



CARACTÉRISTIQUES OPÉRATIONNELLES DE RÉCEPTION D'UNE CLASSE DE DÉTECTEURS DU SUP

E. VILLIER, G. VEZZOSI

Laboratoire de Traitement du Signal et de l'Image,
Université de Rennes 1, 35042 Rennes Cedex

Résumé. Le but de cette communication est d'établir les caractéristiques opérationnelles de réception d'une classe de détecteurs du sup dans le cas gaussien. La probabilité de fausse alarme est obtenue à partir d'une approche géométrique du problème mettant en jeu le calcul du volume d'un tube à la surface de la sphère unité. La probabilité de détection est établie plus classiquement par un développement quadratique de la fonction marginale. Les approximations supposent une valeur élevée du seuil pour la fausse alarme, et un rapport signal à bruit suffisamment fort pour la probabilité de détection. Les formules approchées obtenues sont ensuite appliquées à un détecteur utilisant la plus grande valeur propre d'une matrice de Wishart, ce qui permet de retrouver un résultat connu, puis à la formation de voies et à un détecteur de sinusoïde amortie.

1. Introduction

Dans cette communication on établit les caractéristiques opérationnelles de réception d'une classe de détecteurs définis par :

$$\sup_{\underline{\theta}} |\Pi_{\underline{\theta}} \underline{x}|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} s,$$

où H_1 est l'hypothèse signal présent, H_0 l'hypothèse bruit seul, s le seuil du détecteur, \underline{x} le vecteur d'observation et $\{\Pi_{\underline{\theta}}\}$ une famille de projecteurs de même rang indexés continûment par un vecteur de paramètres $\underline{\theta}$. Le bruit est supposé blanc, gaussien, centré et de puissance moyenne unité, les signaux traités étant réels.

L'évaluation des performances en détection de tels détecteurs revient à étudier les probabilités de dépassement sous H_0 et sous H_1 du sup de formes quadratiques de gaussiennes non indépendantes, dans le cas particulier où ces formes quadratiques sont des projecteurs orthogonaux. Le problème se rencontre notamment dans les cas suivants : détection d'un signal déterministe imparfaitement connu, détecteur effectuant une formation de voies, détecteur basé sur la plus grande valeur propre d'une matrice de Wishart.

Si la résolution du problème sous H_1 ne pose pas de difficulté particulière pourvu que le rapport signal à bruit soit suffisamment fort, il en va tout autrement sous H_0 . La loi marginale du test est un χ^2 , mais l'opération de sup modifie fortement cette statistique. De même, si les formes quadratiques sont indépendantes la solution du problème est évidente, mais

Abstract. The aim of this communication is to give the receiver operating characteristics of a class of detectors in the gaussian case. These detectors take the supremum of a quadratic form when this form is an orthogonal projector. Through a geometrical statement of the problem, the false alarm probability is assessed by using the volume of a tube in the n -dimensional spherical space. The detection probability is obtained in a more classical way by a quadratic expansion. The approximated formulae are valid provided that the threshold and the signal to noise ratio are sufficiently high for the P_{fa} and the P_d respectively. These results are applied to three examples : a detector based on the largest eigenvalue of a Wishart matrix, a beamforming detector and a maximum likelihood detector of a damped sinusoid.

pour les trois exemples précédents une telle hypothèse est inacceptable.

Dans le cas particulier où $\underline{\theta}$ est réduit à un scalaire, l'étude des dépassements d'un processus aléatoire [1] permet de déterminer la probabilité de fausse alarme en fonction du seuil du détecteur. Les calculs sont généralement compliqués et doivent être recommencés dans chaque cas particulier de détection. Le résultat exposé ici est valable pour un nombre *a priori* quelconque de paramètres et pour des probabilités de dépassement faibles.

2. Probabilité de fausse alarme

La probabilité de fausse alarme est définie par :

$$P_{fa}(s) = P(\sup_{\underline{\theta}} |\Pi_{\underline{\theta}} \underline{x}|^2 > s).$$

L'observation \underline{x} est un vecteur aléatoire gaussien centré, élément de \mathbb{R}^n , de matrice de covariance l'identité. Les projecteurs sont de rang k et indexés par le vecteur $\underline{\theta}$ élément de \mathbb{R}^p .

