DIAGNOSTIC SÉQUENTIEL OPTIMAL DE RUPTURES DANS LES SYSTÈMES STOCHASTIQUES

Igor V. NIKIFOROV

L.A.I.L. U.R.A. CNRS 1440 D Université des Sciences et Technologies de Lille
Bâtiment P2, 59655, Villeneuve d'Ascq

RÉSUMÉ

La détection et l'isolation des changements brusques dans les systèmes stochastiques jouent le rôle central pour des applications telles que la segmentation de signaux sismiques, acoustiques, vibratoires, physiologiques (EEG, ECG, EMG,...), le contrôle de la qualité, le contrôle non destructif, la détection et la classification de cibles, la détection de manoeuvre de la cible (trajectographie passive à partir d'azimuts), surveillance des systèmes technologiques, etc. Le but de cet article consiste à résoudre le problème du diagnostic (détection et isolation) optimal séquentiel de changements brusques (ruptures) dans les systèmes stochastiques. Nous avons obtenu les bornes inférieures pour le pire retard moyen de détection sur trois classes des algorithmes séquentiels du diagnostic et, également, nous avons trouvé la forme des algorithmes asymptotiquements optimaux. Deux stratégies : i) séquentielle; ii) non-séquentielle (avec la taille de l'echantillon fixe) sont comparées pour le modèle gaussien simple.

ABSTRACT

Statistical algorithms for detecting and isolating abrupt changes in the properties of signals and systems have numerous applications such as : segmentation of seismic, acoustique, biomedical (EEG, ECG, EMG,...) signals; quality control; non-destructive control; target detection and classification; target maneuver detection in the bearing only tracking; on-line fault diagnosis in complex technical systems, etc . We address the problem of optimal sequential abrupt change detection and isolation in stochastic systems. Three different criteria of optimality for this problem are established and three classes of change detection/isolation algorithms are introduced. An asymptotically optimal solution to the problem is obtained, the change detection/isolation algorithm is proposed, and the statistical properties of this algorithm are investigated. The comparison between sequential and non-sequential approaches in the problem of change detection/isolation is given for a simple Gaussian model.

Introduction

L'article est composé de trois partie. La *première partie* est consacrée aux méthodes classiques de la détection séquentiel de ruptures dans les suites aléatoires [1]. Elle joue pour nous un *rôle introductif*, parce que le problème de *détection est le cas particulier* (où le nombre d'hypothèses $K = 2$) *de problème général du diagnostic* (où le nombre d'hypothèses $K \geq 2$). Nous présenterons ici une position du problème et une définition formelle des critères. Ensuite, nous donnerons la solution optimale du problème. Dans la *deuxième partie*, nous donnerons une position du problème du diagnostic (détection et isolation) séquentiel de ruptures et, également, la solution optimale du problème pour trois indices de performance. Nous nous appuyons principalement sur [4, 5, 6]. Cette partie s'organise de la façon suivante: nous donnons une position du problème et une définition formelle des critères. Ensuite, nous construisons les algorithmes de détection/isolation de ruptures. Enfin, nous étudions les propriétés statistiques asymptotiques de ces algorithmes et établissons des théorèmes de l'optimalité. La *troisième partie* est consacrée à la recherche de la capacité des deux stratégies de détection/isolation : séquentielle et non-séquentielle (avec la taille de l'echantillon fixe). Nous examinons dans cette partie la comparaison entre deux stratégies ci-dessus dans le cas du modèle gaussien simple [7].

