

COMPORTEMENT DYNAMIQUE ET ERREUR DE PREDICTION  
DANS UN SYSTEME DE TRANSMISSION MICDIF

Nathalie Gicquel & Danièle Fournier-Prunaret  
Groupe d'Etude des Systèmes Non Linéaires et Applications  
Département de Génie Electrique  
INSA TOULOUSE

Résumé

On considère un système de transmission à Modulation par Impulsion et Codage DIFFérentiel (MICDIF) contenant un prédicteur linéaire transverse d'ordre 2 de coefficients  $a_1$  et  $a_2$  couplé à un quantificateur de caractéristique non linéaire  $Q$ . On détermine dans le plan des paramètres  $(a_1, a_2)$ , un domaine à l'intérieur duquel l'erreur est admissible pour un signal donné. On montre à l'aide des outils de la dynamique chaotique que ce domaine n'est pas limité au triangle de stabilité du filtre récuratif linéaire  $\mathcal{R}$ .

Abstract

This paper deals with problems of Differential Pulse Code Modulation (DPCM) transmission systems. It includes an encoder which uses a coupling between a transversal predictor of order two with coefficients  $a_1$  and  $a_2$  and a non linear quantizer  $Q$ . In the parameter plane, it is shown with the help of chaotic dynamical tools that the part of this plane for which the error is admitted is not limited to the stability triangle of the linear recursive filter  $\mathcal{R}$ .

1 INTRODUCTION

On considère un système de transmission à Modulation par Impulsion et Codage DIFFérentiel (MICDIF). Ce système contient un prédicteur linéaire transverse couplé à un quantificateur de caractéristique non linéaire (cf. figure 1).

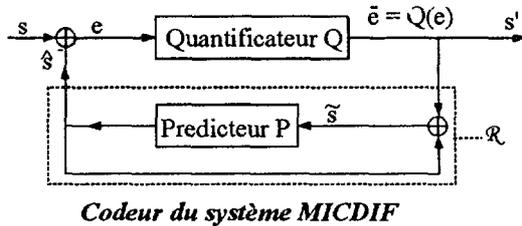


Figure 1: Codeur du système de transmission MICDIF

Le prédicteur est choisi d'ordre deux. Ses coefficients sont  $a_1$  et  $a_2$ . Nous étudions le codeur en tenant compte du quantificateur présent dans la boucle de codage. Ce quantificateur introduit une non linéarité dans le système et transforme le prédicteur transverse en un système récuratif. Il existe donc une grandeur  $X_n$  qui caractérise l'état du codeur telle que :

$$X_{n+1} = F(X_n, \Lambda) \tag{1}$$

où  $\Lambda$  représente les paramètres caractéristiques du prédicteur et du quantificateur. Le but de notre étude est de montrer l'évolution de l'erreur de prédiction du signal en fonction de l'évolution du vecteur paramètre  $\Lambda$ .

II MODELE

Le système considéré peut être modélisé à l'aide d'une transformation ponctuelle de la façon suivante :

$$\hat{s}(n+1) = a_1(\hat{s}(n) + Q(s(n) - \hat{s}(n))) + a_2(\hat{s}(n-1) + Q(s(n) - \hat{s}(n-1))) \tag{2}$$

$\hat{s}(n+1)$  étant le signal prédit à l'instant  $n+1$ , et  $s(n)$  le signal à transmettre. En posant le changement de variables suivant:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n = \hat{s}(n-1) \\ y_{n+1} = \hat{s}(n) \end{cases} \tag{3}$$

l'équation d'état devient une transformation ponctuelle  $T$  de dimension deux, à inverse non unique et définie par:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = a_1 y_n + a_1 Q(s - y_n) + a_2 x_n + a_2 Q(s - x_n) \end{cases} \tag{4}$$

La caractéristique du quantificateur couplé au prédicteur est modélisée par une fonction non linéaire telle que :  $|Q(e)| < M$  (saturation) et  $Q$  a une forme discontinue en

marche d'escalier. La discontinuité du quantificateur est négligée car elle ne conduit pas à l'instabilité du système. Sans perte de généralité, on considère le système normalisé pour lequel  $M=1$ . Des études antérieures [1][2] pour une caractéristique définie par une fonction tangente hyperbolique ont permis de mettre en évidence un comportement chaotique du système pouvant générer des problèmes de fonctionnement du codeur.

