



BRUIT MULTIPLICATIF ET STATISTIQUES DE CUMULANTS

Mounir GHOGHO et Bernard GAREL

GAPSE/ENSEEIH, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse Cedex, France

RÉSUMÉ email: ghogho@len7.enseeih.fr ABSTRACT

Le modèle multiplicatif traité ici concerne les sinusoides modulées en amplitude par un processus linéaire. Cet article présente des résultats de convergence et de normalité asymptotique des estimateurs des cumulants et des paramètres du modèle. Pour l'estimation de la fréquence porteuse, nous comparons deux approches, l'une paramétrique basée sur la représentation ARMA du modèle, l'autre non paramétrique basée sur les statistiques d'ordre supérieur.

The multiplicative model considered here incorporates amplitude modulation of sinusoids by a linear process. Convergence results and asymptotic normality of cumulants and model parameters estimators are obtained. For the carrier frequency estimation, the paper presents a comparison between a parametric approach based on the ARMA representation of the model and a non-parametric approach based on higher order statistics.

1. INTRODUCTION

Dans certains contextes, par exemple en radar, sonar, acoustique et en général à chaque fois que l'information recherchée se trouve dans la réflexion d'une onde sur un obstacle, l'hypothèse d'un bruit additif devient insuffisante pour une bonne modélisation du signal. Des études expérimentales ont prouvé la nécessité d'introduire des modèles à bruit multiplicatif. Dans cette optique, on présente ici le modèle suivant:

$$x_t = y_t \cos(\omega t + \phi), \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

où $0 < \omega < \pi$, $\phi \in [0, 2\pi)$ et $\{y_t\}$ représente les fluctuations de l'amplitude de la sinusoïde qu'on suppose stationnaires centrées et assez régulières pour être modélisables par un processus linéaire :

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

$\{\varepsilon_t\}$ étant une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes, identiquement distribuées et à cumulants, de tout ordre, supposés finis et $\{\psi_k\}$ est une suite absolument sommable.

2. STATISTIQUES DE CUMULANTS

Du fait de la non stationnarité du signal, on définit les moments $M_{x,k}(\cdot)$ et cumulants $C_{x,k}(\cdot)$ non conventionnels suivants : pour $\underline{\tau}_k = (\tau_{k,1}, \dots, \tau_{k,k-1})'$

$$M_{x,k}(\underline{\tau}_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left\{ \prod_{r=0}^{k-1} x(t + \tau_{k,r}) \right\}, \quad (2)$$

où $\tau_{k,0} = 0$ et E désigne l'opérateur espérance mathématique. Il est facile de montrer que les limites (2) existent pour le modèle (1). Les estimateurs de ces moments, à partir de la séquence $X = (x_1, \dots, x_T)'$, sont donnés par les moyennes temporelles suivantes:

$$\widehat{M}_{x,k}(\underline{\tau}_k) = \frac{1}{T} \sum_{t=\tau_m+1}^{T-\tau_M} \left\{ \prod_{r=0}^{k-1} x(t + \tau_{k,r}) \right\}, \quad (3)$$

où $\tau_m = -\min_i \tau_{k,i}$ et $\tau_M = \max_i \tau_{k,i}$. Les propriétés d'ergodicité et de normalité asymptotique relatives à ces statistiques sont résumées dans la proposition suivante.



Proposition 1 :

i) ergodicité

$$\widehat{M}_{x,k}(\tau_k) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s} M_{x,k}(\tau_k)$$

ii) le vecteur $\sqrt{T} (\widehat{M}_{x,k1}(\tau_{k1}) - M_{x,k1}(\tau_{k1}), \dots, \widehat{M}_{x,kn}(\tau_{kn}) - M_{x,kn}(\tau_{kn}))'$ est asymptotiquement gaussien

Preuve : voir appendice

La proposition 1 est valable pour une large classe de signaux $\{y_t\}$ qui vérifient la condition suivante: pour $k = 2, 3, \dots$

$$\sum_{\tau_1, \dots, \tau_{k-1} = -\infty}^{\infty} |C_{k,y}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})| < \infty$$

où les $C_{k,y}(\cdot)$ désignent les cumulants d'ordre k du processus $\{y_t\}$. Cette hypothèse implique que des observations bien séparées dans le temps tendent à être indépendantes statistiquement. La classe de signaux remplissant cette hypothèse contient la plupart des signaux rencontrés en pratique, en particulier les processus linéaires.

