STATISTIQUES D'ORDRE SUPERIEUR A DEUX POUR DES SIGNAUX CYCLOSTATIONNAIRES A VALEURS COMPLEXES

Pierre MARCHAND*#, Pierre-Olivier AMBLARD*
et Jean-Louis LACOUME *

* : CEPHAG-ENSIEG URA CNRS 346 BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex FRANCE
# : TEAMLOG "Le Grand Sablon" 4, Av. de l'Obiou, 38700 La Tronche FRANCE

RÉSUMÉ

Nous mettons en place le formalisme qui permet d'exprimer, dans les domaines temporel et spectral, les statistiques cycliques pour des signaux cyclostationnaires à valeurs complexes. Ce formalisme est développé dans un contexte probabiliste. Nous montrons que les multispectres de signaux cyclostationnaires prennent leur valeurs sur une famille d'hyperplans qui étend la notion de multiplicité stationnaire. Le problème du choix des retards dans l'expression des moments (ou cumulants) est abordé. Les effets du filtrage sur les multispectres cycliques sont explicités. Ces nouveaux outils sont ensuite appliqués à des signaux de télécommunication (modulations de phase numériques). L'intérêt des statistiques d'ordre supérieur cycliques pour de tels signaux est manifeste, notamment en raison de leur non circularité.

ABSTRACT

This paper deals with higher-order statistics for cyclostationary complex random signals and applications. The probabilistic framework for these statistics is laid out. It is shown that polyspectra of cyclostationary signals don't vanish on proper submanifolds, which generalize the proper manifold well known in the stationary case. It is emphasized that the choice of the lags when expressing the moments or cumulants is worth being taken into account. The input-output relation for filtering is derived. The theory is then applied to telecommunications signals, especially phase shift keying modulations. This kind of signals exhibit special properties relatively to their non-circularity, and higher-order cyclic statistics are helpful to characterize them.

1) Introduction

Selon que les propriétés statistiques d'un signal varient ou non dans le temps, on dira qu'il est stationnaire ou non stationnaire, et cette classification en deux catégories guide, de manière habituelle, le choix d'une méthode de traitement. Pourtant, pour de nombreux signaux, qu'ils soient d'origine naturelle ou humaine, les paramètres physiques du système dont ils sont issus varient périodiquement dans le temps, et leur propriétés statistiques sont également périodiques. Ces signaux non stationnaires particuliers, dits cyclostationnaires, doivent faire l'objet de méthodes de modélisation et de traitement adaptées, si l'on veut tirer parti du caractère périodique de leur distribution statistique. En particulier, les signaux de télécommunications subissent des transformations périodiques lors des opérations d'échantillonnage, de codage, de modulation..., qui les rendent cyclostationnaires.

La cyclostationnarité à l'ordre deux suppose que les deux premiers moments du signal (moyenne et fonction de corrélation) sont des fonctions périodiques du temps absolu. Ces propriétés ont été assez largement exploitées dans de nombreux domaines [1].

On se propose de mettre au point des caractérisations plus complètes que la caractérisation à l'ordre deux, en utilisant les statistiques d'ordre supérieur, conjointement aux propriétés de cyclostationnarité. A cet égard, des travaux ont déjà été effectués (cf. [2] et [3]). Mais il apparaît que de nombreuses questions sont encore ouvertes quant à la définition des outils les plus significatifs et les plus efficaces. En particulier, un des points cruciaux concerne la mise au point du formalisme pour des signaux à valeurs complexes (qui interviennent notamment lors de la modélisation des signaux de télécommunications).

La première des deux parties de l'article expose ce formalisme et étend, à un ordre n quelconque, la fonction de corrélation spectrale connue à l'ordre 2. L'accent est mis sur le fait que le choix de l'instant de référence des statistiques influe sur la représentation obtenue. Dans un second temps, l'intérêt de ce formalisme est mis en évidence sur des modulations de phase numériques ; pour ce type de signaux, les divers degrés de circularité amènent à envisager des cumulants avec un nombre varié de termes conjugués.

2) Cumulants cycliques et multicorrélations spectrales pour des signaux à valeurs complexes.

Nous choisissons de travailler dans le contexte probabiliste, qui nous est plus familier (en comparaison avec celui développé dans [2], basé sur les réalisations temporelles des variables aléatoires).

