

Une Nouvelle Méthode d'Identification de Modèles RIF à l'aide de Cumulants d'Ordre Quatre. Application à l'Égalisation de Canal.

Doulaye DEMBÉLÉ

Gérard FAVIER

Laboratoire I3S, URA 1376 du CNRS/UNSA, Bat. SPI n°4, Les Lucioles 1
250, rue Albert Einstein, Sophia Antipolis, F-06560 Valbonne
Fax : (33) 92 94 28 96, E-Mail : favier@alto.unice.fr, doulaye@alto.unice.fr

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode explicite pour l'identification des paramètres d'un modèle RIF. Cette méthode, basée sur une décomposition de type Cholesky d'une matrice constituée de cumulants d'ordre quatre, est utilisée pour "ouvrir" de façon aveugle un canal de communication radio.

1 Introduction

Plusieurs méthodes d'estimation des paramètres d'un modèle à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF), basées sur l'utilisation de Statistiques d'Ordre Élevé (SOE) ont été récemment proposées dans la littérature. Ces méthodes peuvent être classées en trois catégories [4, 5, 3]: les solutions explicites (ou closed form solutions), les solutions basées sur la résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires surdimensionnés et les solutions basées sur l'utilisation de techniques d'optimisation non-linéaire. Les deux premiers types de solutions présentent l'avantage d'une plus grande simplicité de mise en œuvre. Cependant, du fait qu'elles utilisent peu de cumulants, les solutions explicites proposées dans [6, 10, 11] sont peu performantes. Une amélioration est apportée par les méthodes de la seconde catégorie qui consistent à surdimensionner le système d'équations algébriques à résoudre [7, 11, 1]. Toutefois, ces méthodes présentent l'inconvénient d'utiliser un vecteur de paramètres estimés redondant et de faire appel aux statistiques du second ordre, ce qui nécessite d'éliminer certaines équations et par conséquent certains cumulants, de façon à rendre le système à résoudre indépendant des statistiques du bruit de mesure. Une méthode d'estimation sans redondance du vecteur de paramètres estimés est proposée dans [2]. Cependant pour cette méthode, la dimension du système d'équations à résoudre augmente rapidement avec l'ordre du modèle à identifier.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode explicite basée sur l'utilisation des cumulants d'ordre quatre. Cette méthode utilise davantage de cumulants que les solutions explicites précédemment citées, et elle nécessite moins d'opérations arithmétiques que les solutions existantes de la deuxième catégorie.

Cet article est organisé comme suit. Dans le paragraphe

ABSTRACT

In this paper, a new explicit solution for identifying Finite Impulse Response (FIR) models is proposed. This method, based on a Cholesky type factorization of a matrix composed of fourth-order cumulants, is used to "open the eyes" of a blind equalizer of a radio communication channel.

2, nous donnons les définitions, les hypothèses et la relation de base liant les cumulants d'ordre quatre et les coefficients RIF. La méthode proposée est décrite dans le paragraphe 3, puis, dans le paragraphe 4, elle est utilisée pour ouvrir de façon aveugle un canal de communication en vue d'une égalisation. La conclusion est donnée dans le paragraphe 5.

2 Définitions, hypothèses et relation de base

Soit un processus stochastique scalaire $x(t)$ à valeurs réelles ou complexes :

$$x(t) = \sum_{i=0}^Q h(i)w(t-i) \quad ; \quad y(t) = x(t) + v(t) \quad (1)$$

où :

- la séquence $\{w(t)\}$ est centrée, i.i.d., non-gaussienne, non observable et de variance inconnue.
- l'observation $y(t)$ est entachée d'un bruit additif gaussien centré $v(t)$, supposé indépendant de $w(t)$.
- les paramètres $h(i)$ correspondent aux coefficients de la réponse impulsionnelle (r.i.) du système, avec $h(0) \neq 0$.

Nous utilisons la définition suivante pour les cumulants d'ordre quatre d'un signal aléatoire complexe :

$$C_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = cum\{y^*(t), y(t+\tau_1), y^*(t+\tau_2), y(t+\tau_3)\} \quad (2)$$

où y^* représente le conjugué du nombre complexe y .