En utilisant des formules trigonométriques standard, on montre que les moments et cumulants d'ordre impair du signal $\{x_t\}$ sont nuls. Ainsi dans la suite, nous allons uniquement nous intéresser aux cumulants suivants:

$$\begin{aligned} C_{x,2}(\tau) &= M_{x,2}(\tau) = r_x(\tau) = \frac{1}{2} r_y(\tau) \cos \omega \tau \\ C_{x,4}(\tau) &: = C_{x,4}(0, \tau, \tau) = \frac{1}{8} [C_{y,4}(\tau) + r_y^2(0)] \\ &\quad \cos 2\omega \tau + \frac{1}{4} [C_{y,4}(\tau) + r_y^2(\tau)] \end{aligned} \quad (4)$$

Proposition 2 :

i) La séquence $\sqrt{T}(\widehat{r}_x(0) - r_x(0), \dots, \widehat{r}_x(p) - r_x(p))'$ suit asymptotiquement une loi normale de matrice de covariance Σ donnée par : pour $m, n = 0, 1, \dots, p$,

$$\begin{aligned} \Sigma(m, n) &= \sum_{\varsigma = -\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{8} C_{y,4}(m, -\varsigma, n - \varsigma) \right. \\ &\quad [2 \cos m\omega \cos n\omega + \cos(m - n + 2\varsigma)\omega] + \\ &\quad r_x(\varsigma) r_x(m - n + \varsigma) + r_x(m + \varsigma) r_x(n - \varsigma) + \\ &\quad \left. \frac{1}{8} \cos(m + n)\omega r_y(\varsigma) r_y(m - n + \varsigma) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8} \cos(m - n)\omega r_y(m + \varsigma) r_y(n - \varsigma) \right\} \end{aligned}$$

ii) La séquence $\sqrt{T}(\widehat{C}_{x,4}(0) - C_{x,4}(0), \dots, \widehat{C}_{x,4}(p) - C_{x,4}(p))'$ suit asymptotiquement une loi normale de matrice de covariance:

$$\Gamma = E\Pi E'$$

où Π est la matrice de covariance asymptotique de $\sqrt{T}(\widehat{M}_{x,4}(0), \dots, \widehat{M}_{x,4}(p), \widehat{r}_x(0), \dots, \widehat{r}_x(p))'$ donnée par :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{cov} \left\{ \widehat{M}_{x,4}(m), \widehat{M}_{x,4}(n) \right\} &= \sum_{\varsigma = -\infty}^{\infty} \\ &\quad [M_{x,8}(0, m, m, \varsigma, \varsigma, \varsigma + n, \varsigma + n) - \\ &\quad M_{x,4}(m) M_{x,4}(n)] \\ \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{cov} \left\{ \widehat{M}_{x,4}(m), \widehat{r}_x(n) \right\} &= \sum_{r = -\infty}^{\infty} \\ &\quad [M_{x,6}(0, m, m, \varsigma, \varsigma + n) - M_{x,4}(m) r_x(n)] \\ \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{cov} \left\{ \widehat{r}_x(m), \widehat{r}_x(n) \right\} &= \Sigma(m, n) \end{aligned}$$

et E est la matrice jacobienne $(p+1) \times 2(p+1)$ de la transformation moments-cumulants :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -6r_x(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & -4r_x(p) \end{pmatrix}$$

3. ESTIMATION DES PARAMETRES

3.1. Approche non paramétrique

Si le processus $\{y_t\}$ est gaussien alors, l'usage des cumulants $C_{x,4}(\tau)$ transforme le problème d'un bruit multiplicatif en un problème classique d'une sinusoïde noyée dans un bruit additif gaussien. En effet, quand T est assez grand, on peut écrire :

$$\widehat{C}_{x,4}(\tau) = \frac{1}{8} r_y^2(0) \cos 2\omega \tau + \frac{1}{4} r_y^2(\tau) + e_\tau^T \quad (5)$$