Dans le cas présent, la caractéristique  $Q$  est définie par un polynôme de degré 3 (approximation de la tangente hyperbolique) ce qui facilite l'étude analytique de la transformation  $T$ .

On pose :

$$Q(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \geq \frac{3}{2p} \\ \frac{3}{2} \left( \frac{2pe}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{2pe}{3} \right)^3 \right) & \text{si } -\frac{3}{2p} \leq e < \frac{3}{2p} \\ -1 & \text{si } e < -\frac{3}{2p} \end{cases} \tag{5}$$

où  $p$  est le gain en compression du signal. L'étude des solutions de  $T$  permet de connaître l'évolution de l'erreur



de prédiction  $e = s - \hat{s}$  en fonction des valeurs des paramètres du système. Cette étude est faite à l'aide des outils de la dynamique chaotique : étude des courbes de bifurcation des solutions de T dans un plan de paramètres, analyse des bassins d'attraction des solutions de T dans le plan de phase  $(\hat{s}(n-1), \hat{s}(n))$ .

### III STRUCTURE DE BIFURCATION

Une étude détaillée de la structure de bifurcations de (4)(5) a déjà été faite dans [1]. Les principaux résultats concernant les bifurcations des transformations ponctuelles de dimension deux et qui sont utiles pour l'étude de l'erreur sont rappelés dans ce paragraphe. Usuellement, le système est considéré comme fonctionnant de manière satisfaisante lorsque les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  appartiennent au triangle de stabilité ( $\tau$ ) du filtre  $\mathcal{R}$  (cf. figures 2, 3 et 4), quelles que soient les valeurs de  $p$  et  $s$ . La transformation (4) (5) peut posséder des singularités de différents types dont les points fixes, les cycles d'ordre  $k$  (qui sont des singularités de dimension zéro) et les courbes invariantes (qui sont des singularités de dimension un).

Un point fixe  $X^*$  est défini par :  $X^* = F(X^*, \Lambda)$ .

Un cycle d'ordre  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) est un ensemble de  $k$  points  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  vérifiant:

$$\begin{cases} X_{i+1} = F(X_i), i = 1, \dots, k-1 \\ X_1 = F(X_k) \\ X_i = \underset{k \text{ fois}}{F \circ F \circ \dots \circ F}(X_i), i = 1, \dots, k \\ X_h \neq F(X_i), i = 1, \dots, k, 1 \leq h \leq k \end{cases} \quad (6)$$

Pour caractériser les points fixes et les cycles, on étudie les valeurs propres de la linéarisation de T ou  $T^k$  en ces singularités. Pour une transformation bi-dimensionnelle, on associe à un point fixe ou à un cycle d'ordre  $k$  les deux valeurs propres ou multiplicateurs  $S_1$  et  $S_2$  de la transformation linéaire associée.

Un point fixe ou un cycle est dit stable si  $|S_i| \leq 1, i=1,2$  et instable si  $|S_1| \geq 1$  ou  $|S_2| \geq 1$ .

Le système MICDIF peut être le siège de phénomènes chaotiques, d'où une sensibilité importante aux conditions initiales. Ces phénomènes sont liés à l'existence d'une infinité de solutions périodiques instables de (4) (5). Cette sensibilité aux conditions initiales implique alors un disfonctionnement du système de transmission.

Dans le plan des paramètres  $(a_1, a_2)$ , on établit un diagramme de bifurcation. Chaque niveau de gris de ce diagramme correspond au domaine d'existence d'un point fixe ou d'un cycle d'ordre  $k$  stable. La couleur noire correspond aux cycles d'ordre  $k \geq 15$  ou aux comportements chaotiques. Le domaine en blanc représente l'absence d'ensemble attractif. Les figures 2 et 3 représentent les diagrammes de bifurcation de (4) (5) pour  $p = 1.2$  et  $p = 5$  avec  $s = 0.01$ .