En utilisant les équations (1) dans la définition ci-dessus et en tenant compte des propriétés d'additivité et de multilinéarité des cumulants (voir [8]) et des hypothèses sur $w(t)$



et $v(t)$, nous obtenons :

$$C_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \gamma_{4w} \sum_{k=s_1}^{s_2} h^*(k)h(k+\tau_1)h^*(k+\tau_2)h(k+\tau_3) \quad (3)$$

où :

$$\begin{aligned} s_1 &= \min(0, -\tau_1, -\tau_2, -\tau_3) \\ s_2 &= \max(Q, Q-\tau_1, Q-\tau_2, Q-\tau_3) \\ \gamma_{4w} &= E\{|w(t)|^4\} - 2E^2\{|w(t)|^2\} - |E\{w^2(t)\}|^2 \\ &= \text{kurtosis de la séquence } \{w(t)\} \end{aligned}$$

La relation (3) est à la base de la nouvelle méthode d'estimation présentée dans le paragraphe suivant. Notons que l'on a $C_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = C_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ du fait que le bruit additif $v(t)$ est supposé gaussien et que par conséquent : $C_{4v}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$.

3 Nouvelle méthode d'estimation des coefficients de la réponse impulsionnelle

En choisissant $\tau_3 = 0$ et en faisant varier τ_1 et τ_2 de Q à 0 dans (3), nous formons la matrice carrée \bar{M} d'ordre $(Q+1)$:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} C_{4y}(Q, Q, 0) & \dots & C_{4y}(Q, 0, 0) \\ C_{4y}(Q-1, Q, 0) & \dots & C_{4y}(Q-1, 0, 0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{4y}(0, Q, 0) & \dots & C_{4y}(0, 0, 0) \end{pmatrix} \quad (4)$$

En utilisant la relation (3), cette matrice peut se factoriser comme :

$$\bar{M} = \gamma_{4w} L_1 L_1^H \quad (5)$$

où L_1^H dénote le transposé conjugué de la matrice L_1 , avec :

$$L_1 = \begin{pmatrix} h^*(0)h(Q) & 0 & \dots & 0 \\ h^*(0)h(Q-1) & h^*(1)h(Q) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^*(0)h(1) & h^*(1)h(2) & \dots & 0 \\ h^*(0)h(0) & h^*(1)h(1) & \dots & h^*(Q)h(Q) \end{pmatrix} \quad (6)$$

La matrice L_1 contient les coefficients de la r.i.. Il est supposé dans ce paragraphe que le kurtosis γ_{4w} est inconnu et que $h(0) = 1$. Le second membre de l'équation (5) peut être écrit sous la forme :

$$\bar{M} = \text{signe}\{\gamma_{4w}\} (\sqrt{|\gamma_{4w}|} L_1) (\sqrt{|\gamma_{4w}|} L_1)^H \quad (7)$$

$$= \text{signe}\{\gamma_{4w}\} \bar{L}_1 \bar{L}_1^H$$

ou

$$\bar{L}_1 = \sqrt{|\gamma_{4w}|} L_1 = \mathcal{K} L_1 \text{ avec } \mathcal{K} = \sqrt{|\gamma_{4w}|} \quad (8)$$

Définissons la matrice M telle que :

$$\begin{aligned} M &= \bar{M} \text{ si } \gamma_{4w} > 0 \\ M &= -\bar{M} \text{ si } \gamma_{4w} < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Après avoir donné la condition pour laquelle la matrice M est définie positive, nous développons un algorithme permettant d'obtenir le facteur \bar{L}_1 de la factorisation (7), à partir d'une décomposition de type Cholesky de la matrice M . Nous montrons tout d'abord dans la proposition 3.1 qu'il est possible de déterminer le signe de γ_{4w} à partir des éléments diagonaux de la matrice \bar{M} . Puis, dans la proposition 3.2, nous montrons que la matrice M est définie positive si tous les coefficients de la r.i. sont non nuls.

Proposition 3.1 (Signe de γ_{4w}) Tous les éléments diagonaux de la matrice \bar{M} ont le même que γ_{4w} .

Démonstration : D'après la relation (3), les éléments de la diagonale de \bar{M} ($\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $\tau_3 = 0$) sont donnés par :

$$\gamma_{4w} \left(\sum_{k=s_1}^{s_2} |h(k)h(k+\tau)|^2 \right) \quad (10)$$

Le terme sous le signe \sum étant positif, on en déduit la proposition 3.1. \square

Proposition 3.2 La matrice M est définie positive si tous les coefficients de la r.i. sont non nuls.

