s V_s^* \quad (18)$$

où la matrice U_s est la matrice contenant les p vecteurs propres correspondants aux valeurs singulières non nulles de Y qui sont au nombre de p puisque Y est de rang p . Ces vecteurs forment une base de l'espace image de Y .

Les colonnes de S_{L_1, L_2} forment elles aussi une base de l'image de Y , et on peut donc affirmer l'existence d'une matrice P non singulière telle que l'on ait la relation suivante :

$$S_{L, L'} = U_s P \quad (19)$$

3.2. La méthode TAM à proprement parler

Notons

$$S_{L, L'} \uparrow^{p, q} = \text{Col}[\omega_k^L \uparrow^{(p)} \otimes \Omega_k^{L'} \uparrow^{(q)}] \quad (20)$$

et

$$S_{L, L'} \downarrow^{p, q} = \text{Col}[\omega_k^L \downarrow^{(p)} \otimes \Omega_k^{L'} \downarrow^{(q)}] \quad (21)$$

où la flèche simple a la même signification qu'en (7), et dont $\uparrow^{(p)}$ et $\downarrow^{(p)}$ sont les itérées p fois.

On a alors la relation fondamentale de la méthode TAM ici transposée au cas bidimensionnel :

$$S_{L, L'} \downarrow^{p, q} \text{Diag} \left(e^{i(p\omega_k + q\Omega_k)} \right) = S_{L, L'} \uparrow^{p, q} \quad (22)$$

D'où d'après la relation (19), et puisque P est non singulière :

$$U_s \downarrow^{p, q} (PDP^{-1}) = U_s \uparrow^{p, q} \quad (23)$$



où $D = \text{Diag}(e^{i(p\omega_k + q\Omega_k)})$.

On peut par commodité réécrire (23) de la manière suivante :

$$U_s \Downarrow^{p,q} F = U_s \Uparrow^{p,q} \text{ où } F = [U_s \Downarrow^{p,q}]^H U_s \Uparrow^{p,q} \quad (24)$$

Les exponentielles complexes contenant les combinaisons linéaires des pulsations cherchées sont alors valeurs propres de la matrice F .

On note en premier lieu qu'il serait nécessaire de réitérer l'algorithme une seconde fois, pour un autre couple (p', q') afin de résoudre un système linéaire 2×2 . Cependant, les deux décompositions en valeurs singulières étant effectuées, on ne pourra a priori pas mettre en correspondance les valeurs singulières obtenues. C'est pourquoi on ne va pas limiter l'étude aux seules valeurs propres de F mais étudier ses vecteurs propres qui eux vont permettre par la relation (19) de retrouver les colonnes de S_{L_1, L_2} , dont nous connaissons la structure. Une simple identification permettra alors d'estimer, par couples, les pulsations recherchées. Cette démarche a déjà été adoptée dans [2], dans le cadre monodimensionnel, et se montre idoine et robuste.

3.3. Discussion

On constate immédiatement que le défaut de cette méthode provient de son coût rapidement dissuasif en termes de complexité algorithmique. Pour remédier à cela, on peut, en adoptant la démarche de [1], penser effectuer l'algorithme TAM-1D selon deux directions de l'image. Une telle démarche permet alors de déterminer séparément les fréquences horizontales et verticales en réduisant de manière significative la quantité de calcul requise. Cependant on peut remarquer que la démarche développée précédemment n'est pas optimale, dans le sens où la matrice dans laquelle sont rangées les données contient énormément de redondance : comme le montre la décomposition (14), la matrice de droite n'intervient aucunement dans l'algorithme. Il est donc naturel de chercher une autre mise en forme des données, qui supprime cette redondance.