Pour la transformation décrite par (1), plusieurs sortes de bifurcations peuvent se produire. Nous ne citons ici que celles qui existent pour le système (4) (5).

- La bifurcation pli ou fold pour laquelle deux points fixes (cycles d'ordre  $k$ ) apparaissent, l'un de type col ( $|S_1| > 1$  et  $|S_2| < 1$ ), l'autre de type noeud stable ( $|S_i| < 1, i=1,2$ ) ou instable ( $|S_i| > 1, i=1,2$ ). Ces deux points fixes (cycles) sont confondus à la valeur de bifurcation pour laquelle  $S_1$  ou  $S_2$  est égal à 1. Les courbes de ce type sont notées  $\Lambda_{(1)_0}^I$  et  $\Lambda_{(1)_0}^V$  sur la figure 4.

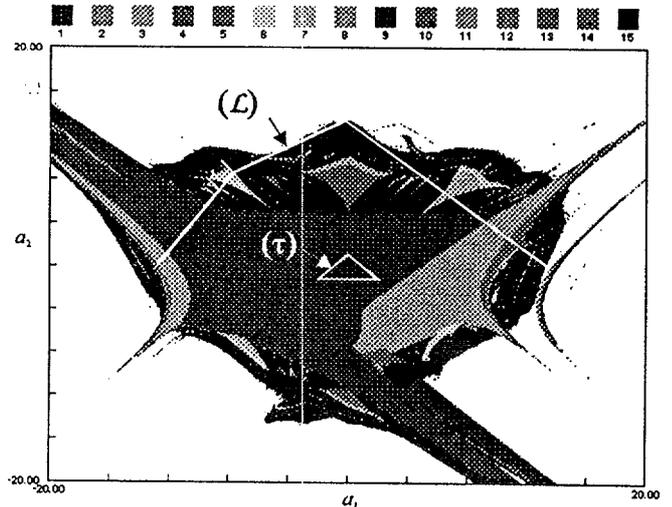


Figure 2 : Diagramme de bifurcation dans le plan des paramètres de prédiction  $(a_1, a_2)$ .  $p = 1.2, s = 0.01$ .

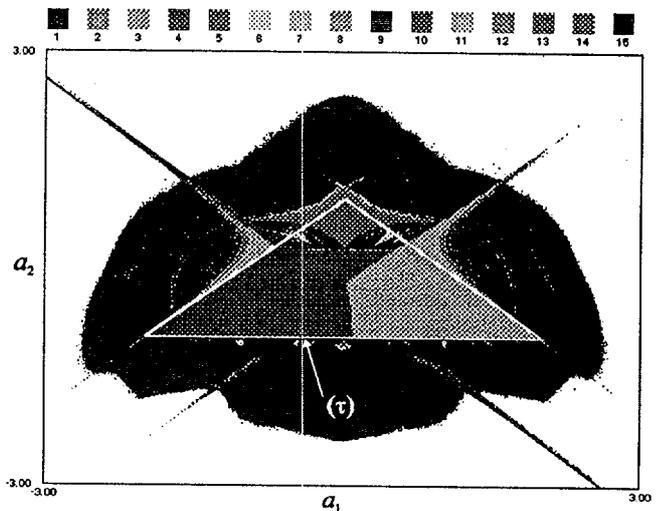


Figure 3 : Diagramme de bifurcation dans le plan des paramètres de prédiction  $(a_1, a_2)$ .  $p = 5, s = 0.01$ .

- La bifurcation de Neimark-Hopf pour laquelle un point fixe (cycle d'ordre  $k$ ) avec des multiplicateurs  $S_i, i = 1,2$  complexes conjugués, change de stabilité (lorsque  $S_1 = \bar{S}_2 = \rho e^{i\phi}$  vérifient  $\rho = 1$ ) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe (cycle) d'origine. Les courbes de bifurcation correspondantes sont notées  $\Gamma_j^I, j = 1,2,3$  sur la figure 4.