Démonstration : La condition de définie positivité de la matrice M est que $x^H M x > 0$ pour tout vecteur x non nul. D'après la forme factorisée (7) et la définition (9) de M , nous avons :

$$x^H M x = x^H \bar{L}_1 \bar{L}_1^H x = (\bar{L}_1^H x)^H (\bar{L}_1^H x) = y^H y \quad (11)$$

D'après (11), la condition de définie positivité de M est que y soit non nul ou encore que \bar{L}_1 soit de rang plein. Compte tenu de la structure triangulaire de \bar{L}_1 , son déterminant est :

$$\mathcal{K}^{Q+1} h^{Q+1}(Q) h^*(0) h^*(1) \dots h^*(Q) \quad (12)$$

Par suite, si tous les coefficients de la r.i. sont non nuls, ce déterminant sera lui-même non nul et la matrice \bar{L}_1 sera de rang plein ; d'où la proposition 3.2 \square

Dans la suite nous supposons que tous les coefficients de la r.i. sont non nuls. Nous pouvons alors faire une décomposition de Cholesky de la matrice M , dont l'algorithme de calcul est détaillé dans le paragraphe suivant.

3.1 Décomposition de Cholesky de la matrice M

La décomposition de Cholesky d'une matrice $L(m, m)$, supposée hermitienne et définie positive, est donnée par les expressions suivantes :

$$j = 1, \dots, m$$

$$L(j, j) \leftarrow \left[L(j, j) - \sum_{k=1}^{j-1} L(j, k) L^*(j, k) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$i = j + 1, \dots, m$$

$$L(i, j) \leftarrow \left(L(i, j) - \sum_{k=1}^{j-1} L(i, k) L^*(j, k) \right) / L(j, j)$$

où la notation $y \leftarrow x$ signifie que y est remplacé par x .

Par la suite, cet algorithme est appelé décomposition standard de type Cholesky. Les éléments de la diagonale de la matrice résultant de cette décomposition sont des nombres réels positifs, propriété qui n'est pas vérifiée par la matrice \bar{L}_1 définie en (6) et (8). Par contre, cette dernière matrice est telle que les éléments de sa dernière ligne soient positifs. L'algorithme standard de décomposition de Cholesky est alors modifié de façon à assurer cette propriété.

En posant $\tau_1 = Q - i + 1$, $\tau_2 = Q - j + 1$ et $\tau_3 = 0$, avec $i \geq j$, dans la relation (3), on a :

$$M(i, j) = \mathcal{K}^2 \sum_{k=0}^{j-1} |h(k)|^2 h(Q - i + 1 + k) h^*(Q - j + 1 + k) \quad (13)$$

Cette matrice M est factorisée à l'aide d'une version modifiée de l'algorithme de Cholesky [3] de façon à obtenir un facteur \bar{L}_1 comme défini par (6) et (8).

Algorithme modifié de décomposition de Cholesky (version colonne) La décomposition définie par la relation (7) peut être obtenue à l'aide de l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned}
 & \tilde{L}_1 \leftarrow M \\
 & j = 1, 2, \dots, Q+1 \\
 & \tilde{L}_1(j, j) \leftarrow \left[\tilde{L}_1(j, j) - \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{L}_1(j, k) \tilde{L}_1^*(j, k) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & i = j+1, j+2, \dots, Q+1 \\
 & \tilde{L}_1(i, j) \leftarrow \left[\tilde{L}_1(i, j) - \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{L}_1(i, k) \tilde{L}_1^*(j, k) \right] / \tilde{L}_1(j, j) \\
 & L_{Qj} = \tilde{L}_1(Q+1, j); \text{sq}L_{Qj} = |\tilde{L}_1(Q+1, j)| \\
 & i = j, j+1, \dots, Q+1 \\
 & \tilde{L}_1(i, j) \leftarrow \tilde{L}_1(i, j) L_{Qj}^* / \text{sq}L_{Qj}
 \end{aligned}$$

L_{Qj} et $\text{sq}L_{Qj}$ sont des variables intermédiaires.

3.2 Algorithme d'estimation des coefficients de la r.i.

À partir des relations (6) et (8), il est facile de déduire une formule de calcul des coefficients de la r.i., utilisant les coefficients de la première colonne de la matrice \tilde{L}_1 .

$$h(i) = \frac{\tilde{L}(Q+1-i, 1)}{\tilde{L}(Q+1, 1)} \quad i = 1, \dots, Q \quad (14)$$

Nous pouvons aussi utiliser tous les éléments de la matrice triangulaire \tilde{L}_1 en formant la matrice R' suivante :

$$R' = K \begin{bmatrix} 1 & h^*(1) & \dots & h^*(Q) \\ h(1) & h(1)h^*(1) & \dots & h(1)h^*(Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(Q) & h(Q)h^*(1) & \dots & h(Q)h^*(Q) \end{bmatrix} = KR$$

La matrice R est obtenue en divisant tous les éléments de R' par l'élément $R'(1, 1) = K$. Nous mettons ensuite la matrice R sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 R &= \begin{bmatrix} 1 \\ h(1) \\ \vdots \\ h(Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h^*(1) & \dots & h^*(Q) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{h}\mathbf{h}^H = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^H
 \end{aligned}$$

Cette matrice est de rang un ; sa décomposition en valeurs singulières (SVD) nous permet de déduire les coefficients inconnus :

$$[h(1) \dots h(Q)]^T = \sqrt{d_0} \mathbf{v}_1 \quad (15)$$

où d_0 est le premier élément de la diagonale de la matrice D et \mathbf{v}_1 est le vecteur constitué des Q dernières composantes de la première colonne de la matrice V .