où le vecteur (e_0^T, \dots, e_p^T) , qui représente les erreurs d'estimation, suit, d'après les résultats sur les distributions asymptotiques des estimateurs des cumulants, une loi normale centrée ayant $T^{-1}\Gamma$ comme matrice de covariance. En supposant que $\omega < \pi/2$ pour éviter le phénomène de repliement, le spectre associé à ces cumulants non conventionnels est :

$$\begin{aligned} C_{x,4}(\lambda) &: = \sum_{\tau = -\infty}^{\infty} C_{x,4}(\tau) e^{-j\lambda \tau} \\ &= \frac{1}{16} r_y^2(0) \{ \delta(\lambda - 2\omega) + \delta(\lambda + 2\omega) \} \\ &\quad + \frac{1}{4} \text{TF} \{ r_y^2(\tau) \} \end{aligned} \quad (6)$$

où TF désigne la transformée de Fourier. Par conséquent, pour estimer la fréquence ω , on applique l'une des nombreuses techniques d'estimation spectrale. Cette méthode reste valable si le signal $\{x_t\}$ est aussi noyé dans un bruit additif gaussien indépendant de $\{y_t\}$.

3.2. Approche paramétrique

Supposons maintenant que le processus $\{y_t\}$ soit un ARMA(p, q) :

$$y_t + \sum_{k=1}^p c_k y_{t-k} = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^q d_k \varepsilon_{t-k} \quad (7)$$

Le spectre $S_x(\cdot)$ associé à la fonction d'autocovariance non conventionnelle définie précédemment est un spectre ARMA($2p, p+q$) [1][3] dont le polynôme autorégressif est $A(z) = C(ze^{j\omega_0})C(ze^{-j\omega_0})$. Le bruit blanc associé n'est plus une séquence i.i.d.. La résolution des équations de Yule-Walker modifiées donne l'estimateur $\hat{\underline{a}}$ de $\underline{a} = (a_1, \dots, a_{2p})$ suivant :

$$\hat{\underline{a}} = \hat{R}_x^{-1} \hat{\underline{r}}_x \quad (8)$$

où

$$\hat{R}_x = \begin{pmatrix} \hat{r}_x(p+q) & \cdots & \hat{r}_x(q-p+1) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{r}_x(3p+q-1) & \cdots & \hat{r}_x(p+q) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{r}}_x = \begin{pmatrix} \hat{r}_x(p+q+1) \\ \vdots \\ \hat{r}_x(3p+q) \end{pmatrix}.$$

Soient maintenant $\{\mu_k e^{\pm j\omega_k}\}_{k=1, \dots, p}$ les $2p$ racines de $A(z)$ et $\{\hat{\mu}_k e^{\pm j\hat{\omega}_k}\}_{k=1, \dots, p}$ celles de $\hat{A}(z)$. Un estimateur de la fréquence ω peut être donné par le barycentre des fréquences AR estimées [1]:

$$\hat{\omega} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \hat{\omega}_k \quad (9)$$

Proposition 3

L'estimateur $\hat{\omega}$ est consistant et $\sqrt{T}(\hat{\omega} - \omega)$ suit asymptotiquement une loi normale centrée de variance σ_ω^2 donnée par (11)

Preuve. Puisque la variance de l'estimateur $\hat{r}(\cdot)$ est inversement proportionnelle à T , alors, asymptotiquement, on peut écrire [4]:

$$\sqrt{T}(\hat{\underline{a}} - \underline{a}) = -\sqrt{T} \hat{R}_x^{-1} (\hat{\underline{r}}_x - \hat{R}_x \underline{a}) \quad (10)$$

$$R_x^{-1} \left\{ \sqrt{T} [(\hat{\underline{r}}_x - \underline{r}_x) + (\hat{R}_x - R_x) \underline{a}] \right\} + O_p(1/\sqrt{T})$$

En utilisant la proposition 1, le vecteur $\sqrt{T}(\hat{\underline{a}} - \underline{a})$ suit asymptotiquement une loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$F = R_x^{-1} P R_x^{-1}$$

où les éléments de la matrice P sont donnés par [4]

$$P(k, l) = T(1 \underline{a}') \Sigma_{kl} (1 \underline{a}')$$

et où la matrice $\Sigma_{kl} = \{\Sigma(|k-i|, |l-j|)\}_{i,j=0, \dots, 2p}$. La matrice jacobienne, qu'on va noter K , liant le vecteur \underline{a} et le vecteur fréquences $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)'$ est calculée dans [4][5][1]. Finalement, on a