- La bifurcation flip pour laquelle un point fixe de multiplicateurs réels  $S_i, i = 1,2$  tels que  $|S_i| \leq 1$  ou  $|S_i| \geq 1$ , change de stabilité en donnant naissance à un cycle d'ordre 2 de même stabilité que le point fixe

considéré avant la bifurcation. Les courbes de bifurcation correspondantes sont notées  $\Lambda_j^1$ ,  $j = 1,2,3$  sur la figure 4. La figure 4 représente les courbes de bifurcations des points fixes de (4) (5) pour  $p = 1.2$  et  $s = 0.01$  dans le plan  $(a_1, a_2)$  (cf. [1] pour une étude plus détaillée). Ces courbes caractérisent les changements de stabilité des points fixes. La transformation (4) (5) possède au plus trois points fixes différents. Pour  $(a_1, a_2)$  appartenant au domaine  $D$  délimité par les courbes  $\Lambda_{(1)_0}^1$  et  $\Lambda_{(1)_0}^r$  (équation  $a_1 + a_2 = 0$ ), les trois points fixes sont confondus. Un des points fixes est stable pour  $(a_1, a_2)$  appartenant au domaine gris clair. La partie grisée foncée est le domaine de coexistence de deux points fixes attractifs. Les courbes de bifurcation correspondent à certaines frontières des domaines grisés obtenus sur le diagramme de bifurcation de la figure 2.

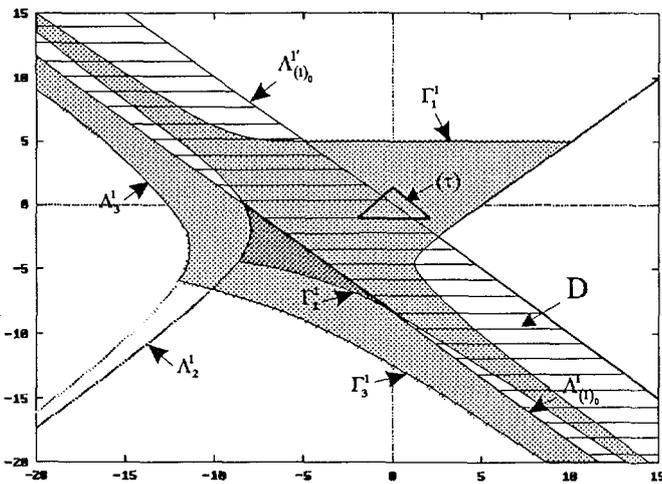


Figure 4 : Courbes de bifurcation des points fixes de T dans le plan  $(a_1, a_2)$ ,  $p = 1.2$ ,  $s = 0.01$ .

#### IV EVOLUTION DE L'ERREUR EN FONCTION DES PARAMETRES.

A partir du signal d'entrée  $s$  le codeur fournit un signal de sortie  $e$  qui est transmis. Nous supposons que la transmission de  $e$  se fait sans erreur. Le décodeur reçoit alors  $e$  et reconstitue un signal de sortie  $s'$ , aussi proche que possible de  $s$ , à partir de la seule connaissance de  $e$ . Au codeur, le signal prédit  $\hat{s}(n)$  est calculé à partir des échantillons passés du signal reconstitué  $\tilde{s}(n)$  et de ceux de  $e(n) = s - \hat{s}(n)$ . A chaque point fixe ou cycle d'ordre  $k$  stable de la transformation ponctuelle (4) (5) est associée la valeur  $\tilde{e}$  isobarycentre des points  $e(n)$ ,  $n = 1, \dots, k$ .