1. Détection séquentiel de ruptures

Position du problème. Supposons une famille de distributions $\mathcal{P} = \{P_i, i = 0, 1\}$ (à $K = 2$ membres), dont les densités sont $\{p_i, i = 0, 1\}$. Supposerons que, pour cette famille de distributions, l'inégalite suivante est vraie

$$0 < \rho_{10} = \int p_1 \ln \frac{p_1}{p_0} d\mu < \infty \qquad (1)$$

Soit $(Y_t)_{t \geq 1}$ une suite aléatoire indépendante observée *séquentiellement* :

$$\mathcal{L}(Y_t) = \begin{cases} P_0 & \text{si} \quad t < t_0 \\ P_1 & \text{si} \quad t \geq t_0 \end{cases}, \quad t_0 = 1, 2, \dots$$

L'instant t_0 de la rupture est inconnu. Le problème consiste à dètecter la rupture dans la suite $(Y_t)_{t \geq 1}$ dans les plus brefs délais. Les algorithmes de détection de ruptures doivent calculer l'instant N de détection de la rupture (l'instant d'arrêt).

Retard de détection. Si la rupture est détectée aprés l'instant t_0 ($N \geq t_0$ est vrai), alors le retard de détection de la rupture est

$$\tau = N - t_0 + 1 \mid N \geq t_0.$$

Fausse alarme. Au contraire, si les ruptures survenant dans la distribution $\mathcal{P}$ sont détectées avant l'instant t_0 ($N < t_0$ est vrai), il s'agit alors de fausses alarmes, qui se caractérisent de la façon suivante. Soient les observations $(Y_t)_{t\geq 1}$ suivantes de la distribution P_0. Définissons le premier instant de fausse alarme

$$N \mid Y_1, \ldots, Y_N \sim P_0.$$

Le critère d'optimalité doit favoriser la rapidité de détection avec peu de fausses alarmes. En d'autres termes, le retard τ avec $N \geq t_0$ devrait être stochastiquement faible et $N \mid Y_1, \ldots, Y_N \sim P_0$ devrait être stochastiquement grand. La solution optimale est un compromis entre ces deux exigences.

Définition formelle des critères. Soient $P^1_{t_0}$ la distribution des observations $Y_1, \ldots, Y_{t_0}, \ldots, Y_t$, lorsque $t_0 = 1, 2, \ldots$ et $E^1_{t_0}$ l'espérance mathématique découlant de $P^1_{t_0}$ et $P^1_\infty = P_0$. En conséquence, le retard moyen de détection est donné par

$$\overline{\tau} = E^1_{t_0}(N - t_0 + 1 | N \geq t_0, Y_1, \ldots, Y_{t_0 - 1}) \tag{2}$$

Dans des nombreux cas pratiques, il est utile de disposer d'un algorithme qui soit indépendant de la distribution de l'instant t_0 et de la "trajectoire" de l'echantillon d'observations $Y_1, \ldots, Y_{t_0-1}$. Il est évident, que le retard moyen de détection défini en (2) est une fonction de t_0 et de la "trajectoire" de la suite $Y_1, \ldots, Y_{t_0-1}$. C'est pour cela que nous utilisons le critère *minimax*, initialement introduit par Lorden [3]. Nous voulons que le pire retard moyen de détection

$$\overline{\tau}^* = \sup_{t_0 \geq 1} \text{esssup}\, E^1_{t_0}(N - t_0 + 1 | N \geq t_0, Y_1, \ldots, Y_{t_0-1}) \tag{3}$$

soit aussi faible que possible pour une valeur

$$\overline{T} = E_0(N) \tag{4}$$

donnée a *priori*, de durée moyenne avant une fausse alarme.

Solution du problème. Si nous devons *détecter* un changement dans la suite $(Y_t)_{t\geq 1}$, la solution classique optimale à ce problème est constituée par l'algorithme de la *Somme Cumulée* (CUSUM) proposé par Page [8]. Celui-ci est fondé sur la comparaison à chaque instant de la différence entre la valeur du *rapport de vraisemblance* et sa valeur minimale courante :

$$S_1^t - \min_{0 \leq k < t} S_1^k = \max_{1 \leq k \leq t} S_k^t, \quad S_k^t = \sum_{i=k}^{t} \ln \frac{p_1(Y_i)}{p_0(Y_i)}$$

avec un seil h donné. Autrement dit, l'algorithme CUSUM s'arrête à l'instant $\tilde{N}$ si, pour une valeur $k < \tilde{N}$ les observations $Y_k, \ldots, Y_{\tilde{N}}$ sont *significatives* pour permettre d'accepter l'hypothèse sur le changement :

$$\tilde{N} = \inf\{t \geq 1 : \max_{1 \leq k \leq t} S_k^t \geq h\}. \tag{5}$$

Les principaux résultats sont énoncés dans les théorèmes ci-dessous [3].

