Nouvel Algorithme d'Identification Aveugle de Systèmes Linéaires Perturbés en Sortie par un Bruit Gaussien

Mouad BOUMAHDI

CEPHAG (Centre d'Etudes des PHénomènes Aléatoires et Géophysiques) C.N.R.S URA 346
Domaine Universitaire, BP 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France
Tel (33) 76 82 64 23, Fax (33) 76 82 63 84, e-mail: boumahdi@cephag.observ-gr.fr

RÉSUMÉ

Nous proposons dans cette communication, un nouvel algorithme d'identification aveugle de filtres MA, AR où ARMA dont la sortie est polluée par un bruit gaussien additif. Pour cela d'abord nous définissons puis nous proposons l'utilisation des statistiques symétriques d'ordre quatre pour identifier le filtre spectralement équivalent à minimum de phase (SEMP), ensuite le vrai filtre est identifiée en cherchant la combinaison de zéros maximisant une fonctionnelle d'ordre supérieur. Nous testons l'algorithme, sur des signaux sismiques simulés.

ABSTRACT

In this paper we propose a new blind identification algorithm of MA, AR and ARMA filters based only upon the fourth order statistics. The minimum phase filters may be directly identified from the output fourth order statistics. To identify a non-minimum phase filter, first its Spectrally Equivalent and Minimum Phase filter (SEMP) is identified from the fourth order symmetric statistics. Then the filter is identified from the SEMP filter by searching for to maximise a higher order objective function.

INTRODUCTION

L'utilisation des statistiques d'ordre supérieur à deux permet l'identification aveugle de systèmes linéaires à phase non-minimale. De plus les statistiques d'ordre supérieur sont nuls pour les processus gaussiens. Nous proposons dans cette communication, d'utiliser ces deux propriétés, afin d'identifier un système linéaire à phase non-minimale dont la sortie est perturbé par un bruit additif gaussien indépendant de l'entrée. Dans notre démarche les filtres ARMA ou MA à phase minimale peuvent être identifiés directement à partir des statistiques d'ordre quatre de la sortie bruitée. Par contre pour identifier des systèmes à phase non-minimale nous définissons et proposons l'utilisation des statistiques symétriques d'ordre supérieur.

Nous appliquons la méthode proposée à des signaux sismiques simulés perturbés par un bruit gaussien pas nécessairement blanc.

1) Identification Aveugle et Ordres Supérieurs

Soit $\{x(t)\}$ un processus aléatoire stationnaire, centré, à valeurs réelles discrètes. Sa tricorrélation est :

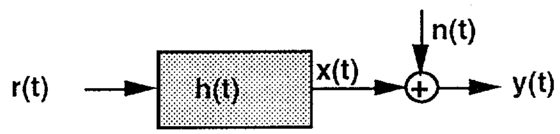
$$\begin{aligned} C_{4x}(l,m,n) = {} & E\{x(t)x(t+l)x(t+m)x(t+n)\} \\ & -C_{2x}(l)C_{2x}(m-n) - C_{2x}(m)C_{2x}(l-n) \\ & -C_{2x}(n)C_{2x}(l-m) \end{aligned} \tag{1}$$

où $C_{2x}(m) = E\{x(t)x(t+m)\}$ est la fonction d'autocorrélation.

Dans le domaine des fréquences, le trispectre est défini comme la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de la tricorrélation :

$$S_{4x}(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = TFD\left[C_{4x}(l,m,n)\right] \tag{2}$$

Supposons que $\{y(t)\}$ est la sortie bruitée d'un système linéaire stationnaire à valeurs réelles, dont l'entrée est excitée par $\{r(t)\}$ un bruit blanc non-gaussien :



$$y(t) = \sum_i h(i)r(t-i) + n(t) = x(t) + n(t) \tag{3}$$

avec:

- $\{r(t)\}$ est un bruit blanc non-gaussien tel que $C_{2r}(m) = S_{2r}\delta(m)$ et $C_{4r}(l,m,n) = S_{4r}\delta(l,m,n)$. $\delta(.)$ est la fonction delta de Kronecker. S_{2r} et S_{4r} sont des constantes réelles ($S_{4r} \neq 0$).
- $h(i)$ est la réponse impulsionnelle à valeurs réelles du système.
- $\{x(t)\}$ est la sortie non-bruitée et qui est inaccessible.
- $\{y(t)\}$ est la sortie bruitée observée.
- $\{n(t)\}$ est un bruit gaussien additif indépendant de l'entrée $\{r(t)\}$.