On pose $r = |\underline{x}|^2$. A $\underline{\theta}$ fixé, la probabilité de dépassement conditionnelle à r vaut :

$$P_{fa}(s|r) = P(|\Pi_{\underline{\theta}} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}|^2 > \frac{s}{r} | r), \quad (1)$$

où le vecteur $\underline{x}/|\underline{x}|$ est équiréparti sur S^{n-1} la sphère unité de \mathbb{R}^n

Lorsque $\underline{\theta}$ varie, l'intersection de $\text{span}(\Pi_{\underline{\theta}})$ avec S^{n-1} définit une variété C_d de dimension $d = k + p - 1$. L'ensemble des vecteurs \underline{x} qui réalisent l'événement (1) est l'ensemble des



points de S^{n-1} situés au plus à une certaine distance ϕ d'un point de C_d . C'est la définition même d'un tube de rayon ϕ relativement à C_d sur S^{n-1} [2].

La métrique utilisée étant la métrique intrinsèque de la sphère, la distance entre deux points de S^{n-1} est la longueur de l'arc de grand cercle passant par ces deux points. Ceux-ci étant sur la sphère unité, la distance qui les sépare est également l'angle entre les deux vecteurs dont ils sont l'extrémité. Le rayon ϕ du tube est alors tel que $\tan \phi = \sqrt{r/s-1}$.

Remarque. Pour une étude rigoureuse des entités mathématiques que sont les variétés différentielles et les tubes, on pourra se reporter à [3]. Pratiquement, il nous suffira d'avoir une paramétrisation de cette variété.

On définit ensuite la probabilité de dépassement conditionnelle par le rapport entre le volume du tube et le volume de la sphère unité:

$$Pfa(s|r) = Vol(Tube(\phi)) / Vol(S^{n-1}). \quad (2)$$

L'essentiel du problème se résume au calcul du volume d'un tube sur S^{n-1} . Weyl [4] a résolu ce problème pour une dimension quelconque de la variété, généralisant ainsi le résultat de Hotelling [2] pour $d=1$, et établi des résultats remarquables en termes d'invariants sur le volume des tubes. Nous avons repris la technique décrite dans [4] relative au calcul du volume d'un tube pour aboutir aux formules explicites suivantes [5].

On note $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point de la variété paramétré par $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$, $\dot{\underline{x}} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dots \ \dot{x}_d]$ la matrice (n, d) où \dot{x}_i vaut pour $\partial \underline{x} / \partial u_i$ et $\underline{g} = G(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_d) = \dot{\underline{x}}^T \dot{\underline{x}}$ le gramien des dérivées de \underline{x} . $S^{n-1} = \{ \underline{z} \in \mathbb{R}^n, |\underline{z}| = 1 \}$ est la sphère unité de \mathbb{R}^n , de volume $Vol(S^{n-1}) = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2)$.

Le volume $V(\phi)$ du tube est alors une somme de $1 + [d/2]$ termes dont les deux premiers sont :

$$V(\phi) = Vol(S^{m-1}) [k_0 J_0(\phi) + k_2 J_2(\phi) + \dots], \quad (3)$$

$$\text{où } k_0 = \int_{C_d} \sqrt{\det \underline{g}} \, d\underline{u}, \quad k_2 = \frac{1}{2} \int_{C_d} \sqrt{\det \underline{g}} (T_1 - T_2) \, d\underline{u},$$

$$J_0(\phi) = \int_0^{\tan \phi} \frac{a^{m-1}}{(1+a^2)^{n/2}} da, \quad J_2(\phi) = \frac{1}{m} \int_0^{\tan \phi} \frac{a^{m+1}}{(1+a^2)^{n/2}} da,$$

$$T_1 = \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} g^{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \ddot{\underline{x}}_{\alpha\beta}^T \Pi \ddot{\underline{x}}_{\alpha'\beta'}, \quad T_2 = \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} g^{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \ddot{\underline{x}}_{\alpha\alpha'}^T \Pi \ddot{\underline{x}}_{\beta\beta'},$$

$$m = n - d - 1, \quad \underline{g}^{-1} = (g^{\alpha\beta}) \text{ et } \Pi = I - \underline{x}\underline{x}^T - \dot{\underline{x}}\dot{\underline{x}}^{-1}\dot{\underline{x}}^T.$$