Théorème 1 *Soit $\tilde{N}$ l'algorithme de détection (5). Il en résulte*[1]

$$\overline{\tau}^* \sim \frac{\ln \overline{T}}{\rho_{10}} \quad \textit{lorsque } \overline{T} \to \infty$$

[1] $y \sim x \Leftrightarrow y = x(1 + o(1))$ lorsque $x \to \infty$.

Théorème 2 *Soit $\mathcal{K}_\gamma = \{N : E_0(N) \geq \gamma\}$ la classe de tous les algorithmes séquentiels de détection N satisfaisant à l'inégalité $E_0(N) \geq \gamma$. Supposons que $\mathcal{K}_\gamma$ n'est pas vide. Définissons la borne inférieure $n(\gamma)$ comme l'inf. du pire retard moyen de détection dans la classe $\mathcal{K}_\gamma$:*

$$n(\gamma) = \inf_{N \in \mathcal{K}_\gamma} \{\overline{\tau}^*\}.$$

Il vient

$$n(\gamma) \sim \frac{\ln \gamma}{\rho_{10}} \quad \textit{lorsque } \gamma \to \infty.$$

Corollaire 1 *L'algorithme de détection (5) est asymptotiquement optimal sur la classe $\mathcal{K}_\gamma$.*

2. Diagnostic séquentiel de ruptures

Position du problème. Le problème du diagnostic (détection et isolation) séquentiel des ruptures peut être représenté de la façon suivante. Supposons qu'il existe une famille finie (à $K > 2$ membres) de distributions $\mathcal{P} = \{P_i,\ i = 0, \ldots, K-1\}$ (à $K > 2$ membres), dont les densités sont $\{p_i,\ i = 0, \ldots, K-1\}$. Dans le cas paramétrique nous supposons que $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \Omega\}$, où $\Omega = \bigcup_{i=0}^{K-1} \theta_i,\ \ \Omega \subset \mathbf{R}^r$, et nous notons $p_\theta(Y)$ la densité de cette famille. Supposons que, pour cette famille de distributions, l'inégalite suivante est vraie

$$0 < \rho_{ij} = \int p_i \ln \frac{p_i}{p_j} d\mu < \infty, 0 \leq i \neq j \leq K - 1, \tag{6}$$

Soit $(Y_t)_{t\geq 1}$ une suite aléatoire indépendante observée *séquentiellement* :

$$\mathcal{L}(Y_t) = \begin{cases} P_0 & \text{si} \quad t < t_0 \\ P_l & \text{si} \quad t \geq t_0 \end{cases}, \quad t_0 = 1, 2, \ldots$$

L'instant t_0 et le numéro l de la rupture sont inconnus. Le problème consiste à *détecter et isoler* la rupture survenue dans θ. En d'autres termes, il nous faut déterminer le type de la rupture (numéro l) dans les plus brefs délais. Les algorithmes de détection /isolation de rupture doivent calculer un *couple* (N, ν) sur la base des observations $Y_1, Y_2, \ldots$, où N est l'instant de détection/isolation de la rupture de type ν et la valeur de $\nu, \nu = 1, \ldots, K-1$ représente la *décision finale*. Autrement dit, à l'instant N, l'hypothèse $\mathcal{H}_\nu : \{\theta = \theta_\nu\}$ est acceptée.