Remarque : Si γ_{4w} est connu, $h(0)$ pouvant être inconnu dans ce cas, nous définissons la matrice M par :

$$M = \frac{\tilde{M}}{\gamma_{4w}} \quad (16)$$

La proposition 3.2 s'applique à cette matrice et nous pouvons utiliser l'algorithme de décomposition de Cholesky précédent pour le calcul de la matrice L_1 définie en (6).

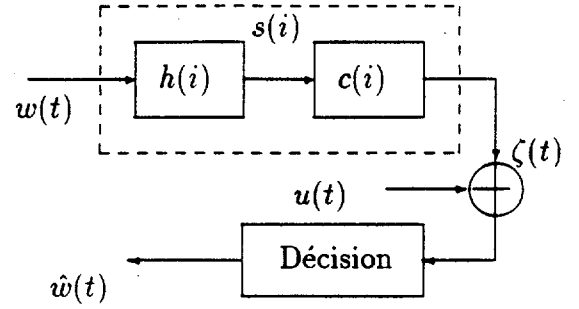


Figure 1: Canal et égaliseur

4 Application à l'égalisation

Nous considérons dans ce paragraphe le problème de l'ouverture d'un canal de communication en vue d'une égalisation aveugle. La figure 1 représente le schéma simplifié d'un système d'égalisation, avec :

$c(i)$ les coefficients de l'égaliseur.

$s(i)$ les coefficients de la r.i. globale du système "canal + égaliseur". Dans le cas d'une égalisation parfaite, seul un coefficient $s(i)$ est non nul et vaut 1.

$u(t)$ le bruit $v(t)$ (supposé i.i.d.) de l'équation (1), ramené à la sortie de l'égaliseur.

$\zeta(t)$ la sortie de l'égaliseur.

Dans le cas des communications commerciales, la constellation des caractères à transmettre étant connue, nous pouvons calculer a priori le kurtosis γ_{4w} . Nous utilisons dans ce cas la remarque du paragraphe précédent.

Avec les coefficients de la r.i. estimés, on peut utiliser l'algorithme de Viterbi ou un algorithme basé sur la minimisation du critère MSE (Mean Squared Error) pour trouver les coefficients $c(i)$ de l'égaliseur [9]. Nous considérons ici un égaliseur basé sur la minimisation du critère MSE, c'est-à-dire :

$$J_{MSE} = E \{ |\zeta(t+d) - w(t)|^2 \} \quad (17)$$

où d est un entier correspondant au retard de transmission.

On peut montrer que les coefficients de l'égaliseur qui permet de minimiser le critère (17), sont donnés par [3] :

$$\mathbf{c} = \left(\mathbb{H}^H \mathbb{H} + \frac{\gamma_{2v}}{\gamma_{2w}} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbb{H}^H \mathbf{s}_d \quad (18)$$

où :

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h(Q) & h(Q-1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h(Q) & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h(Q) & h(Q-1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h(Q) \end{pmatrix}$$

\mathbf{s}_d est le vecteur désiré pour la r.i. globale (vecteur possédant un seul coefficient non nul), alors que γ_{2w} et γ_{2v} désignent respectivement la variance des séquences $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$.



La valeur de γ_{2w} est déduite du type de la constellation de la source. Une estimation de γ_{2v} est obtenue à partir des valeurs estimées de la r.i. et de γ_{2w} . En effet, en définissant le cumuland d'ordre deux par :

$$C_{2y}(\tau) = cum\{y^*(t), y(t + \tau)\} \quad (19)$$

et en reportant (1) dans (19), on obtient la relation suivante :

$$C_{2y}(\tau) = \gamma_{2w} \sum_{k=s_1}^{s_2} h^*(k)h(k + \tau) + \gamma_{2v} \quad (20)$$

