PROCESSUS et VECTEURS COMPLEXES ELLIPTIQUES

Patrick DUVAUT

ENSEA - ETIS - Groupe Signal - 6 avenue du Ponceau 95014 Cergy-Pontoise cedex
Tél : 30 73 66 10 ; Télécopie : 30 73 66 27 ; email : duvaut@ensea.fr

RESUME

Non circulaires à l'ordre 2, les signaux complexes elliptiques admettent une caractéristique complémentaire à la fonction de covariance traditionnelle : la covariance elliptique. Il est établi que tout processus elliptique harmonisable se décompose en la somme d'un processus anlytique et d'un autre anti-analytique décorrélés dans le cas stationnaire et de corrélations elliptiques respectives nulles, toujours sous hypothèse de stationnarité. La corrélation elliptique résulte de la corrélation classique entre les accroissements fréquentiels du processus analytique et les conjugués hermitiques de la composante anti-analytique. La séparation de signaux elliptiques "tricovariants" ainsi que la modélisation autorégressive elliptiques sont détaillées. Deux formes de la densité de probabilité de vecteurs gaussiens complexes elliptiques sont élaborées. L'une compacte, conduit aux structures des détecteurs-estimateurs bayésiens elliptiques, l'autre factorisée permet d'exprimer simplement les perfomances (ex : matrice de Fischer) de procédés elliptiques en fonction de leurs versions circulaires.

ABSTRACT

Elliptical processes are second-order non circular signals. Besides the classical covariance function, they are characterized by the elliptical covariance. It is shown that any harmonisable elliptical process may be splitted into the sum of an analytic and an anti-analytic processes which are uncorrelated in the stationary case and the elliptical covariances of which are vanishing, still under stationarity assumption. The elliptical correlation reflects the classical correlation between frequency increases of the analytic part and hermitian conjugates of the anti-analytic frequency components. Sources separation of tricovariant elliptical processes is detailed. Elliptical AR modelling is addressed.. Two forms of the probability density of complex gaussian elliptical vectors are derived. The compact structure enables to find explicit forms of bayesian elliptical detectors and estimators. The factorized form connects simply elliptical to circular criteria of performance (ex : Fischer matrix).

1. SIGNAUX COMPLEXES ELLIPTIQUES

1.1. Notations - Hypothèses

Les processus z(t) pris en considération dans toute la suite sont à réalisations complexes dans $\mathcal{C}$, à argument t continu dans $\mathcal{R}$ et admettent une représentation harmonique en moyenne quadratique (*hypothèse H1*) :

$$z(t) \overset{m.q.}{=} \int \exp(j2\pi ft)\, dZ(f) \qquad (1)$$

On suppose d'autre part que les accroissements fréquentiels dZ(f) sont continus en moyenne quadratique au voisinage de la fréquence nulle (*hypothèse H2*) ainsi que centrés (*hypothèse H3*).

1.2. Signaux et covariance elliptiques

D1. Sous H1, la quantité

$$R_z(t,t') \overset{\Delta}{=} E[z(t)z(t')] \qquad (2)$$

existe (il suffit d'appliquer l'inégalité de Schwartz à $E[z(t)(z^*(t'))^*]$ et de prendre en compte (1) pour s'en convaincre) *et est appelée covariance elliptique.*

$R_z(t,t')$ ne diffère de la covariance :

$$\Gamma_z(t,t') \overset{\Delta}{=} E[z(t)z^*(t')] \qquad (3)$$

que d'un complexe conjugué.

D2. Dans le cas stationnaire, et toujours sous H1, on parlera de corrélation $\gamma_z(t\text{-}t')$ et de corrélation elliptique $r_z(t\text{-}t')$.

D3. Un processus complexe est dit rectiligne s'il est presque sûrement proportionnel (par le truchement d'un nombre complexe) à un processus réel.

D4. Un processus complexe est dit elliptique si et seulement si sa corrélation elliptique est non nulle.

La dénomination elliptique fait référence à la représentation en Lissajou des trajectoires d'un tel processus qui décrivent des ellipses !

1.3. Propriétés caractéristiques

P1. La covariance elliptique est symétrique (d'après la définition).

P2. La corrélation elliptique est paire (cf. P1).

P3. Tout processus rectiligne est elliptique (cf. D3, D4 et (2).

P4. Tout processus elliptique est non circulaire à l'ordre 2 (voir [4]).

P5. Tout processus elliptique z(t) et vérifiant de plus H1 et H2 se décompose en la somme d'un processus analytique $z_+(t)$ (dont les accroissements fréquentiels sont p.s. causaux) et anti-analytique $z_-(t)$ (dont les accroissements fréquentiels sont p.s. anti-causaux).