3.4. Découplage des composantes fréquentielles

3.4.1. Mise en équation de la méthode

On applique le principe énoncé ci-dessus, de manière à ce que les premières composantes des fréquences soient placées dans la première matrice, et les secondes dans la matrice de droite, soit avec les notations déjà familières :

$$y[k, l] = \sum_{n=1}^p a_n e^{i(k\omega_n + l\Omega_n + \varphi_n)} \quad (25)$$

Qui peut être réécrite de la manière suivante :

$$y[k, l] = [e^{ik\omega_j}]_{j=1 \dots p} \text{Diag}(a_k e^{i\varphi_k}) [e^{il\Omega_j}]_{j=1 \dots p}^T \quad (26)$$

On introduit naturellement la matrice des données suivante :

$$Y = [\omega_1^{N_1} \quad \dots \quad \omega_p^{N_1}] \text{Diag}(a_k e^{i\varphi_k}) \begin{bmatrix} [\Omega_1^{N_2}]^T \\ \vdots \\ [\Omega_p^{N_2}]^T \end{bmatrix} \quad (27)$$

qui n'est rien d'autre que l'image dont on dispose au départ. On remarque déjà un aspect limitatif de la méthode, puisque pour s'assurer que Y est de rang p , il faut que les premières et secondes composantes fréquentielles soient distinctes entre elles. Il ne faut pas cependant rejeter la méthode, si l'on admet qu'un tel cas est peu plausible en situation réelle.

On rappelle que l'on peut décomposer cette matrice Y en valeurs singulières :

$$Y = U_s \Sigma_s V_s^*$$

3.4.2. Extraction des fréquences

On applique la méthode TAM classique où mixte (cf Farrier et Mayrargues) qui permet d'estimer les premières composantes des couples de fréquences. On constate alors qu'une seule décomposition en valeurs singulières d'une matrice $N_1 \times N_2$ sera suffisante afin de déterminer les premières et les secondes composantes, puisqu'une simple transposition de la matrice des données permettra d'appliquer directement l'algorithme une seconde fois et d'obtenir ces secondes composantes.

Il est bon de noter que l'intérêt est ici double, par rapport au cas bidimensionnel puisque naturellement on réduit les calculs d'un facteur $2 \times N^3$ (dans le cas où l'image est carrée), mais on évite de plus la mise en forme des données (14), qui était alors assez complexe.

Malheureusement, comme l'indique le titre de ce paragraphe, il y a découplage des composantes fréquentielles, c'est dire qu'ayant estimé séparément premières et secondes composantes, on ne sait pas a priori comment les apparier. On peut dans un premier temps penser à l'application d'un véritable algorithme TAM monodimensionnel selon d'autres directions. Comme noté dans [1] cette méthode n'est valable que pour un nombre limité de sinusoides. On se contentera plutôt d'une simple FFT, dont le rôle ne sera que de localiser les fréquences dans le plan, l'estimation ayant déjà été effectuée.

3.5. Résultats expérimentaux

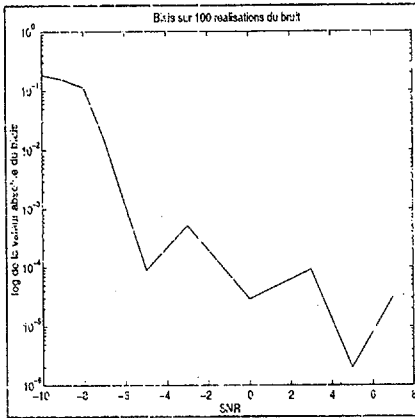
3.5.1. TAM-2D

Nous présentons ici les performances de l'algorithme TAM-2D, en termes de biais, variance de l'erreur d'estimation et pouvoir séparateur de la méthode pour quatre rapport signal/bruit. L'analyse du pouvoir séparateur consiste à étudier expérimentalement le taux de bonnes détections en présence de deux sinusoides, une bonne détection étant caractérisée par le fait que les fréquences estimées se trouvent à l'intérieur des disques tangents respectifs, de centres les deux fréquences.