En faisant $\tau = 0$ dans (20), une estimation de γ_{2v} est donnée par :

$$\gamma_{2v} = C_{2y}(0) - \gamma_{2w} \sum_{k=0}^Q |h(k)|^2 \quad (21)$$

4.1 Simulations

Des simulations de type Monte Carlo (20 simulations indépendantes) ont été réalisées en utilisant une approximation de la fonction de transfert du canal GSM (Groupe Spécial Mobile), i.e: $H(z) = 1 + (0.9 + 0.6j)z^{-1} + (0.1250 + 0.8975j)z^{-2} + (0.3261 - 0.7026j)z^{-3} + (-0.7162 + 0.2851j)z^{-4} + (0.4422 - 0.6021j)z^{-5}$, une constellation de type PSK-4, avec un rapport signal à bruit de 30 dB. Le nombre des données et des coefficients de l'égaliseur ont été respectivement fixés à 2048 et 31. L'entrée et la sortie de l'égaliseur sont

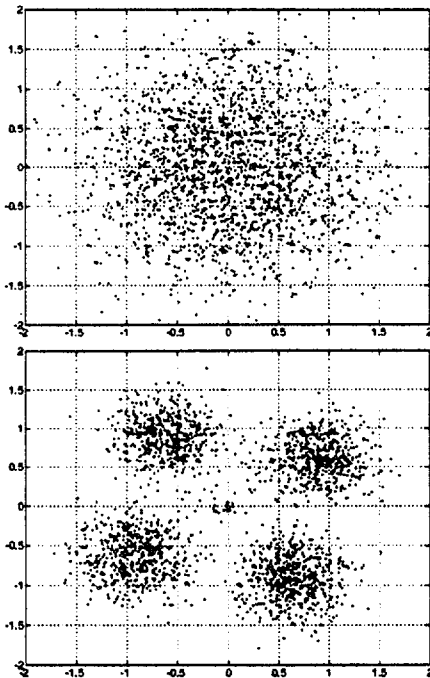


Figure 2: Entrée (a) et Sortie (b) de l'égaliseur

représentées sur les figures 2.a et 2.b. À partir de la figure 2.b, on peut conclure que la méthode proposée permet d'"ouvrir" le canal avec 2048 échantillons. Les valeurs obtenues pour les interférences intersymboles (InterSymbol Interference : ISI) et le critère MSE après égalisation sont respectivement égales à : -9 dB et -7 dB.

5 Conclusion

Nous avons décrit dans cet article une nouvelle solution explicite pour l'identification des coefficients d'un filtre RIF en utilisant seulement les cumulands d'ordre quatre de la séquence observée. Cette méthode a ensuite été utilisée pour "ouvrir un canal" de communication en vue d'une égalisation aveugle. Les performances de la méthode proposée ont été testées à l'aide de simulations sur données synthétiques.

Références

- [1] S. A. Alshebeili, A. N. Venetsanopoulos, and A. E. Cetin. Cumulant Based Identification Approaches for Nonminimum Phase FIR Systems. *IEEE SP*, 41(4):1576-1588, April 1993.
- [2] P. Comon. MA Identification Using Fourth Order Cumulants. *Signal Processing*, 26(3):381-388, March 1992.
- [3] D. Dembélé. *Identification de Modèles ARMA Linéaires à l'Aide de Statistiques d'Ordre Élevé. Application à l'Égalisation Aveugle*. Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, Juillet 1995.
- [4] G. Favier, D. Dembélé, and J.-L. Peyre. Identification de Modèles Paramétriques AR, MA et ARMA avec les Statistiques d'Ordre Supérieur et Analyse des Performances. In *GRETSI, Juan-Les-Pins*, pages 137-140, Septembre 1993.
- [5] G. Favier, D. Dembélé, and J. L. Peyre. ARMA Identification Using High-Order Statistics Based Linear Methods: A Unified Presentation. In *EUSIPCO, Edinburg*, pages 203-207, September 1994.
- [6] G. B. Giannakis. Cumulants: A Powerful Tool in Signal Processing. *Proc. of the IEEE*, 75(9):1333-1334, September 1987.
- [7] G. B. Giannakis and J. M. Mendel. Identification of Nonminimum Phase Systems Using Higher Order Statistics. *IEEE ASSP*, 37(3):360-377, March 1989.
- [8] J. M. Mendel. Tutorial on Higher Order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory: Theoretical Results and Some Applications. *Proc. of the IEEE*, 79(3):278-305, March 1991.
- [9] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill International ed., second edition, 1989.
- [10] A. Swami and J. M. Mendel. Closed Form Recursive Estimation of MA Coefficients Using Autocorrelation and Third Order Cumulants. *IEEE ASSP*, 37(11):1794-1795, November 1989.
- [11] J. K. Tugnait. Approaches to FIR System Identification With Noisy Data Using Higher Order Statistics. *IEEE ASSP*, 38(7):1307-1317, July 1990.