Soit $x(t)$ un processus aléatoire à valeurs complexes. On se propose d'exprimer sa multicorrélation d'ordre $p+q$, où p désigne le nombre de termes non conjugués, et q le nombre de termes conjugués. Aux ordres supérieurs à 2, la condition d'harmonisabilité ne suffit plus, et il faut introduire la classe $f^{(k)}$ définie dans [4]. Une condition suffisante pour que $x(t) \in f^{(k)}$, est que sa transformée de Fourier $X(\nu)$ appartienne à $\Phi^{(k)}$. On dit que $X(\nu) \in \Phi^{(k)}$ si

$$\forall l < k,\ \forall \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l,\ \int\ldots\int |\, E[dX_{\varepsilon_1}(\nu_1)\ldots dX_{\varepsilon_l}(\nu_l)] \,| < C < +\infty$$

(où les ε_i correspondent à un complexe conjugué s'ils valent -1 et à un complexe non conjugué s'ils valent $+1$). On peut montrer que pour justifier l'existence des moments de $x(t)$ jusqu'à l'ordre $p+q$, il faut que $x(t) \in f^{(k)}$, avec $k=(p+q)(p+q-1)$, ce qui assure alors que
$\forall j < n$,

$$x_{\varepsilon_1}(t_1)\ldots x_{\varepsilon_j}(t_j) = \int\ldots\int \exp[2i\pi(\sum_i \varepsilon_i t_i \nu_i)] dX_{\varepsilon_1}(\nu_1)\ldots dX_{\varepsilon_j}(\nu_j)$$

existe en moyenne quadratique. On supposera par la suite que

$$x(t) \in f^{(\infty)}$$

où $f^{(\infty)}$ est la classe des signaux appartenant à $f^{(k)}$ pour tout k.

Sous cette hypothèse, on définit la multicorrélation d'ordre $p+q$ de $x(t)$, comportant p termes non conjugués, par :

$$C_{x,p+q,p}(\underline{t}) = Cum[x(t_0),\ldots,x(t_{p-1}),x^*(t_p),\ldots,x^*(t_{p+q-1})]$$

avec $\underline{t} = (t_0,\ldots,t_{p+q-1})$

$x(t)$ est cyclostationnaire d'ordre $p+q$ si tous ses moments d'ordre inférieur ou égal à $p+q$ sont périodiques en $\underline{t}$ de période T. Comme les cumulants s'expriment en fonction des moments d'ordre inférieur ou égal, tous les cumulants de $x(t)$ d'ordre inférieur ou égal à $p+q$ seront également périodiques en $\underline{t}$ de période T:

$$C_{x,p+q,p}(\underline{t} + T.\underline{1}) = C_{x,p+q,p}(\underline{t}) \quad , \quad \forall \underline{t}$$

où $\underline{1}$ désigne le vecteur de dimension $p+q$ ne contenant que des 1.

Le multispectre symétrique d'ordre $p+q$ de $x(t)$, noté $\Sigma_{x,p+q,p}(\underline{\nu})$, avec $\underline{\nu}=(\nu_0,\ldots,\nu_{p+q-1})$, est défini par la transformée de Fourier multidimensionnelle de $C_{x,p+q,p}(\underline{t})$:

$$\Sigma_{x,p+q,p}(\underline{\nu}) = \int C_{x,p+q,p}(\underline{t}) \exp(-2i\pi(\sum_{j=0}^{p-1}\nu_j t_j - \sum_{j=p}^{p+q-1}\nu_j t_j))\, d\underline{t} \qquad (1)$$

A partir de cette étape, nous allons chercher à caractériser la périodicité en $\underline{t}$ en faisant l'analyse de Fourier selon une variable t représentative de la localisation globale du vecteur $\underline{t}$. Pour des signaux stationnaires, les statistiques ne dépendent pas de cet instant de référence t, mais uniquement de l'écart des échantillons entre eux. Le choix effectué pour t est donc indifférent. En revanche, lorsque l'on définit des statistiques (moments ou cumulants) de signaux non stationnaires, il est légitime de s'interroger sur la manière de placer l'instant de référence t. Ce choix ne changera pas l'information contenue dans les moments ou cumulants, mais il en affectera la représentation. Une solution souvent rencontrée ([2], [3]) consiste à privilégier un échantillon particulier en prenant sa date pour instant de référence t. Ce choix conduit au changement de variables suivant :

$$\begin{cases} t_0 & = t \\ t_1 & = \tau_1 + t_0 \\ \vdots & \vdots \\ t_{p-1} & = \tau_{p-1} + t_0 \\ t_p & = -\tau_p + t_0 \\ \vdots & \vdots \\ t_{p+q-1} & = -\tau_{p+q-1} + t_0 \end{cases} \qquad (2)$$