Les figures 5.a ( $p = 1.2$ ) et 5.b ( $p = 5$ ) donnent une représentation de  $\tilde{e}$  en fonction de l'évolution des paramètres  $a_1$  et  $a_2$ . Le domaine correspondant au premier ton de gris est celui pour lequel l'amplitude de  $\tilde{e}$  est inférieure à celle du signal  $s$ .  $\tilde{e}$  est minimale lorsque  $(a_1, a_2) \in \Lambda_{(1)_0}^r$ . Pour  $(a_1, a_2) \in D$ ,  $\tilde{e}$  croît lorsque  $a_1$  et

$a_2$  diminuent. On peut noter que le triangle de stabilité du filtre  $\mathcal{R}$  n'est pas entièrement contenu dans cette zone. Donc même dans  $(\tau)$ , l'erreur peut être non négligeable. Lorsque  $p$  croît,  $(\tau)$  contient des régions où l'erreur est très grande (cf. fig. 5.b).

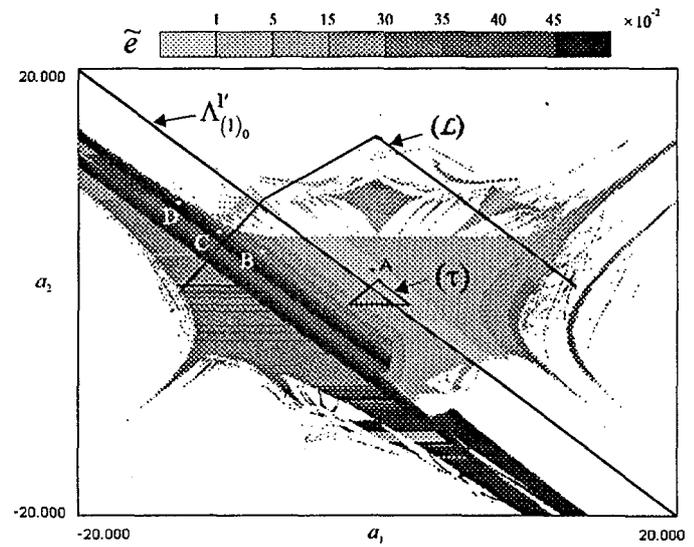


Fig. 5.a

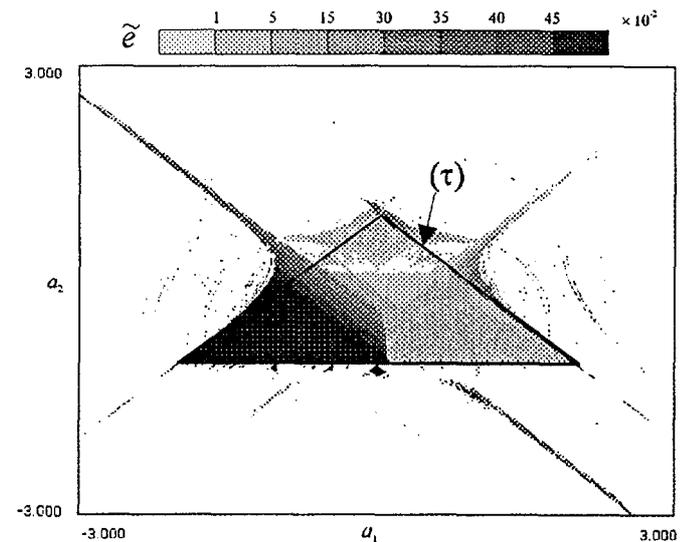


Fig 5.b

Figures 5 : Evolution de l'erreur de prédiction dans le plan  $(a_1, a_2)$ ,  $s = 0.01$ ,  $p = 1.2$  (fig. 5.a) et  $p = 5$  (fig. 5.b). L'amplitude de  $\tilde{e}$  est échelonnée à partir de 0.  $\tilde{e}$  n'est pas calculée lorsque  $(a_1, a_2)$  conduisent à des phénomènes chaotiques. Plus le niveau de gris est foncé, plus la valeur de  $\tilde{e}$  est grande. Le niveau de gris le plus clair correspond à une valeur de  $\tilde{e}$  inférieure à  $s$ . A l'intérieur du triangle de stabilité  $(\tau)$ , pour  $p = 1.2$  (fig. 5.a), l'erreur reste petite; pour  $p = 5$  (fig. 5.b), l'erreur peut prendre de grandes valeurs.