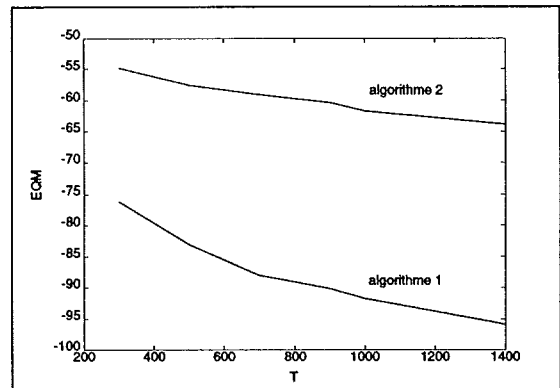
$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{Tp^2} (\underline{1}' K F K' \underline{1}) \quad (11)$$

où $\underline{1}$ est un vecteur ($p \times 1$) dont les éléments sont tous égaux à 1.

Remarque 1 : si $\{x_t\}$ est noyé dans un bruit coloré gaussien et stationnaire, les cumulants $C_{x,4}(0, \tau, \tau)$ sont proportionnels aux coefficients d'autocorrélation[6]. Ainsi le spectre associé à ces cumulants est le même spectre ARMA de $\{x_t\}$. Pour estimer les paramètres du modèle, on applique la méthode précédente, en remplaçant $\hat{r}_x(\tau)$ par $\hat{C}_{x,4}(\tau, \tau, \tau)$ [3].

4. SIMULATIONS ET COMPARAISON.

Nous allons comparer les 2 estimateurs, paramétrique et non paramétrique, de la fréquence ω . En fait la deuxième méthode sera hybride dans la mesure où une modélisation AR(s) sera effectuée sur 80% de la séquence des cumulants $\hat{C}_{x,4}(\tau)$. L'estimateur de ω sera donné par la fréquence du pôle le moins amorti. Cette méthode sera notée "algorithme 1". Pour l'approche paramétrique on surdétermine les équations de Yule-Walker (8) en prenant $M \geq 2p$ coefficients d'autocovariance[1]. Cette méthode sera désignée par "algorithme 2". Les simulations comportent une série de 500 réalisations du modèle (1) avec $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 0.18$, $\phi = 0$, et y_t est le processus gaussien AR(2) ayant $(0.9e^{\pm 2\pi \times 0.1})$ pour pôles. La figure suivante représente les erreurs quadratiques moyennes (EQM) des deux estimateurs de f en fonction de T dans le cas où $M = 100$ et $s = 8$.





Pour l'estimation de la fréquence porteuse, on remarque une nette supériorité de l'algorithme 1- (gain de 30 dB). Néanmoins l'approche paramétrique permet l'estimation des paramètres du processus $\{y_t\}$, ce qui n'est pas le cas pour l'algorithme 1.

5. CONCLUSION

Pour le modèle multiplicatif considéré ici, des propriétés statistiques de deux estimateurs des paramètres ont été étudiées. Des résultats de simulations ont montré que l'approche "non paramétrique" est nettement plus performante que l'approche paramétrique pour l'estimation de la fréquence porteuse. Cependant, seule l'approche paramétrique permettra l'estimation des paramètres de l'enveloppe $\{y_t\}$.

Appendice. Pour prouver la normalité asymptotique conjointe des estimateurs des moments, on montre que tous leur cumulants d'ordre supérieur à 2,

$$I = cum\left\{ \widehat{M}_{x,k_1}(\tau_{k_1,1}, \dots, \tau_{k_1,k_1-1}), \dots, \widehat{M}_{x,k_n}(\tau_{k_n,1}, \dots, \tau_{k_n,k_n-1}) \right\}$$

sont asymptotiquement nuls [2] pour tout k_1, \dots, k_n entiers supérieur à 1. En développant I , on obtient

$$I = \frac{1}{T^n} \sum_{t_1, \dots, t_n = 1}^T cum\left\{ \prod_{r=0}^{k_1-1} x(t_1 + \tau_{k_1,r}), \dots, \prod_{r=0}^{k_n-1} x(t_n + \tau_{k_n,r}) \right\}$$