L'ensemble des $p+q$ échantillons est donc localisé globalement par l'instant de référence t fixé sur t_0, et chacun d'entre eux est repéré par l'écart qui le sépare de t_0. Par ailleurs, choisir des retards dont le signe dépend de la conjugaison permet de conserver le théorème de Wiener-Kintchine (multispectre et multicorrélation forment une paire de Fourier).

Avec (2), l'expression (1) devient :

$$\Sigma_{x,p+q,p}(\underline{\nu}) = \int\int C_{x,p+q,p}(t,\underline{\tau}) \exp(-2i\pi(\underline{\tau}^T \underline{\nu}')) \exp(-2i\pi(\nu_0 + \sum_{j=0}^{p-1}\nu_j - \sum_{j=p}^{p+q-1}\nu_j)t)\, dt d\underline{\tau} \qquad (3)$$

avec $\underline{\nu}' = (\nu_1,\ldots,\nu_{p+q-1})$ et $\underline{\tau} = (\tau_1,\ldots,\tau_{p+q-1})$

Contrairement au cas stationnaire, la multicorrélation garde ici sa dépendance en t :

$$C_{x,p+q,p}(t+T,\underline{\tau}) = C_{x,p+q,p}(t,\underline{\tau}) \quad , \quad \forall t$$

On peut donc exprimer $C_{x,p+q,p}(t,\underline{\tau})$ sous forme d'une série de Fourier :

$$C_{x,p+q,p}(t,\underline{\tau}) = \sum_n c^n_{x,p+q,p}(\underline{\tau}) \exp(2i\pi \frac{n}{T} t)$$

Définissons la transformée de Fourier de $C_{x,p+q,p}(t,\underline{\tau})$ selon t :

$$C^\alpha_{x,p+q,p}(\underline{\tau}) = \int C_{x,p+q,p}(t,\underline{\tau}) \exp(-2i\pi\alpha t)\, dt$$

On a alors la relation :

$$C^\alpha_{x,p+q,p}(\underline{\tau}) = \sum_n c^n_{x,p+q,p}(\underline{\tau}) \delta(\alpha - \frac{n}{T}) \qquad (4)$$

Par analogie terminologique avec l'ordre 2, $C^\alpha_{x,p+q,p}(\underline{\tau})$ sera appelée **multicorrélation cyclique** d'ordre $p+q$ du processus $x(t)$.

En remplaçant (4) dans (3) et en notant que l'intégrale selon t se réduit à une impulsion de Dirac, on obtient :

$$\Sigma_{x,p+q,p}(\underline{\nu}) = \sum_n s^n_{x,p+q,p}(\underline{\nu}') \delta(\nu_0 + \sum_{j=1}^{p-1}\nu_j - \sum_{j=p}^{p+q-1}\nu_j - \frac{n}{T}) \qquad (5)$$

avec $s^n_{x,p+q,p}(\underline{\nu}') = \int c^n_{x,p+q,p}(\underline{\tau}) \exp(-2i\pi\, \underline{\tau}^T \underline{\nu}')\, d\underline{\tau}$

L'ensemble des fonctions $s^n_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$ peut être vu comme une fonction de deux paramètres continus α et $\underline{\nu}'$ prise aux α multiples entiers de la fréquence cyclique 1/T :

$$S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\tau}) = \sum_{n} s^{n}_{x,p+q,p}(\underline{\tau})\delta(\alpha - \frac{n}{T})$$