#### V BASSINS D'ATTRACTION

Pour chaque solution attractive de l'équation (4) (5), et pour des valeurs des paramètres fixées, on définit un domaine (bassin) dans l'espace des phases  $(x_n, y_n)$  qui est l'ensemble des conditions initiales  $(x_0, y_0)$  des suites de points itérés convergeant vers la solution. Pour étudier les bifurcations des bassins, on utilise l'outil variété critique



[3]. Une variété critique  $LC$  (dans le cas présent, une courbe) est le lieu géométrique du plan de phase où un point  $X$  possède deux antécédents de rang 1 confondus et situés sur la courbe  $LC_{-1}$ . On rappelle que les points  $T^{-n}(X)$  constituent l'ensemble des antécédents de rang  $n$  d'un point fixe  $X$ . La courbe  $LC$  vérifie  $T^{-1}(LC) \supseteq LC_{-1}$  ou  $T(LC_{-1}) = LC$  et sépare le plan de phase en deux régions à l'intérieur desquelles chaque point a un nombre différent d'antécédents.

Pour la transformation (4) (5), on définit deux lignes critiques (cf. figure 6) : (7)

$$LC: y = a_1 \left( ps + (1-p)x - \frac{4p^3}{27}(s-x)^3 \right) + a_2 \left( s + \frac{p+2}{2} \sqrt{\frac{p-1}{p^3}} \right)$$

$$LC': y = a_1 \left( ps + (1-p)x - \frac{4p^3}{27}(s-x)^3 \right) + a_2 \left( s - \frac{p+2}{2} \sqrt{\frac{p-1}{p^3}} \right)$$

qui séparent le plan de phase en trois parties notées  $Z_1, Z_3, Z_1$ . Les courbes  $LC_{-1}$  et  $LC'_{-1}$  sont données par :

$$LC_{-1}: x = s + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{p-1}{p^3}} \quad LC'_{-1}: x = s - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{p-1}{p^3}} \quad (8)$$

Dans  $Z_1$ , tout point a un unique antécédent de rang 1. Dans  $Z_3$ , tout point a trois antécédents de rang 1 distincts (cf. figures 6).

Dans le cas présent, la taille de la surface couverte par le bassin du point fixe ou cycle considéré est liée à l'amplitude de l'erreur de prédiction. En effet, lorsque  $\tilde{\epsilon}$  augmente, le bassin rétrécit et se déforme (cf. figures 6). Des trous apparaissent dans le bassin lorsqu'une ligne critique  $LC$  ou  $LC'$  traverse la frontière du bassin [3] (cf. figure 6.c). La courbe ( $L$ ) des figures 2 et 5.a indique la limite d'apparition des trous dans le bassin pour  $a_2 > 0$  [5]. Des études antérieures [4] ont montré que pour certaines valeurs de  $(a_1, a_2)$ , la frontière du bassin d'attraction est fractale, ce qui implique une sensibilité aux conditions initiales et donc nuit au bon fonctionnement du codeur. Lorsque la frontière d'un bassin est fractale, la valeur de  $\tilde{\epsilon}$  est grande (cf. fig 6.d), par contre, la valeur de l'erreur ne semble pas liée à l'apparition des trous.