Le trispectre de la sortie bruitée est :

$$S_{4y}(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = S_{4r}H^*\Big(\sum_{i=1}^{3}\nu_i\Big)\prod_{i=1}^{3}H(\nu_i) \tag{4}$$

avec $H(\nu)$ est le gain complexe du filtre et $H^*(\nu)$ son conjugué. La densité spectrale de la sortie bruitée est :

$$S_{2y}(\nu) = S_{2r}|H(\nu)|^2 + S_{2n}(\nu) \quad (5)$$

Les équations (4) et (5) montrent que les statistiques d'ordre quatre de la sortie bruitée, d'abord ne sont pas contaminés par ceux du bruit additif gaussien, ensuite ils gardent l'information sur la phase du gain complexe du filtre. Alors que les statistiques d'ordre deux, d'une part sont contaminés par ceux du bruit et suppriment toute information sur la phase. Nous proposons d'utiliser dans le domaine des retards, ces deux propriétés des statistiques d'ordre quatre pour identifier des filtres MA ou ARMA.

2) Identification de Filtres MA(q)

2.1) Filtres à Minimum de Phase

$$y(t) = r(t) + \sum_{i=1}^{q} h(i)r(t-i) + n(t) \quad (6)$$

Quand le rapport signal à bruit est favorable le filtre à minimum de phase est identifiable à l'ordre deux en utilisant l'algorithme du Maximum de Vraisemblance (MV2) [2]. Dans cette communication nous proposons une modification de cet algorithme afin de l'adapter au cas des systèmes perturbés en sortie par un bruit gaussien.
Dans l'algorithme MV2, un filtre MA(q) à minimum de phase est approché par un filtre AR(L) stable et causal, tel que "L>>q" [2]. Les coefficients AR sont estimés à l'ordre deux par l'équation de Yule-Walker (YW2):

$$C_{2y}(l) + \sum_{i=1}^{L} a(i)C_{2y}(i-l) = 0, \text{ pour } l > 0 \quad (7)$$

Les coefficients du filtre MA(q) sont obtenus à partir de ceux du filtre AR(L) en résolvant le système d'équations suivant:

$$C_{2a}^{d}(l) + \sum_{i=1}^{q} h(i)C_{2a}^{d}(i-l) = 0 \quad (8)$$

où $C_{2a}^{d}(l)$ est la fonction d'autocorrélation du signal déterministe $a(i)$ $(i = 0,....,L$, avec $a(0) = 1)$:

$$C_{2a}^{d}(l) = \frac{1}{L+1} \sum_{i=0}^{L-|l|} a(i)a(i+l) \quad (9)$$

Lorsque le rapport signal à bruit est défavorable, nous proposons d'identifier les coefficients du filtre AR(L) en utilisant l'extension à l'ordre quatre de l'équation de Yule-Walker (YW4) :

$$C_{4y}(l,m,n) + \sum_{i=1}^{L} a(i)C_{4y}(i-l,m,n) = 0, \text{ pour } l > 0 \quad (10)$$

Du fait que le bruit $\{n(t)\}$ est gaussien, ses statistiques d'ordre supérieur à deux sont nulles, donc les statistiques d'ordre quatre de la sortie bruitée $\{y(t)\}$ et ceux de la sortie non-bruitée $\{x(t)\}$ sont identiques.

2.2) Filtres à phases non-minimales

La méthode que nous proposons procède en deux étapes. La première consiste d'abord en l'identification du filtre MA(q) Spectralement Equivalent à Minimum de Phase (SEMP). Ensuite le vrai filtre est estimé à partir du filtre SEMP en cherchant la combinaison de zéros : à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle unité, qui définit un filtre donnant un signal de déconvolution maximisant une fonctionnelle d'ordre supérieur [1].
Comme dans (§2.1) le filtre MA(q) SEMP est approché par un filtre AR(L>>q). Cette approximation est possible à l'ordre deux car les statistiques d'ordre deux ne contiennent pas d'information sur la phase, et l'utilisation d'un modèle AR stable est causal impose à la phase d'être minimale. C'est pour cela que pour estimer le filtre MA(q) SEMP nous ne pouvons utiliser directement la tricorrélation car elle contient l'information sur la phase du vrai filtre. Nous proposons d'utiliser la tricorrélation symétrique que nous définissons par :