L'équation (5) montre que dans le cas où le signal analysé est cyclostationnaire, le multispectre symétrique ne prend ses valeurs non nulles que sur une famille d'hyperplans de dimension $p+q-1$ et d'équation : $\nu_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \nu_j - \sum_{j=p}^{p+q-1} \nu_j - \frac{n}{T} = 0$ qui correspond à une démultiplication de la classique multiplicité stationnaire à intervalles 1/T. Par analogie avec l'ordre 2, la fonction $S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$ sera appelée **multicorrélation spectrale** d'ordre $p+q$ de $x(t)$. On peut montrer facilement que $S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$ est la transformée de Fourier de $C^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\tau})$ par rapport à $\underline{\tau}$, et donc finalement la multicorrélation spectrale s'exprime comme la double transformée de Fourier en t et en $\underline{\tau}$ de la multicorrélation :

$$S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}') = \int\int C_{x,p+q,p}(t,\underline{\tau})\exp(-2i\pi\alpha t)\exp(-2i\pi\,\underline{\tau}^T\underline{\nu}')dtd\underline{\tau}$$

Le choix effectué en (2) n'est pas forcément le plus fondé ; l'instant t peut être à priori n'importe quelle fonction des t_i. Par exemple, un autre choix possible est de placer t au barycentre de tous les échantillons. On obtient ainsi une représentation d'un deuxième type pour la multicorrélation spectrale, que nous notons $\widetilde{S}^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$. On peut montrer que :

$$\widetilde{S}^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')d\underline{\nu} =$$
$$Cum[dX(\frac{\alpha}{p+q} - \sum_{i=1}^{p-1}\nu_i - \sum_{i=p}^{p+q-1}\nu_i),\ dX(\frac{\alpha}{p+q} + \nu_1), \dots,$$
$$dX(\frac{\alpha}{p+q} + \nu_{p-1}),\ dX^*(\nu_p - \frac{\alpha}{p+q}), \dots,\ dX^*(\nu_{p+q-1} - \frac{\alpha}{p+q})]$$

tandis que

$$S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')d\underline{\nu} =$$
$$Cum[dX(\alpha - \sum_{i=1}^{p-1}\nu_i - \sum_{i=p}^{p+q-1}\nu_i),\ dX(\nu_1), \dots,\ dX(\nu_{p-1}), \qquad (6)$$
$$dX^*(\nu_p), \dots,\ dX^*(\nu_{p+q-1})]$$

L'avantage de $\widetilde{S}^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$ est double. Pour $p=q=1$, cette représentation est équivalente à la corrélation spectrale telle qu'elle est définie de manière usuelle à l'ordre 2, alors que $S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$ ne l'est pas. Par ailleurs, une simple transformation de Fourier en α relie $\widetilde{S}^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$ au spectre de Wigner-Ville généralisé tel qu'on peut le définir de manière cohérente aux ordres supérieurs (cf. [5]). Le choix d'une représentation n'est donc pas un problème anodin, et doit sans doute être envisagé au cas par cas selon l'application visée. Nous poursuivrons en utilisant $S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$.

3) Application à des modulations de phase numériques

Examinons dans un premier temps quel est effet d'un filtrage sur la multicorrélation spectrale.

Soit $x(t)$ un processus à valeurs complexes cyclostationnaire à l'ordre $p+q$. Soit un système linéaire invariant de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de gain complexe $H(\nu)$. Ce système a pour entrée $x(t)$ et pour sortie $y(t)$:

$$\begin{cases} y(t) &= \int h(t-u)x(u)du \\ Y(\nu) &= H(\nu)X(\nu) \end{cases} \qquad (7)$$

En reprenant (6) avec (7), et en utilisant la propriété de multilinéarité des cumulants, on montre que :

$$S^{\alpha}_{y,p+q,p}(\underline{\nu}') = H(\alpha - \sum_{i=1}^{p-1}\nu_i + \sum_{i=p}^{p+q-1}\nu_i)H(\nu_1)\dots H(\nu_{p-1}) \qquad (8)$$
$$H^*(\nu_p)\dots H^*(\nu_{p+q-1})\,S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}')$$

Une modulation de phase numérique à N états (MDPN) en bande de base peut s'écrire :

$$x(t) = \sum_k s_k q(t-kT) \quad \text{avec } s_k = \exp(j\frac{(2n-1)\pi}{N})$$

avec n prenant ses valeurs dans $\{1, .., N\}$. s_k est une séquence i.i.d., et $q(t)$ est une fonction de mise en forme de largeur T.