Remarque. Pour $d=1$ le premier terme de la relation (3) donne le volume exact du tube, k_0 étant le volume de la variété. Dans le cas d'une variété de dimension 2, la relation (3) est aussi exacte. Ceci est vrai uniquement pour une variété fermée. Si celle-ci comporte des bords, il faut tenir compte du volume du tube à ces extrémités [2]. Si le rayon du tube est petit devant un, les intégrales définissant les coefficients J_e admettent un développement en série par rapport à ϕ . Le volume du tube est alors une série entière en ϕ dont les deux termes de plus bas degré se déduisent aisément à partir de J_0 et J_2 . L'expression (3) est alors une formule approchée du volume du tube, d'autant meilleure que le rayon est petit.

La probabilité de fausse alarme est obtenue en moyennant la probabilité conditionnelle (2) par la densité de r qui suit par définition une loi χ_n^2 . Ceci conduit à :

$$Pfa(s) = \frac{1}{2\pi^{(d+1)/2}} \left[k_0 \Gamma\left(\frac{d+1}{2}, \frac{s}{2}\right) + \frac{1}{2} k_2 \Gamma\left(\frac{d-1}{2}, \frac{s}{2}\right) \right], \quad (4)$$

où $\Gamma(a, x) = \int_x^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ est la fonction gamma incomplète.

Pour un seuil élevé, une expression simple de la fausse alarme est donnée par le développement asymptotique de la fonction gamma. En conservant les deux termes de plus haut degré de ce développement, on obtient finalement :

$$Pfa(s) = \frac{1}{2\pi^{(d+1)/2}} \left(\frac{s}{2}\right)^{(d-1)/2} e^{-s/2} [k_0 + ((d-1)k_0 + k_2)/s], \quad (5)$$

k_0 et k_2 étant définis en (3).

3. λ_{\max} d'une matrice de Wishart

Soit A une matrice d'ordre N définie comme la somme de K dyades :

$$A = \sum_{k=1}^K \underline{x}_k \underline{x}_k^T,$$

où les \underline{x}_k sont des vecteurs aléatoires gaussiens indépendants, centrés et de même matrice de covariance Σ . La matrice A possède alors une distribution de Wishart à K degrés de liberté, de matrice de covariance Σ , notée $W_N(K, \Sigma)$. De plus, cette distribution admet une densité si et seulement si $K \geq N$.

On s'intéresse à la probabilité pour que la plus grande valeur propre λ_{\max} de A soit supérieure à un seuil quand la matrice de covariance Σ vaut l'identité. On dispose de plusieurs expressions, exactes ou approchées, permettant de connaître théoriquement la loi du λ_{\max} . Pratiquement on se heurte cependant à deux difficultés. Soit l'on utilise la loi conjointe des valeurs propres, loi exacte mais qui nécessite d'être intégrée $N-1$ fois pour obtenir la densité marginale de la plus grande valeur propre, soit l'on utilise la loi asymptotique du λ_{\max} , obtenue en laissant tendre le nombre de dyades vers l'infini. Ceci revient à faire une approximation gaussienne sur les éléments de A et conduit à des résultats faux pour le domaine qui nous intéresse, à savoir celui des probabilités de dépassement faibles.

La relation (5) peut être utilisée pour traiter ce problème. On sait en effet que le quotient de Rayleigh défini ci-dessous atteint son sup pour le λ_{\max} :

$$\lambda_{\max} = \sup_{|\underline{\theta}|=1} \underline{\theta}^T A \underline{\theta}.$$

Définissons alors $\Pi_{\underline{\theta}} = I_K \otimes \underline{\theta}\underline{\theta}^T$ et $\underline{x} = [\underline{x}_1^T \ \underline{x}_2^T \ \dots \ \underline{x}_K^T]^T$,

où l'opérateur \otimes désigne le produit de Kronecker de deux matrices. Le problème s'écrit alors :

$$P(\lambda_{\max} > s) = P(\sup_{|\underline{\theta}|=1} |\Pi_{\underline{\theta}} \underline{x}|^2 > s).$$

Le projecteur est de rang K et peut s'écrire sous la forme $\Pi_{\underline{\theta}} = U U^T$ où $U = I_K \otimes \underline{\theta}$. Le vecteur $\underline{\theta}$ décrit la demi-sphère S^{K-1} évitant ainsi de compter deux fois les mêmes points. Alors tout point \underline{x} de la variété C_d vérifie $\underline{x} = U \underline{a}$ où \underline{a} est paramétré comme S^{K-1} . La variété est de dimension $d = K + N - 2$.