$$\begin{aligned} C_{4y}^{S}(l,m,n) &= TFD^{-1}\left\{S_{4y}^{S}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right\} \\ &= TFD^{-1}\left\{\left|S_{4y}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right|\right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Notons que contrairement à l'autocorrélation de la sortie bruitée, la tricorrélation symétrique n'est pas contaminée par la contribution du bruit gaussien. De plus elle ne contient pas d'information de phase: donc l'approximation du filtre MA(q) par un AR(L>>q) stable et causal permet d'obtenir le filtre MA(q) SEMP. Les coefficients du filtre AR(L>>q) sont obtenus en remplaçant dans (10) la tricorrélation par la tricorrélation symétrique :

$$C_{4y}^{S}(l,m,n) + \sum_{i=1}^{L} a(i)C_{4y}^{S}(i-l,m,n) = 0 \text{ pour } l > 0 \quad (12)$$

Nous appelons ce nouvel algorithme: MV4.
Tous les zéros du gain complexe du filtre MA(q) SEMP identifié sont à l'intérieur du cercle unité : ils sont tous de module inférieur à l'unité. Comme nous l'avions proposé dans [1], le vrai filtre MA(q) est estimé à partir du filtre MA(q) SEMP, en cherchant la combinaison de zéros du gain complexe : à l'intérieur ou à l'extérieur de cercle unité qui définit un filtre donnant un signal de déconvolution u(t) maximisant une fonctionnelle basée sur le cumulant d'ordre "p" et le cumulant d'ordre "k" de u(t) :

$$J_k^p\{u(t)\} = \frac{C_{pu}(0,....,0)}{\left[C_{ku}(0,...,0)\right]^{p/k}} \quad (13)$$

où u(t) est le signal de déconvolution, et $p,k > 2$ $p < k$.
En réalité lorsque l'ordre du filtre est fixé la maximisation du kurtosis est suffisante $(p = 4, k = 2)$ car les différentes inversions de zéros définissent des filtres spectralement équivalent, et donc après déconvolution ils vont donner la même puissance de bruit. Par contre si nous voulons utiliser

ce même critère pour déterminer l'ordre du filtre, il est nécessaire d'utiliser $p,k>2$.

3) Filtres ARMA(p,q)

Considérons le cas d'un filtre ARMA(p,q) causal. dont la sortie est perturbé par un bruit gaussien n(t) :

$$x(t)+\sum_{i=1}^{p} a(i)x(t-i)=r(t)+\sum_{i=1}^{q} b(i)r(t-i)$$

$$y(t)=x(t)+n(t) \qquad (14)$$

nous proposons d'identifier le filtre suivant deux méthodes différentes. La première est l'approche de la série temporelle résiduelle qui consiste à estimer séquentiellement la partie AR puis la partie MA. La seconde est la décomposition Minimum de Phase-Passe-Tout.

3.1) Approche de la série temporelle résiduelle.

3.1.1) <u>Identification des la partie AR</u> :

Les coefficients AR sont identifiés à partir de la version d'ordre quatre de l'équation de Yule-Walker modifiée (YW4) [3] :

$$C_{4y}(l,m,0)+\sum_{i=1}^{p} a(i)C_{4y}(l-i,m,0)=0$$

pour $l>q$ et $m=q-p,\dots,p$ (15)

<u>Remarque</u> : Si le bruit gaussien additif est blanc et le filtre ARMA ne contient pas de facteurs Passe-Tout (AllPass), les coefficients AR sont identifiables aussi à l'ordre deux.

3.1.2) <u>Identification de la partie MA</u> :

$$y(t) \longrightarrow \boxed{A(z)} \longrightarrow u(t)$$

{y(t)} est déconvolué par la partie AR estimée à partir de (15). Le signal de déconvolution obtenu u(t) contient uniquement l'information sur la partie MA, à laquelle s'ajoute un bruit gaussien additif, car le caractère gaussien se conserve par filtrage linéaire. La partie MA(q) est identifiée en appliquant à u(t) l'algorithme MV4 proposé en (§2).

Nous appelons cet algorithme d'identification de filtres ARMA : YW4+MV4. L'algorithme qui consiste à estimer la partie AR à l'ordre deux par l'équation de Yule-Walker classique [2] et la partie MA aussi à l'ordre deux par MV2, nous appelons : YW2+MV2.