Retard de détection/isolation. Si la rupture est *détectée/isolée après* l'instant t_0 ($N \geq t_0$ est vrai), alors le retard de détection/isolation de la rupture de type l est

$$\tau_l = N - t_0 + 1 \mid N \geq t_0.$$

Au contraire, si les changements survenant dans θ sont détectés *avant* l'instant t_0, ou si la décision finale est fausse ($\nu \neq l$), il s'agit alors de *fausses alarmes ou d'isolations erronées*, qui se caractérisent de la façon suivante :

Fausses alarmes. Soient les observations $(Y_t)_{t\geq 1}$ suivantes de la distribution P_0 et la suite d'instants d'alarme

$$N_0 = 0 < N_1 < N_2 < \cdots < N_r < \cdots,$$

dans laquelle N_r est l'instant d'alarme de l'algorithme de détection/isolation appliqué à $Y_{N_{r-1}+1}, Y_{N_{r-1}+2}, \ldots$. Définissons le *premier* instant de fausse alarme $N^{\nu=j}$ de type j dans cette suite :

$$N^{\nu=j} = \inf_{r \geq 1} \{N_r : \nu_r = j\}, \quad 1 \leq j \leq K-1,$$

où $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

Isolations erronées. Pour éviter toute incertitude quant aux conditions initiales, posons $t_0 = 1$. En d'autres termes nous faisons l'hypothèse que les observations $(Y_t)_{t\geq 1}$ suivantes de la distribution P_l, $l \geq 1$. Définissons le *premier* instant d'isolations erronée $N^{\nu=j}$ de type j dans cette suite :

$$N^{\nu=j} = \inf_{r\geq 1}\{N_r \ : \ \nu_r = j\}, \quad 1 \leq j \neq l \leq K-1.$$

Comme nous l'avons déjà dit, le critère d'optimalité doit favoriser la rapidité de détection/isolation, avec peu de fausses alarmes. En d'autres termes, le retard $\tau_l = N - t_0 + 1$ avec $N \geq t_0$ devrait être stochastiquement faible pour tout $l = 1, \ldots, K-1$, et $N^{\nu=j} = \inf_{r\geq 1}\{N_r \ : \ \nu_r = j\}$ devrait être stochastiquement grand pour chaque combinaison de numéros $j \neq l$. La solution optimale est un compromis entre ces deux exigences contradictoires.

Définition formelle des critères.

Critère A. Considérons le critère *minimax* suivant. Nous voulons que le *pire retard moyen de détection/isolation* :

$$\overline{\tau}^* = \sup_{t_0\geq 1, 1\leq l\leq K-1} \operatorname{esssup} E^l_{t_0}(N - t_0 + 1 | N \geq t_0, Y_1^{t_0-1}) \quad (7)$$

soit aussi faible que possible dans la classe

$$\mathcal{K}_\gamma = \left\{(N,\nu) : \min_{0\leq i\leq K-1} \min_{1\leq j\neq i\leq K-1} E_i\left(N^{\nu=j}\right) \geq \gamma\right\} \quad (8)$$

où γ est une valeur minimale, donnée *a priori*, des durées moyennes avant une fausse alarme ou une isolation erronée.

Critère B. Nous voulons que le *pire retard moyen de détection/isolation* (7) *soit aussi faible que possible* dans la classe

$$\mathcal{K}_{\gamma\gamma} = \left\{(N,\nu) : \min_{1\leq j\leq K-1} E_0\left(N^{\nu=j}\right) \geq \gamma_{\mathrm{f\,a}} \right. \quad (9)$$
$$\left. \min_{1\leq i\leq K-1} \min_{1\leq j\neq i\leq K-1} E_i\left(N^{\nu=j}\right) \geq \gamma_{\mathrm{f\,i}}\right\}$$

où $\gamma_{\mathrm{f\,a}}$ est une valeur minimale, donnée *a priori*, des durées moyennes avant une fausse alarme et $\gamma_{\mathrm{f\,i}}$ est une valeur minimale, donnée *a priori*, des durées moyennes avant une isolation erronée.