## VI CONCLUSION

On a décrit pour le système de transmission MICDIF avec prédicteur d'ordre deux, l'évolution de l'erreur lors de la variation des paramètres de prédiction  $a_1$  et  $a_2$ . Les valeurs des paramètres de prédiction pour lesquelles l'amplitude de l'erreur après codage du signal est inférieure à l'amplitude du signal initial ne correspondent pas toujours aux valeurs situées à l'intérieur du triangle de stabilité ( $\tau$ ) comme on pourrait le penser. En effet, on considère usuellement le système comme fonctionnant correctement lorsque les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  sont choisis dans ( $\tau$ ). Il peut y avoir des valeurs de l'erreur petites pour des paramètres en dehors de ( $\tau$ ), et inversement, ( $\tau$ ) peut contenir des valeurs de  $a_1$  et  $a_2$  pour lesquelles l'erreur est importante. Lorsque le paramètre  $p$  croît, de la même façon qu'on peut observer des phénomènes chaotiques dans le triangle de stabilité [1], la valeur de l'erreur peut

être grande pour des valeurs des paramètres  $a_1$  et  $a_2$  situées à l'intérieur de ( $\tau$ ). La taille et l'allure du bassin du point fixe considéré sont liées à cette erreur, en particulier, un grand bassin correspond à une petite valeur de l'erreur et une frontière fractale à une grande valeur.

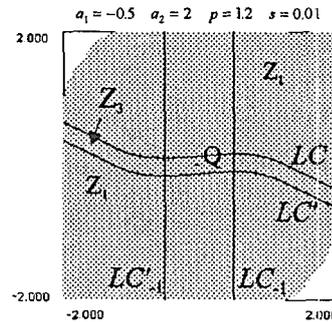


Fig. 6.a

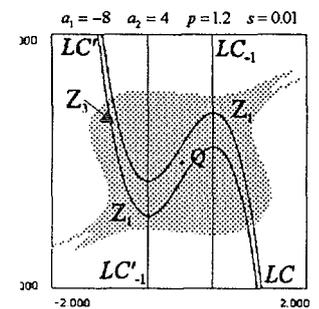


Fig. 6.b

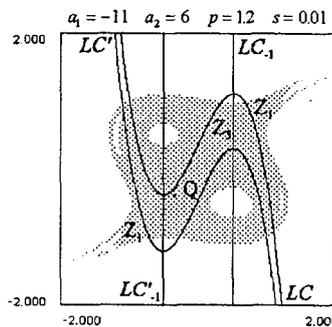


Fig. 6.c

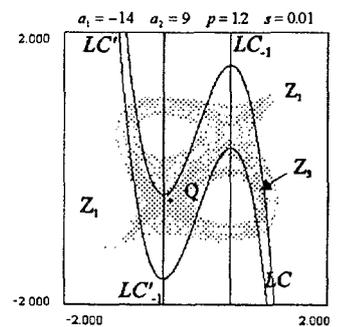


Fig. 6.d

**Figure 6 :** Bassins d'attraction du point fixe  $Q$  et lignes critiques dans le plan de phase pour les paramètres  $(a_1, a_2)$  correspondant aux points A, B, C et D de la figure 5.a. Le bassin de la figure 6.a a une surface plus grande que celui de la figure 6.b; il correspond à une valeur de l'erreur plus petite. La figure 6.c montre un bassin où des trous sont apparus lorsque  $LC$  et  $LC'$  ont traversé la frontière du bassin. La frontière du bassin de la figure 6.d est fractale.

## Références

- [1] D. Fournier-Prunaret, C. Uhl, O. Macchi, S. Dinar. "Chaotic bifurcations in the DPCM transmission system with order 2 predictor", *proceedings ECCTD 93*, p. 837-842, Davos (Suisse), 30 août - 3 sept. 1993.
- [2] C. Uhl - D. Fournier-Prunaret. "Chaotic phenomena in an order one DPCM transmission system", *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol.5, n°4, (1995).
- [3] C.Mira - D.Fournier-Prunaret - L.Gardini - H.Kawakami - J.C.Cathala. Basin bifurcations of two-dimensional non invertible maps. *Fractalization of basins*. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol.4, n°2, (1994), p343-382.
- [4] D. Fournier - N. Gicquel. "Bifurcations of basins in an order two DPCM transmission system", *European Conference on Circuit Theory and Design*, 27 - 31 août 1995, Istanbul, Turquie.
- [5] D. Fournier-Prunaret - N. Gicquel. (à paraître).