3.2) Décomposition Minimum-Phase-Passe-Tout

Une autre approche consiste à utiliser le fait que toute fonction de transfert peut s'écrire comme le produit de la fonction de transfert du filtre ARMA(p,q) spectralement équivalent et à minimum de phase (SEMP) avec un filtre Passe-Tout :

$$H(z)=\frac{\prod_{i=1}^{q_1}(1-\sigma_i z^{-1})\prod_{j=1}^{q_2}(1-\alpha_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i z^{-1})}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{q_1}(1-\sigma_i z^{-1})\prod_{j=1}^{q_2}(1-1/\alpha_j^* z^{-1})}{\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i z^{-1})}\;\frac{\prod_{j=1}^{q_2}(1-\alpha_j z^{-1})}{\prod_{j=1}^{q_2}(1-1/\alpha_j^* z^{-1})}$$

$$=H_{MP}(z)H_{PT}(z) \qquad (16)$$

où $|\rho_i|<1$, $|\sigma_i|<1$, $|\alpha_j|>1$ et $q_1+q_2=q$.

Un filtre Passe-Tout est un filtre ARMA dont les ordres de la partie AR et MA sont identiques, et dont les zéros du gain complexe sont les inverses conjugués des pôles.

$$y(t) \longrightarrow \boxed{H_{mp}(z)} \longrightarrow w(t)$$

Nous proposons d'abord d'identifier le filtre ARMA SEMP en l'approchant par un filtre AR en utilisant la tricorrélation symétrique car comme pour le cas d'un filtre MA; la tricorrélation traditionnelle ne permet pas d'identifier le filtre SEMP. Le filtre ainsi identifié est utilisé pour déconvoluer le signal observé y(t) et obtenir w(t), un signal contenant un bruit blanc d'ordre deux auquel s'ajoute un bruit gaussien. Le signal w(t) peut être considéré comme la sortie polluée par un bruit gaussien d'un filtre Passe-Tout dont l'entrée est excité par un bruit blanc d'ordre quatre r(t). Pour identifier le filtre Passe-Tout on identifie d'abord ses pôles en utilisant l'équation de Yule-Walker d'ordre quatre (15); ensuite les zéros sont automatiquement les inverses conjugués des pôles estimés.

Relativement à l'approche de la série temporelle résiduelle (§3.1), la décomposition Minimum Phase Passe-Tout nécessite beaucoup moins de temps de calcul, mais elle est moins fine dans la description spectrale du filtre étudié.

4) Simulations

En sismique, le signal d'entrée correspond au signal réflectivité. Nous le simulons par une série aléatoire de diracs. Nous utilisons 512 échantillons. La sortie non-bruitée est obtenue en convoluant la séquence d'entrée avec le filtre à identifier. La sortie bruitée es obtenue en ajoutant un bruit gaussien. Le rapport signal à bruit (RSB) est définit comme le rapport de la puissance de la sortie non-bruitée à la puissance du bruit gaussien.

4.1) Identification de filtres MA :

Dans les tableaux suivant, nous comparons les vrais coefficients de filtres MA(2) et MA(4) à ceux estimés à l'ordre quatre par MV4 et à l'ordre deux par MV2, pour un rapport signal à bruit de 0 et 5 dB, et pour un nombre d'échantillons N-512. Le bruit additif est un bruit gaussien coloré obtenu par un filtrage d'un bruit blanc par un filtre AR(4).

RSB=5 dB	h(1)	h(2)
Vrai	-1.200	0.350
MV4	-1.232	0.336
MV2	-0.527	0.124

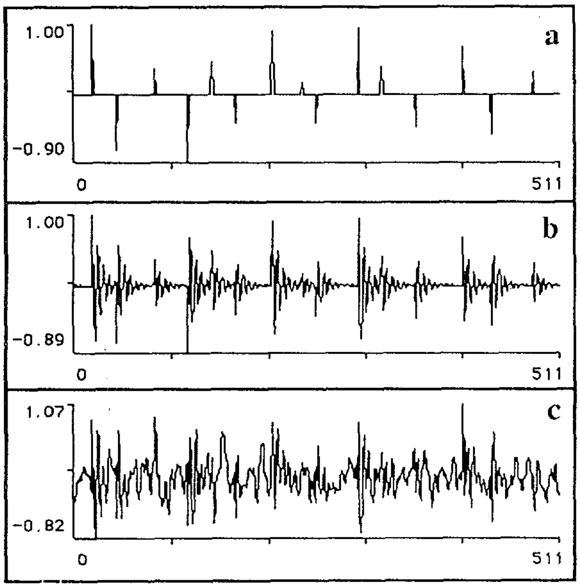
RSB=0 dB	h(1)	h(2)
Vrai	-1.200	0.350
MV4	-1.290	0.415
MV2	-0.346	0.071