Critère C. Nous voulons que le *pire retard moyen de détection/isolation* (7) *soit aussi faible que possible* dans la classe

$$\mathcal{K}_{\gamma\beta} = \left\{(N,\nu) : \min_{1\leq j\leq K-1} E_0\left(N^{\nu=j}\right) \geq \gamma_{\mathrm{f\,a}} \right. \quad (10)$$
$$\left. \max_{1\leq i\leq K-1} \max_{1\leq j\neq i\leq K-1} \mathbf{P}_i(\nu = j \neq i) \leq \beta_{\mathrm{f\,i}}\right\}$$

où $\beta_{\mathrm{f\,i}}$ est une valeur maximale donnée *a priori* des probabilités de prise d'une isolation erronée.

Solution du problème. L'idée qui vient d'être exposée (voir la première partie) peut, au prix de quelques modifications être globalement exploitée pour *détecter et isoler* une rupture de type l dans la suite $(Y_t)_{t\geq 1}$. Maintenant, nous disposons d'un certain nombre d'hypothèses alternatives $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{K-1}$. Introduisons l'instant d'arrêt suivant [4, 5, 6]:

$$\tilde{N} = \min\{\tilde{N}^1, \ldots, \tilde{N}^{K-1}\} \quad (11)$$

et la décision finale

$$\tilde{\nu} = \operatorname{argmin}\{\tilde{N}^1, \ldots, \tilde{N}^{K-1}\}, \quad (12)$$

de l'algorithme de détection/isolation. En conséquence, l'instant d'arrêt $\tilde{N}^l$ correspond à l'hypothèse $\mathcal{H}_l$. Définissons $\tilde{N}^l$ par la formule suivante :

$$\tilde{N}^l = \inf_{k\geq 1} \tilde{N}^l(k) \quad (13)$$
$$\tilde{N}^l(k) = \inf\left\{t \geq k : \min_{0\leq j\neq l\leq K-1} \left[S_k^t(l,j) - h_{lj}\right] \geq 0\right\},$$
$$S_k^t(l,j) = \sum_{i=k}^{t} \ln \frac{p_l(Y_i)}{p_j(Y_i)}.$$

Propriétés statistiques. Les principaux résultats sont énoncés dans les théorèmes ci-dessous [4, 5, 6].

Théorème 3 (Critère B) *Soit $(\tilde{N}, \tilde{\nu})$. l'algorithme (11) - (13) et les seuils h_{lj} sont donnés par*

$$h_{lj} = \begin{cases} h_d & si \quad l = 1, \ldots, K-1 \ et\ j = 0 \\ h_i & si \quad j, l = 1, \ldots, K-1 \ et\ j \neq l \end{cases} . \quad (14)$$

Alors :

$$\begin{cases} \overline{\tau}_l^* & \sim \max\left\{\frac{\ln \overline{T}_{\mathrm{f\,a}}}{\rho_{l0}}, \frac{\ln \overline{T}_{\mathrm{f\,i}}}{\min_{1\leq j\neq l\leq K-1} \rho_{lj}}\right\} \\ \overline{\tau}^* & \sim \max\left\{\frac{\ln \overline{T}_{\mathrm{f\,a}}}{\rho^*_{\mathrm{f\,a}}}, \frac{\ln \overline{T}_{\mathrm{f\,i}}}{\rho^*_{\mathrm{f\,i}}}\right\} \end{cases} \quad (15)$$

$$lorsque \ \overline{T}_{\mathrm{f\,a}}, \overline{T}_{\mathrm{f\,i}} \to \infty, \quad \frac{\overline{T}_{\mathrm{f\,a}}}{\overline{T}_{\mathrm{f\,i}}} = const,$$

où $\rho^*_{\mathrm{f\,a}} = \min_{1\leq j\leq K-1} \rho_{j0}$, $\rho^*_{\mathrm{f\,i}} = \min_{1\leq l\leq K-1} \min_{1\leq j\neq l\leq K-1} \rho_{lj}$, $\overline{T}_{\mathrm{f\,a}}$ *est une valeur minimale donnée des durées moyennes avant une fausse alarme,* $\overline{T}_{\mathrm{f\,i}}$ *est une valeur minimale donnée des durées moyennes avant une isolation erronée.*