En posant $t_1 = t$, $t_2 - t_1 = v_1, \dots, t_n - t_1 = v_{n-1}$, $v_0 = 0$, $t_i = -\min_i v_i$ et $t_f = T - \max_i v_i$, I devient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T^n} \sum_{v_1, \dots, v_n = -T}^T cum\left\{ \prod_{r=0}^{k_1-1} x(t + \tau_{k_1,r}), \right. \\ &\quad \left. \prod_{r=0}^{k_2-1} x(t + v_1 + \tau_{k_2,r}), \dots, \prod_{r=0}^{k_n-1} x(t_n + v_{n-1} + \tau_{k_n,r}) \right\} \\ &= \frac{1}{T^n} \sum_{v_1, \dots, v_n = -T}^T \sum_{t=t_i}^{t_f} cum\left\{ \prod_{r=0}^{k_1-1} x(t + \tau_{k_1,r}), \right. \\ &\quad \left. \prod_{r=0}^{k_2-1} x(t + v_1 + \tau_{k_2,r}), \dots, \prod_{r=0}^{k_n-1} x(t_n + v_{n-1} + \tau_{k_n,r}) \right\} \end{aligned}$$

En utilisant la multilinéarité des cumulants, I s'écrit

$$\frac{1}{T^n} \sum_{v_1, \dots, v_n = -T}^T \sum_{t=t_i}^{t_f} \prod_{i=1}^n \prod_{r=0}^{k_i-1} \cos \omega(t + v_{i-1} + \tau_{k_i,r} + \phi)$$

$$\begin{aligned} cum\left\{ \prod_{r=0}^{k_1-1} y(t + \tau_{k_1,r}), \prod_{r=0}^{k_2-1} y(t + v_1 + \tau_{k_2,r}), \right. \\ \left. \dots, \prod_{r=0}^{k_n-1} y(t_n + v_{n-1} + \tau_{k_n,r}) \right\} \end{aligned}$$

Puisque $\{y_t\}$ est un processus linéaire stationnaire, alors d'après [2] on a :

$$\begin{aligned} I \leq |I| \leq \frac{1}{T^{n-1}} \sum_{v_1, \dots, v_n = -T}^T |cum\left\{ \prod_{r=0}^{k_1-1} y(t + \tau_{k_1,r}), \right. \\ \left. \prod_{r=0}^{k_1-1} y(t + v_1 + \tau_{k_1,r}), \dots, \prod_{r=0}^{k_n-1} y(t_n + v_{n-1} + \tau_{k_n,r}) \right\}| \\ I = O(T^{-n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$cum\left\{ \sqrt{T} \widehat{M}_{x,k_1}(\tau_{k_1,1}, \dots, \tau_{k_1,k_1-1}), \dots, \right. \quad (12)$$

$$\left. \sqrt{T} \widehat{M}_{x,k_n}(\tau_{k_n,1}, \dots, \tau_{k_n,k_n-1}) \right\} = O(T^{1-n/2}). \quad (13)$$

Les résultats d'ergodicité et le résultat (13) pour $n = 3, \dots$, prouvent la normalité asymptotique.

6. REFERENCES

- [1] O. Besson and F. Castanié, "On estimating the frequency of a sinusoid in autoregressive multiplicative noise," Signal processing, vol.30, no. 1, January 1993.
- [2] D.R. Brillinger. Time series: Data analysis and theory. Holden-day Inc., San Francisco, 1981
- [3] M. Ghogho, "Frequency estimation of multiplicative ARMA noisy data," in Proc. ICASSP-95, (Detroit), May 1995
- [4] P.Stoica, T.Söderström, F.N.Ti, "Overdetermined Yule-Walker estimation of the frequencies of multiple sinusoids: accuracy aspects," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol.ASSP 37, pp. 1721-1734, Novembre 1989
- [5] P.Stoica, T.Söderström, "Higher-order Yule-Walker equations for estimating sinusoidal frequencies: the complete set of solutions," Signal processing, vol.20, pp. 257-263, July 1990
- [6] A. Swami, "Multiplicative noise models: parameter estimation using cumulants," Signal processing, vol. 36, no. 3, April 94.