RSB=5 dB	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)
Vrai	-1.200	0.750	-0.500	0.300
MV4	-1.173	0.785	-0.473	0.243
MV2	-0.620	0.412	-0.211	0.113

RSB=0 dB	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)
Vrai	-1.200	0.750	-0.500	0.300
MV4	-1.262	0.689	-0.507	0.334
MV2	-0.377	0.229	-0.157	0.032

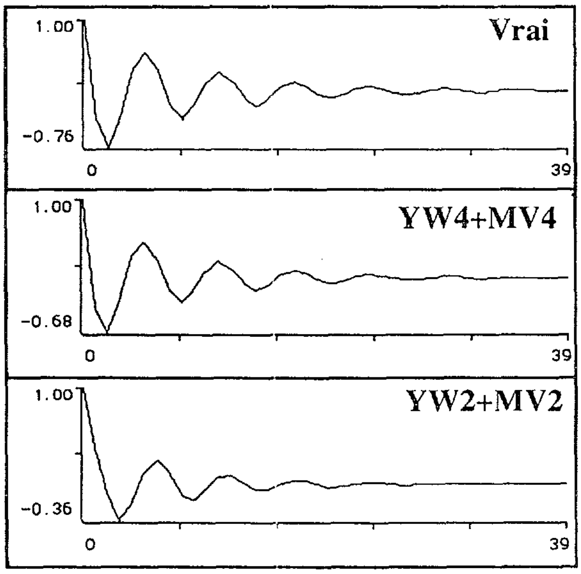
4.2) Identification de filtres ARMA

Dans cet exemple nous comparons l'identification aveugle d'un filtre ARMA(2,2) dont la sortie est bruitée par un bruit gaussien non-blanc (RSB=5dB). Les coefficients du filtre sont a(1)=-0.9, a(2)=0.8, b(1)=-1.3, b(2)=0.4. Dans la figure 2, nous présentons l'identification de la réponse impulsionnelle de ce filtre par la méthode que nous proposons : YW4+MV4; et l'identification classique à l'ordre deux par YW2+MV2.



Temps

Figure 1- a) Signal d'entrée . b)Sortie non-bruitée
c) Sortie bruitée : RSB=5 dB



Temps

Figure 2- Identification de l'ARMA(2,2)

CONCLUSION

Les résultats obtenus ainsi que d'autres réalisés sur d'autres exemples de filtres confirment l'intérêt de la méthode que nous proposons. Toutefois lorsque le rapport signal à bruit est faible (RSB=0 dB), la méthode est moins robuste du fait que l'hypothèse de gaussianneté du bruit est de moins en moins vérifiée sur 512 échantillons, du fait de l'estimation. Si on veut identifier des filtres avec des RSB très faible il est nécessaire de disposer d'un nombre d'échantillons important qui permet de considérer le bruit additif comme gaussien.

La méthode proposée peut facilement être adaptée pour identifier des filtres AR ou MA non-causaux. De même qu'elle peut être utilisée seule ou combinée avec la décomposition en valeurs singulières pour déterminer l'ordre d'un filtre.

Références

[1] M. Boumahdi and J.L. Lacoume "Blind Identification of Non-minimum Phase Filters By Maximising the Kurtosis", *Proc. EUSIPCO 94, Special High Order Statistics Session,* Edinburgh, Scotland.,13-16 1994, Vol. I, pp. 195-198.

[2] S. M. Kay 1987 "Modern Spectral Estimation, Theory and Applications". *Prentice-Hall Signal Processing Series,* Alan. Oppenheim, Series Editor, 1987, Chapter 6-10, pp. 153-369.

[3] A. Swami and J. Mendel, "ARMA Parameter Estimation Using Only Output Cumulants", *IEEE ASSP*, Vol. 38, No. 7, July 1990, pp. 1257-1265.