Corollaire 2 (Critère A) *Soit $(\tilde{N}, \tilde{\nu})$ l'algorithme (11) - (13) et $h_{lj} = h$. Alors :*

$$\begin{cases} \overline{\tau}_l^* & \sim \frac{\ln \overline{T}}{\min_{0\leq j\neq l\leq K-1} \rho_{lj}} \\ \overline{\tau}^* & \sim \frac{\ln \overline{T}}{\rho^*} \end{cases} \quad lorsque \ \overline{T} \to \infty, \quad (16)$$

où $\rho^* = \min_{1\leq l\leq K-1} \min_{0\leq j\neq l\leq K-1} \rho_{lj}$, $\overline{T}$ *est une valeur minimale donnée des durées moyennes avant une fausse alarme ou une isolation erronée.*

Théorème 4 (Critère C) *Soit $(\tilde{N}, \tilde{\nu})$ l'algorithme (11) - (13) et les seuils h_{lj} sont donnés dans (14). Alors :*

$$\begin{cases} \overline{\tau}_l^* & \sim \max\left\{\frac{\ln \overline{T}_{\mathrm{f\,a}}}{\rho_{l0}}, \frac{\ln\left(\overline{\tau}_l^* \beta_{\mathrm{f\,i}}^{-1}\right)}{\min_{1\leq j\neq l\leq K-1} \rho_{lj}}\right\} \\ \overline{\tau}^* & \sim \max\left\{\frac{\ln \overline{T}_{\mathrm{f\,a}}}{\rho^*_{\mathrm{f\,a}}}, \frac{\ln\left(\overline{\tau}^* \beta_{\mathrm{f\,i}}^{-1}\right)}{\rho^*_{\mathrm{f\,i}}}\right\} \end{cases} \quad (17)$$

$$lorsque \ \overline{T}_{\mathrm{f\,a}} \to \infty, \ \beta_{\mathrm{f\,i}} \to 0, \ \overline{T}_{\mathrm{f\,a}} \beta_{\mathrm{f\,i}} = const.$$

Théorème de l'optimalité. Les principaux résultats sont énoncés dans les théorèmes ci-dessous [4, 5, 6].

Théorème 5 (Critère B) *Considérons la classe $\mathcal{K}_{\gamma\gamma}$ (9). Supposons que $\mathcal{K}_{\gamma\gamma}$ n'est pas vide. Définissons la borne inférieure $n(\gamma)$ comme l'inf. du pire retard moyen de détection dans la classe $\mathcal{K}_{\gamma\gamma}$. Avec l'inégalité (6), il vient*

$$n(\gamma_{\mathrm{f\,a}}, \gamma_{\mathrm{f\,i}}) \sim \max\left\{\frac{\ln \gamma_{\mathrm{f\,a}}}{\rho^*_{\mathrm{f\,a}}}, \frac{\ln \gamma_{\mathrm{f\,i}}}{\rho^*_{\mathrm{f\,i}}}\right\} \quad (18)$$

$$lorsque \ \gamma_{\mathrm{f\,a}}, \gamma_{\mathrm{f\,i}} \to \infty, \quad \frac{\gamma_{\mathrm{f\,a}}}{\gamma_{\mathrm{f\,i}}} = const.$$

Corollaire 3 (Critère B)
L'algorithme de détection/isolation (11) - (13) est asymptotiquement optimal sur la classe $\mathcal{K}_{\gamma\gamma}$.

Corollaire 4 (Critère A) *Considérons la classe $\mathcal{K}_{\gamma}(8)$. Alors*

$$n(\gamma) \sim \frac{\ln \gamma}{\rho^*}, \quad lorsque \ \gamma \to \infty.$$

L'algorithme de détection/isolation (11) - (13) avec $h_{lj} = h$ est asymptotiquement optimal sur la classe $\mathcal{K}_{\gamma}$.