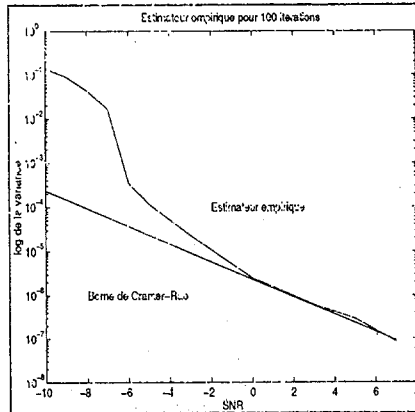


Le calcul de la borne de Cramer-Rao, concernant l'estimation de l'une des composantes de sinusoïde dans un bruit blanc Gaussien dans le cas bidimensionnel, a déjà été effectué explicitement dans [1] et nous ne faisons ici que rappeler le résultat :

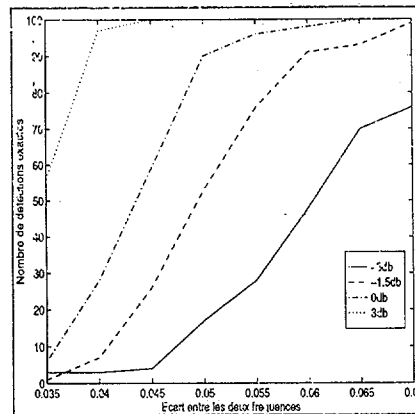
$$CR(v_1) = \frac{6\sigma^2}{(2\pi)^2 a^2 N_1 N_2 (N_1^2 - 1)} \quad (28)$$



Biais de TAM-2D



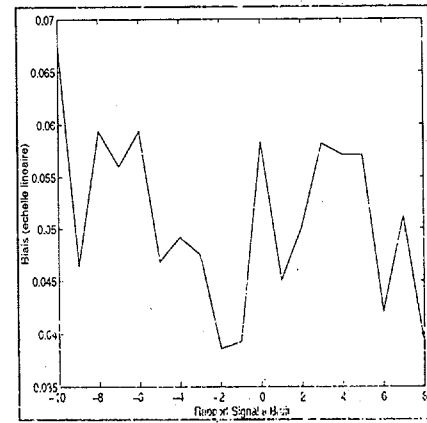
Variance de l'erreur d'estimation de TAM-2D



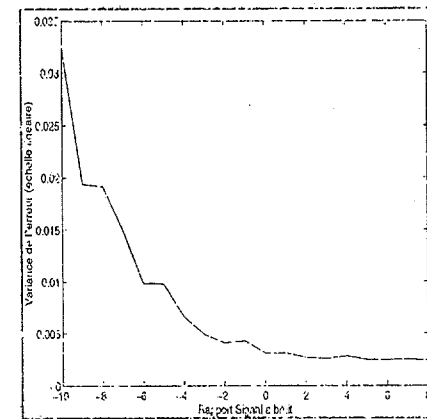
Pouvoir séparateur de TAM-2D

3.5.2. Alternative dégénérée

Nous présentons ici les performances de l'algorithme dégénéré. On note un biais fort, qui ne s'atténue pas à mesure que le rapport signal/bruit augmente. De même, la variance de l'erreur d'estimation atteint très rapidement un palier, beaucoup plus élevé que dans le cas de TAM-2D. On se garde bien sûr d'effectuer une comparaison à une borne de Cramer-Rao, puisque l'on effectue une estimation non-conjointe des couples de fréquences.



Biais de la méthode



Variance de l'erreur d'estimation

4. CONCLUSION

Nous avons proposé une adaptation de l'algorithme TAM au cas bidimensionnel. Les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants, et comparables à ceux obtenus par l'application de l'algorithme MUSIC-2D [1]. En particulier, on note le même effet de rendement de l'algorithme bidimensionnel : l'estimateur se comporte bien jusqu'à -6db , alors qu'un algorithme monodimensionnel aurait atteint ses limites à 3db . La version dégénérée, quoique performante en termes de calculs, montre rapidement ses limites, et surtout ne tend pas à donner de bon résultats lorsque le rapport signal/bruit devient favorable.

5. RÉFÉRENCES

- [1] 'Détection, estimation de phénomènes d'onde en analyse d'image. Application aux surfaces marines'. (Thèse de doctorat de l'Université Paris XI Orsay 1994).
- [2] 'A 2-Steps Spectral Method Involving TAM and a Simplified MUSIC Method' Signal Processing V: Theories and Applications, Elsevier Science Publishers B.V. 1990.
- [3] 'Asymptotic Properties of 2D-MUSIC Estimator and Comparison to 2D MP Estimator', Signal Processing Vol. 40 p.p. 257-268, Elsevier Science B.V. December 1994.