On montre sans difficulté particulière que le gramien $\mathbf{g} = \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}}$ est diagonal en utilisant le fait que le gramien des $m-1$ dérivées d'un vecteur de \mathbb{R}^m paramétré comme S^{m-1} est diagonal. Les résultats sont alors remarquablement simples puisque :

$$k_0 = 1/2 \int_{C_d} \sqrt{\det \mathbf{g}} = \text{Vol}(S^{N-1}) \text{Vol}(S^{K-1}). \quad (6)$$

$$\text{et} \quad k_2 = -(K-1)(N-1)k_0. \quad (7)$$

Le report de (6) et (7) dans (5) amène :

$$P(\lambda_{\max} > s) = \frac{\sqrt{\pi} e^{-s/2}}{\Gamma(\frac{K}{2}) \Gamma(\frac{N}{2})} \left(\frac{s}{2}\right)^{(K+N-3)/2} [1 - (K-2)(N-2)/s].$$

La loi conjointe exacte [6, p.107] des valeurs propres d'une matrice $W_N(K, I)$ peut s'écrire, à un terme exponentiel près, comme un polynôme en λ_{\max} . En ne retenant de ce polynôme que les deux termes de plus haut degré, on vérifie que l'intégration de cette loi pour $\lambda_{\max} \rightarrow +\infty$ conduit à la même relation.

4. Fausse alarme de la formation de voies

On considère une antenne à N capteurs, de géométrie quelconque. L'origine du repère cartésien (Oxyz) est choisie au centre de phase du réseau, c'est-à-dire telle que

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{r}(n) = \mathbf{0},$$

où $\mathbf{r}(n)$ est la position du capteur n . A la longueur d'onde λ , le vecteur source normé à un s'écrit :

$$\underline{\mathbf{d}} = \left(\exp(i2\pi \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{r}(n) / \lambda) / \sqrt{N}, n = 1..N \right),$$

où $\underline{\mathbf{u}} = [\cos \theta \sin \psi \quad \sin \theta \sin \psi \quad \cos \psi]^T$, θ , ψ étant les angles de gisement et de site respectivement.

La probabilité de fausse alarme d'un détecteur effectuant une formation de voies est :

$$Pfa(s) = P(\sup_{\theta, \psi} \underline{\mathbf{d}}^\dagger \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\dagger \underline{\mathbf{d}} > Ks), \quad (8)$$

où les \mathbf{x}_k sont des vecteurs aléatoires complexes circulaires, indépendants, gaussiens, centrés et de matrice de covariance l'identité, le bruit étant supposé décorréolé de capteur à capteur.

En interprétant la formation de voies comme une projection, la relation (5) permet de calculer la probabilité de fausse alarme de ce détecteur. On passe du cas complexe au cas réel en notant que le projecteur complexe $\underline{\mathbf{d}} \underline{\mathbf{d}}^\dagger$ peut être représenté de façon équivalente par le projecteur réel $\underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{u}}^T + \underline{\mathbf{v}} \underline{\mathbf{v}}^T$ avec

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Re(\underline{\mathbf{d}}) \\ \Im(\underline{\mathbf{d}}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -\Im(\underline{\mathbf{d}}) \\ \Re(\underline{\mathbf{d}}) \end{bmatrix}.$$

On pose $\mathbf{U} = \mathbf{I} \otimes \underline{\mathbf{u}}$, $\mathbf{V} = \mathbf{I} \otimes \underline{\mathbf{v}}$ et $\mathbf{\Pi} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T + \mathbf{V} \mathbf{V}^T$, puis :

$$\underline{\mathbf{x}} = \sqrt{2} [\Re(\mathbf{x}_1^T) \quad \Im(\mathbf{x}_1^T) \dots \Re(\mathbf{x}_K^T) \quad \Im(\mathbf{x}_K^T)].$$

Alors $\mathbf{E} \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^T = \mathbf{I}_{2K}$ et le problème (8) est équivalent à :

$$Pfa(s) = P(\sup_{\theta, \psi} |\mathbf{\Pi} \underline{\mathbf{x}}|^2 > 2Ks),$$

la dépendance en (θ, ψ) du projecteur étant omise dans la notation.