Théorème 6 (Critère C) *Considérons la classe $\mathcal{K}_{\gamma\beta}(10)$. Supposons que $\mathcal{K}_{\gamma\beta}$ n'est pas vide. Définissons la borne inférieure $n(\gamma)$ comme l'inf. du pire retard moyen de détection dans la classe $\mathcal{K}_{\gamma\beta}$. Avec l'inégalité (6), il vient*

$$n(\gamma_{\mathrm{f\,a}}, \beta_{\mathrm{f\,i}}) \sim \max\left\{\frac{\ln \gamma_{\mathrm{f\,a}}}{\rho^*_{\mathrm{f\,a}}}, \frac{\ln\left[n(\gamma_{\mathrm{f\,a}}, \beta_{\mathrm{f\,i}})\beta_{\mathrm{f\,i}}^{-1}\right]}{\rho^*_{\mathrm{f\,i}}}\right\} \tag{19}$$

$$lorsque \ \gamma_{\mathrm{f\,a}} \to \infty, \ \ \beta_{\mathrm{f\,i}} \to 0, \ \ \gamma_{\mathrm{f\,a}}\beta_{\mathrm{f\,i}} = const.$$

Corollaire 5 (Critère C)
L'algorithme de détection/isolation (11) - (13) est asymptotiquement optimal sur la classe $\mathcal{K}_{\gamma\beta}$.

3. Comparaison entre deux stratégies

Modèle. Soit $(Y_t)_{t\geq 1}$ une suite indépendante gaussienne :

$$\mathcal{L}(Y_t) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{N}(\theta_0, \sigma^2 I) & \text{si} \quad t < t_0 \\ \mathcal{N}(\theta_l, \sigma^2 I) & \text{si} \quad t \geq t_0 \end{array} \right. ,$$

où $Y_t \in \mathbf{R}^{K-1}$, $\theta_0 = 0$, $\theta_l^T = (0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)$ et $\delta > 0, \sigma^2$ sont des valeurs connues.

Stratégie non-séquentielle du diagnostic. Le principe de l'algorithme non-séquentiel (avec la taille de l'echantillon fixe) repose sur l'idée du test d'hypothèses multiples (*K-slippage problem*) [2]. Introduisons l'instant d'arrêt et la décision finale suivants [7]

$$\overline{N} = \inf_{n \geq 1}\left\{nm : S_{(n-1)m+1}^{nm} \geq h\right\} \tag{20}$$

$$\overline{\nu} = \arg \max_{1 \leq l \leq K-1} S_{(n-1)m+1}^{nm}(l, 0) \tag{21}$$

où $S_1^m = \max_{1\leq l\leq K-1} S_1^m(l,0)$, $S_1^m(l,0) = \sum_{i=1}^m \ln \frac{p_\delta(y_{li})}{p_0(y_{li})}$, $p_\theta(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}$.

Théorème 7 *Soit $(\overline{N}, \overline{\nu})$ l'algorithme du diagnostic (20) - (21). Il en résulte :*

$$\overline{\tau}^* = \frac{\sigma^2(x-y)^2}{\delta^2\left\{1 - [1-\Phi(y)][1-\Phi(x)]^{K-2}\right\}} + \frac{\sigma^2(x-y)^2}{\delta^2} - 1,$$

où $m_\rho = m\frac{\delta^2}{2\sigma^2}$, $x = \frac{h+m_\rho}{\sqrt{2m_\rho}}$, $y = \frac{h-m_\rho}{\sqrt{2m_\rho}}$, $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

$$\overline{T}_{\mathrm{f\,a}} = \frac{\sigma^2(x-y)^2(K-1)}{\delta^2\left\{1 - [1-\Phi(x)]^{K-1}\right\}}.$$

$$\underline{T}_{\mathrm{f\,a}} \leq \overline{T}_{\mathrm{f\,i}} \leq \tilde{T}_{\mathrm{f\,i}},$$