Le signal peut être mis sous la forme :

$$x(t) = s(t)*q(t) \quad \text{avec } s(t) = \sum_k s_k\delta(t-kT)$$

On peut déterminer la multicorrélation spectrale de $x(t)$ à l'aide de la relation de filtrage (8). Pour cela, calculons d'abord la multicorrélation de $s(t)$ à l'aide des propriétés des cumulants :

$$C_{s,p+q,p}(t,\underline{\tau}) = \sum_{\underline{k}} C_s(\underline{k})\delta(t-k_0T)..\delta(t+\tau_{p-1}-k_{p-1}T)$$
$$\delta(t-\tau_p-k_pT)..\delta(t-\tau_{p+q-1}-k_{p+q-1}T)$$

avec $\underline{k} = (k_0, \dots, k_{p+q-1})$

et $C_s(\underline{k}) = Cum(s_{k_0}, \dots, s_{k_{p-1}}, s^*_{k_p}, \dots, s^*_{k_{p+q-1}})$

Comme les symboles s_k sont indépendants entre eux, $C_s(\underline{k})$ n'est non nul que si $k_0=k_1=\dots=k_{p+q-1}=k$. On appelle $C_{s,p+q,p}$ cette valeur non nulle. On a alors :

$$C_{s,p+q,p}(t,\underline{\tau}) = C_{s,p+q,p}\sum_k \delta(t-kT)..\delta(t+\tau_{p-1}-kT)$$
$$\delta(t-\tau_p-kT)..\delta(t-\tau_{p+q-1}-kT)$$

La multicorrélation cyclique s'obtient par transformation de Fourier selon t :

$$C^{\alpha}_{s,p+q,p}(\underline{\tau}) = \frac{1}{T}C_{s,p+q,p}\int \delta(t)..\delta(t+\tau_{p-1})$$
$$\delta(t-\tau_p)..\delta(t-\tau_{p+q-1})\exp(-2i\pi\alpha t)dt\sum_k\delta(\alpha - \frac{k}{T})$$

et la multicorrélation spectrale s'obtient par transformation de Fourier selon $\underline{\tau}$, qui est constante :

$$S^{\alpha}_{s,p+q,p}(\underline{\nu}') = \frac{1}{T}C_{s,p+q,p}\sum_k\delta(\alpha - \frac{k}{T})$$

Finalement, en appliquant la relation de filtrage (8), on obtient simplement la multicorrélation spectrale de $x(t)$:

$$S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\underline{\nu}') = \frac{1}{T} C_{s,p+q,p}\, Q(\alpha - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i + \sum_{i=p}^{p+q-1} \nu_i) Q(\nu_1). \qquad (9)$$

$$..Q(\nu_{p-1}) Q^*(\nu_p) \ldots Q^*(\nu_{p+q-1}) \sum_n \delta(\alpha - \frac{k}{T})$$

où $\quad (\nu) = \int q(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt$

On constate donc que les différentes modulations auront la même multicorrélation spectrale à un facteur près, l'allure intrinsèque dépendant uniquement de la fonction $q(t)$ de mise en forme des symboles. A un ordre $p+q$ donné, il conviendra de s'intéresser aux $p+q-1$ multicorrélations spectrales que l'on peut définir à partir des $p+q-1$ valeurs de $C_{s,p+q,p}$ possibles. Dans tous les cas où $C_{s,p+q,p}$ est non nul, la multicorrélation spectrale correspondante est porteuse d'information et sera déterminante pour l'expression de la multicorrélation spectrale du signal sur porteuse.

L'ensemble des valeurs de p et q pour lesquelles $C_{s,p+q,p}$ est non nul est déterminé par le degré de circularité de la variable aléatoire s_k. Une variable aléatoire complexe z est circulaire [6] si z et $z.\exp(j\theta)$ ont même densité de probabilité quel que soit θ (invariance par rotation). On peut démontrer à partir de cette définition que z est circulaire si ses seuls moments non nuls sont ceux où les termes conjugués et non conjugués apparaissent en nombre égal. Si cette propriété est vérifiée pour tous les moments d'ordre inférieur ou égal à n, on dira que z est circulaire à l'ordre n. Les modulations de phase qui nous intéressent ici ont un degré de circularité qui dépend de leur nombre d'états.

On peut facilement constater que si $\theta_0=\pi/l$ est le plus petit angle de rotation qui laisse la densité de probabilité de z invariante, alors z est circulaire à l'ordre $2l-1$ et pas plus. En effet, si $E[z^p z^{*q}]$ est invariant par rotation de $\exp(i\pi/l)$, les solutions possibles sont $E[z^p z^{*q}]=0$ ou $p=2kl+q$. Le seul moyen d'avoir un moment non nul avec $p \neq q$ et $p+q$ le plus petit possible est donc de choisir $k=1$; l'ordre atteint est alors $2l$ (avec $p=2l$ et $q=0$).