Probabilité de fausse alarme. On appellera cas 2D le cas général où gisement et site interviennent dans la formation de voies, et cas 1D celui où un seul des paramètres est pris en compte. Le projecteur $\mathbf{\Pi}$ est de rang $2K$. La variété C_d est donc de dimension $d = 2K + 1$ dans le cas 2D et $d = 2K$ dans le cas 1D. Tout point $\underline{\mathbf{x}}$ de la variété vérifie $\underline{\mathbf{x}} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{V}] \underline{\mathbf{a}}$ où $\underline{\mathbf{a}}$ est paramétré comme la sphère unité de \mathbb{R}^{2K} . Si le calcul du volume de la variété k_0 ne pose pas de problème, celui du terme k_2 est plus fastidieux. Le résultat est cependant d'une grande simplicité puisque l'on obtient tout calcul fait [5] :

$$Pfa_{1D}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(K)} (Ks)^{K-1/2} \exp(-Ks) \int |\dot{\underline{\mathbf{d}}}_\theta| d\theta, \quad (9)$$

$$Pfa_{2D}(s) = \frac{1}{\pi \Gamma(K)} (Ks)^K \exp(-Ks) [1 - (K - \frac{1}{2}) / (Ks)] \times \iint \sqrt{\det G(\dot{\underline{\mathbf{d}}}_\theta, \dot{\underline{\mathbf{d}}}_\psi)} d\theta d\psi. \quad (10)$$

Les intégrales restant à calculer dans ces expressions ne dépendent que de la géométrie de l'antenne et sont directement liées à sa limite de Rayleigh [5].

Application. Prenons une antenne linéaire à pas constant le long de l'axe (Ox). La distance intercapteurs est d . Le module au carré du vecteur source vaut alors :

$$|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_\theta|^2 = (2\pi d / \lambda)^2 \sin^2 \theta (N^2 - 1) / 12.$$

L'intégration sur $[0, \pi]$ et le report du résultat dans (9) amène :

$$Pfa(s) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(K)} \frac{d}{\lambda} \sqrt{\frac{N^2 - 1}{3}} (Ks)^{K-1/2} \exp(-Ks). \quad (11)$$

La figure 1 permet de comparer la probabilité de fausse alarme prévue par (11) à celle mesurée dans les conditions suivantes : $N = 8$, $K = 100$ et $d = \lambda / 2$.

Antenne cylindrique. L'antenne est composée d'un empilement de L antennes circulaires de rayon R comportant chacune M capteurs équirépartis. L'axe du cylindre est orienté selon (Oz), chaque antenne circulaire étant coplanaire à (Oxy). La distance entre chaque cercle est d .

En posant $a = (2\pi R / \lambda)^2 / 2$ et $b = (2\pi d / \lambda)^2 (L^2 - 1) / 12$, les produits scalaires des dérivées du vecteur source s'écrivent :

$$|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_\theta|^2 = a \sin^2 \psi, \quad |\dot{\underline{\mathbf{d}}}_\psi|^2 = a \cos^2 \psi + b \sin^2 \psi \quad \text{et} \quad \dot{\underline{\mathbf{d}}}_\theta^\dagger \dot{\underline{\mathbf{d}}}_\psi = 0,$$

$$\text{d'où} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\det G(\dot{\underline{\mathbf{d}}}_\theta, \dot{\underline{\mathbf{d}}}_\psi)} d\theta d\psi = 2\pi I,$$

$$\text{avec} \quad I = a + \frac{b}{\sqrt{b/a - 1}} \arcsin \sqrt{1 - a/b} \quad \text{si } a < b,$$

$$I = a + \frac{b}{\sqrt{1 - b/a}} \operatorname{argth} \sqrt{1 - b/a} \quad \text{si } a > b,$$

et $I = 2a$ si $a = b$.