où

$$\tilde{T}_{\mathrm{f\,i}} = \frac{\sigma^2(x-y)^2}{\delta^2\Phi(x)[1-\Phi(y)][1-\Phi(x)]^{K-3}}.$$

$$\underline{\beta}_{\mathrm{f\,i}} \leq \beta_{\mathrm{f\,i}} \leq \overline{\beta}_{\mathrm{f\,i}},$$

où

$$\underline{\beta}_{\mathrm{f\,i}} = \frac{\Phi(x)[1-\Phi(y)][1-\Phi(x)]^{K-3}}{1-[1-\Phi(y)][1-\Phi(x)]^{K-2}},$$

$$\overline{\beta}_{\mathrm{f\,i}} = \frac{1-[1-\Phi(x)]^{K-1}}{(K-1)\left\{1-[1-\Phi(y)][1-\Phi(x)]^{K-2}\right\}}.$$

Comparaison. Considérons le cas $K = 2$. Le pire retard moyen de détection de l'algorithme non-séquentiel est défini par l'équation asymptotique suivante [7]

$$\overline{\tau}^*_{K=2} \sim 2\frac{\ln \overline{T}}{\rho(\delta)} \quad \text{quand} \ \overline{T} \to \infty,$$

où $\rho(\delta) = \frac{\delta^2}{2\sigma^2}$. Considérons le critère A et le cas général ($K \geq 2$). Pour l'algorithme non-séquentiel l'inégalite suivante est vraie :

$$\begin{array}{rcl} \overline{\tau}^*_{K\geq 2} & \leq & \dfrac{\sigma^2(x-y)^2}{\delta^2\Phi(y)} + \dfrac{\sigma^2(x-y)^2}{\delta^2} - 1 \\ \overline{T} & \geq & \dfrac{\sigma^2(x-y)^2}{\delta^2\Phi(x)} \end{array}$$

et donc a lieu l'inégalite suivante asymptotique :

$$(\overline{N}, \overline{\nu}) \ : \ \overline{\tau}^*_{K\geq 2} \leq \overline{\tau}^*_{K=2} \sim 2\frac{\ln \overline{T}}{\rho(\delta)} \quad \text{quand} \ \overline{T} \to \infty.$$

Soit $(\tilde{N}, \tilde{\nu})$ l'instant d'arrêt et la décision finale de l'algorithme séquentiel (11) - (13) et les seuils $h_{lj} = h$. La valeur minimale de la "distance" Kullback-Leibler pour le modèle ci-dessus est donné par $\rho^* = \rho(\delta) = \frac{\delta^2}{2\sigma^2}$. Alors

$$(\tilde{N}, \tilde{\nu}) \ : \ \overline{\tau}^*_{K\geq 2} \sim \frac{\ln \overline{T}}{\rho(\delta)} \quad \text{quand} \ \overline{T} \to \infty.$$

Références bibliographiques

[1] Basseville M., and Nikiforov, I.V. (1993), *Detection of abrupt changes. Theory and applications*, Prentice Hall, Information and System Sciences Series.

[2] Ferguson, T.S. (1967) *Mathematical statistics. A decision theoretic approach*, Academic Press, New York and London.

[3] Lorden, G. (1971) Procedures for reacting to a change in distribution, *Annals Math. Statistics*, 42, 1897-1908.

[4] Nikiforov, I.V. (1994) Sequential optimal detection and isolation of faults in systems with random disturbances, American Control Conference, June 29 - July 1 1994, v.2, 1853-1857.

[5] Nikiforov, I.V. (1995) A generalized change detection problem, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 1, January, 1995.

[6] Nikiforov, I.V. (1995) On two new criteria of optimality for the problem of sequential change diagnosis, American Control Conference, June 22 - 23, 1995.

[7] Nikiforov, I.V. (1995) Comparison between sequential and fixed sample strategies in the problem of change diagnosis, American Control Conference, June 21 - June 23, 1995.

[8] Page, E.S. (1954) Continuous inspection schemes, *Biometrika*, 41, 100-115.