Par conséquent, une modulation de phase N états, dont la densité de probabilité est invariante par une rotation d'angle $2\pi/N$ est circulaire à l'ordre $N/2$ mais pas à l'ordre N (notons que N est de manière usuelle une puissance de deux, et qu'on ne s'intéresse pas aux statistiques d'ordre impair, celles-ci étant nulles).

Par exemple, si s est une MPD4, on a :

- *à l'ordre 2* :

$C_{s,2,2}=\mathrm{Cum}[s,s]=0$ et $C_{s,2,1}=\mathrm{Cum}[s,s^*]=2$

- *à l'ordre 4* :

$C_{s,4,4}=\mathrm{Cum}[s,s,s,s]=-4$ et $C_{s,4,2}=\mathrm{Cum}[s,s,s^*,s^*]=-4$

$C_{s,4,3}=\mathrm{Cum}[s,s,s,s^*]=0$

D'après (9), la tricorrélation spectrale (ordre 4) d'une MDP4 en bande de base devra donc être considérée selon les deux cumulants non nuls : $C_{s,4,4}$ et $C_{s,4,2}$, alors que pour la corrélation spectrale (ordre 2) seule $S^{\alpha}_{x,2,1}(\nu)$ était porteuse d'information.

Si s est une MDP8, on a :

- *à l'ordre 2* :

$C_{s,2,2}=\mathrm{Cum}[s,s]=0$ et $C_{s,2,1}=\mathrm{Cum}[s,s^*]=2$

- *à l'ordre 4* :

$C_{s,4,4}=C_{s,4,3}=0$ et $C_{s,4,2}=-1$

Donc la MDP8 est bien circulaire à l'ordre 4 tout comme la MDP4 était circulaire à l'ordre 2. En conséquence, pour une MDP8, une seule des trois tricorrélations spectrales parmi les trois que l'on peut définir est non nulle.

Ces résultats ont une implication directe vis-à-vis de la tricorrélation spectrale du signal sur porteuse. On peut montrer en effet que si $x_p(t)$ est le signal sur porteuse, on a :

$$S^{\alpha}_{x_p,4,4}(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = F(\left\{S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right\}_{p+q=4,\ p=1,2,3}, f_p)$$

où f_p est la fréquence porteuse, et F est une fonction indépendante de la modulation MDPN. Dès lors, il est clair que l'expression analytique de $S^{\alpha}_{x_p,4,4}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ sera différente selon que $x(t)$ est une MDP4 ou une MDP8, c'est à dire selon que les termes $\left\{S^{\alpha}_{x,p+q,p}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right\}_{p+q=4,\ p=1,2,3}$ sont nuls ou non.

3) Conclusion

La théorie que l'on a développé en première partie a montré tout son intérêt pour traiter certains types de signaux de télécommunication qui ne sont pas circulaires au sens strict. En particulier, par rapport à l'ordre 2, les résultats de la deuxième partie montrent que les statistiques d'ordre supérieur permettent de progresser en matière de reconnaissance de modulation. La MDP8 et la MDP4 sont discernables à l'ordre 4 alors qu'elles ne l'étaient pas à l'ordre 2.

Bibliographie

[1] W.A. Gardner, « Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals », *IEEE SP Magazine*, April 1991, pp 38-49.

[2] W.A. Gardner, C.M. Spooner, « The cumulant theory of cyclostationary time-series, Part I : Fondation., Part II : Development and applications », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 42, n° 12, December 1994.

[3] A.V. Dandawate and G.B. Giannakis, « Nonparametric polyspectral estimators for *k*th-order (almost) cyclostationary processes. », *IEEE Trans. Informat. Theory*, vol; 40, n°1, pp. 67-84, janvier 1994.

[4] A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, 1953.

[5] P.O. Amblard, "Statistiques d'ordre supérieur pour les signaux non gaussiens, non linéaires, non stationnaires". Thèse de Doctorat, INP Grenoble, 1994.

[6] P.O. Amblard, M. Gaeta et J.L. Lacoume, « Statistics for complex variables and signals ; Part I : Variables ; Part II : Signals », soumis à Signal Processing.