La probabilité de fausse alarme est alors donnée par :

$$Pfa(s) = \frac{2I}{\Gamma(K)} (Ks)^K \exp(-Ks) [1 - (K - \frac{1}{2}) / (Ks)]. \quad (12)$$



En prenant $L = 3$, $M = 5$, $K = 100$, $d = \lambda / 2$ et $4\pi R = \lambda M$, l'intégrale I vaut approximativement $I \approx 8.2$. La fausse alarme correspondante est représentée figure 2.

Les prévisions théoriques et les simulations sont en excellent accord. A titre de comparaison la loi marginale représentée sur les deux figures sous-estime la probabilité de fausse alarme d'un facteur 100 environ.

5. Probabilité de détection

On suppose que sous H_1 l'observation s'écrit $\underline{x} = \underline{s} + \underline{b}$ où \underline{s} est un signal déterministe imparfaitement connu dont la dépendance en le vecteur de paramètres $\underline{\theta}$ est omise dans la notation. Le bruit est blanc, gaussien, centré, de variance unité. On définit le rapport signal à bruit δ comme le rapport entre l'énergie du signal et la puissance moyenne du bruit, soit $\delta = |\underline{s}|^2$. La probabilité de détection est définie par :

$$Pd(s) = P(\sup_{\underline{\theta}} f(\underline{\theta}) > s), \text{ où } f(\underline{\theta}) = |\Pi_{\underline{\theta}} \underline{x}|^2.$$

Si le rapport signal à bruit est suffisamment fort, la fonction $f(\underline{\theta})$ atteint son sup pour $\underline{\theta}$ proche de $\underline{\theta}_0$. Dans le cas où $\underline{\theta}$ est réduit à un scalaire, en remplaçant f par son développement quadratique on obtient :

$$\sup_{\theta} f(\theta) = f(\theta_0) - \frac{[f'(\theta_0)]^2}{2 f''(\theta_0)},$$

où $f(\theta_0)$ suit un $\chi_k^2(\delta)$, k étant le rang du projecteur et δ le paramètre de décentrage. De plus on montre sans difficulté particulière que, à fort RSB, $f'(\theta_0) \approx 2 \underline{s}^T \Pi_{\theta_0} \underline{b}$ et $f''(\theta_0) \approx -2 \underline{s}^T \Pi_{\theta_0}^2 \underline{s}$. En première approximation $f''(\theta_0)$ se comporte donc comme une constante vis-à-vis de $f'(\theta_0)$, et le terme $-[f'(\theta_0)]^2 / 2 f''(\theta_0)$ suit une loi du χ_1^2 . Si $\underline{\theta}$ est un vecteur d'ordre p , ce résultat se généralise à un χ_p^2 . On montre enfin qu'en première approximation les variables aléatoires $f(\theta_0)$ et $f'(\theta_0)$ sont indépendantes. La probabilité de détection vaut donc :

$$Pd(s) = P(\chi_{k+p}^2(\delta) > s),$$

k étant le rang du projecteur, p le nombre de paramètres qui l'indexent et δ le rapport signal à bruit.

Essais. On considère le problème de la détection d'une fréquence amortie. Le détecteur du maximum de vraisemblance consiste à projeter l'observation dans une famille de sous-espaces engendrés par le modèle de signal $s(n) = \rho^n \cos(\omega n)$ pour $n = 0 \dots N-1$. Le signal choisi correspond à $s_0(n) = \rho_0^n \cos(\omega_0 n + \psi_0)$ avec $\psi_0 = 0.7$, $\omega_0 = 2\pi \times 0.18$, $\rho_0 = 0.96$ et $N = 64$. L'amortissement ρ décrit l'intervalle $[0.8, 1]$ par pas de 0.01 et la pulsation ω l'intervalle $[2\pi / N, \pi - 2\pi / N]$. Les FFT sont calculées sur 2 048 points. Le nombre de tirages aléatoires est de 5 000. Les résultats sont représentés figure 3, le seuil étant réglé pour une Pfa de 10^{-3} .

6. Conclusion

Des formules approchées donnant la probabilité de fausse alarme en fonction du seuil et la probabilité de détection en fonction du rapport signal à bruit ont été établies pour une classe de détecteurs du sup. Elles permettent notamment d'évaluer les performances de la formation de voies et d'un détecteur d'un signal déterministe imparfaitement connu.

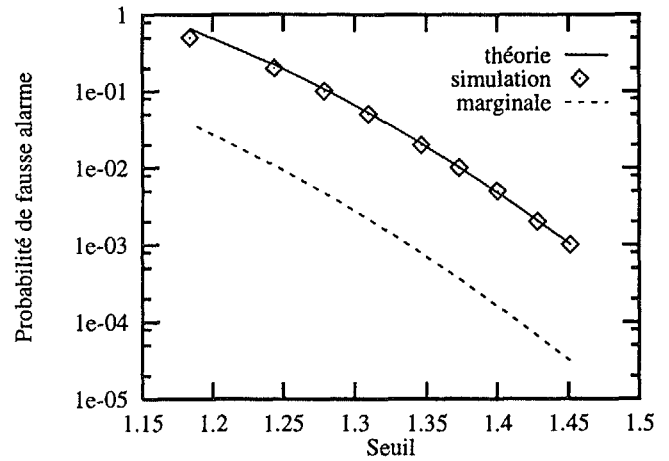


Figure 1 : Pfa d'une antenne linéaire

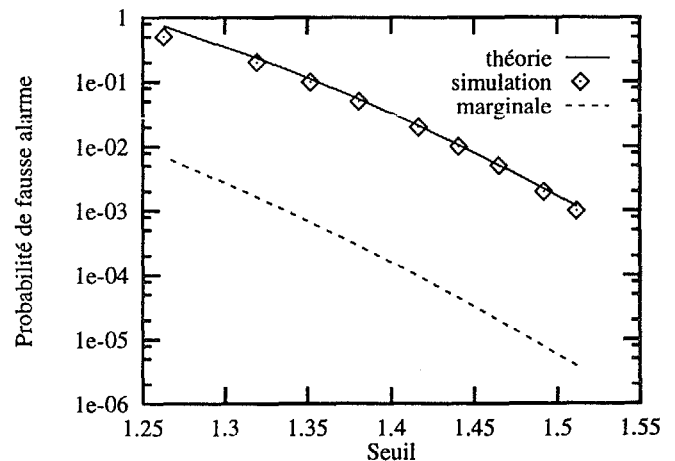


Figure 2 : Pfa d'une antenne cylindrique

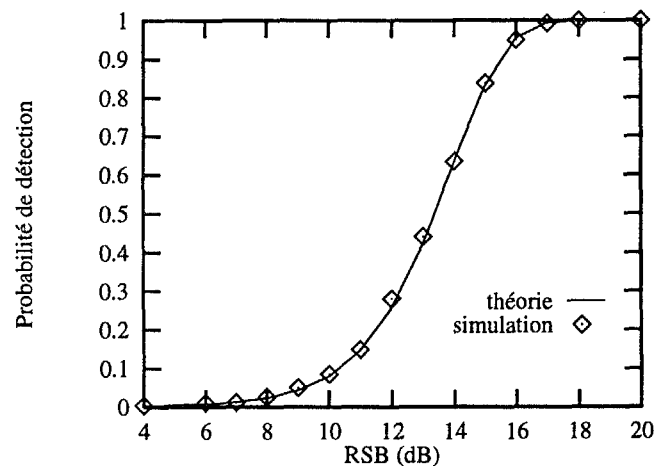


Figure 3 : Pd dans le cas d'une sinusoïde amortie - Pfa = 10^{-3} .

RÉFÉRENCES

- [1] B. Lévine, *Fondements de la radiotechnique statistique*, Tome I, Chapitre 10, Editions Mir, Moscou, 1973.
- [2] H. Hotelling, *Tubes and spheres in n-spaces, and a class of statistical problems*, Am. J. of Math., 61, p. 440-460, 1939.
- [3] M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF, Paris, 1987.
- [4] H. Weyl, *On the volume of tubes*, American Journal of Mathematics, 61, p. 461-472, 1939.
- [5] E. Villier, *Contribution aux méthodes à sous-espaces en traitement du signal*, Thèse de l'Université de Rennes 1, 1995.
- [6] R.J. Muirhead, *Aspects of multivariate statistical theory*, John Wiley & Sons, New York, 1982.