<u>Preuve.</u> Sous H1 et H2, il vient :

$$dZ(f) = u(f)dZ(f) + u(-f)dZ(f) \qquad (4)$$

où $u(f)$ désigne l'échelon de Heaveside ; les accroissements fréquentiels des processus analytiques et anti-analytiques sont alors respectivement :

$$dZ_+(f) = u(f)dZ(f) \text{ et } dZ_-(f) = u(-f)dZ(f) \qquad (5)$$

❑

Note 1. Si par hasard l'hypothèse H2 n'est pas vérifiée, l'écriture (4) pose des difficultés !

Note 2. La décomposition (4) explique pourquoi des traitements "circulaires" (conjecturant la circularité des processus d'entrée) ne conduisent pas à des résultats totalement médiocres, lorsqu'ils opèrent sur des données elliptiques !

P6. les composantes analytiques et anti-analytiques d'un signal elliptique sont décorrélées dans le cas stationnaire.

Preuve. De façon générale, la décomposition harmonique de la covariance s'écrit selon des notations naturelles :

$$\Gamma_z(t,t') = \Gamma_{++}(t,t') + \Gamma_{--}(t,t') +$$

$$+ 2\Re\{\int\int \exp(j2\pi(ft-f't'))\, E[dZ_+(f)dZ^*_-(f')] \qquad (6)$$

Dans le cas stationnaire, il vient nécessairement :

$$E[dZ_+(f)dZ^*_-(f')] = u(f)u(-f)\, d\mu(f)\, \delta(f-f')\, df' \qquad (7)$$

où $\mu(f)$ est la mesure spectrale associée à la représentation harmonique de la corrélation de $z(t)$. Le résultat final découle ensuite de H2 et des propriétés de $u(f)u(-f)$.

❑

Note 3. La propriété P6 s'avère en fait évidente si l'on fait référence à l'orthogonalité des accroissements fréquentiels dans le cas stationnaire !

Note 4. La propriété P6 peut être mise à profit dans un test de non-stationnarité de signaux complexes elliptiques et dans un procédé de synthèse de signaux elliptiques complexes stationnaires.

P7. Les corrélations elliptiques respectives des composantes analytiques et anti-analytiques d'un processus complexe elliptique sont nulles dans le cas stationnaire.

Preuve. Les définitions conduisent à (pour la composante analytique, par exemple) :

$$R_{++}(t,t') = \int\int \exp(j2\pi(ft+f't'))\, E[dZ_+(f)dZ_+(f')]$$

sous hypothèse de stationnarité, il est nécessaire que :

$$E[dZ_+(f)dZ_+(f')] = u(f)u(-f)\, d\xi(f)\, \delta(f+f')\, df' \qquad (8)$$

où $d\xi(f)$ est la mesure spectrale associée à la représentation harmonique de la corrélation elliptique de $z(t)$. La fin de la démonstration est semblable à celle de P6.

❑

P8. La corrélation elliptique (introduite dans le cas stationnaire) admet la décomposition harmonique suivante:

$$r_z(\tau) = 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi f\tau)\, d\xi(f) \qquad (10)$$

où $d\xi(f)$ est la mesure introduite dans (8), telle que, dans le cas stationnaire :

$$E[dZ(f)dZ(f')] = d\xi(f)\, \delta(f+f')\, df' \qquad (11)$$

Preuve. (10) provient de la définition :

$$R_z(t,t') = R_{++}(t,t') + R_{--}(t,t') +$$

$$+ R_{+-}(t,t') + R_{+-}(t',t)$$

de P7 et d'arguments identiques à ceux développés dans la preuve de P7.

❑

On note que la mesure $d\xi(f)$ rend compte, sur la variété $f=-f'$, de la corrélation *classique* entre les accroissements $dZ(f)$ et leurs hermitiques $dZ^*(-f)$.

P8bis. Si la fonction de répartition $\xi(f)$ admet une dérivée $\xi'(f)$, notée $\eta(f)$, celle-ci est une fonction paire égale à la transformée de Fourier de la corrélation elliptique appelée densité spectrale elliptique.

$$r_z(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi f\tau)\, \eta(f)\, df \qquad (12)$$

(la justification est immédiate à partir de (10)).

❑

A la différence de la densité spectrale classique $\gamma(f)$, la densité elliptique $\eta(f)$ n'est ni positive ni réelle puisqu'il s'agit d'une fonction complexe symétrique.

En résumé, les propriétés harmoniques d'un processus complexe elliptique et stationnaire sont contenues dans les deux densités spectrales : classiques et elliptiques: $\{\gamma(f),\eta(f)\}$. *On note à cet effet et d'après P6. que la densité spectrale $\gamma(f)$ est la somme des densités des composantes analytiques et anti-analytiques $\gamma_+(f)$ et $\gamma_-(f)$. Pour finir, et à l'appui de P8., $\eta(f)$ résulte de l'intercorrélation classique entre $dZ_+(f)$ et $dZ^*_-(-f)$, (intercorrélation qui est nulle dans le cas circulaire et maximale si le signal est réel puisqu'alors les accroissements sont hermitiques).*

1.4. Wigner-Ville elliptique

A l'instar du complément d'attribut qu'apporte la fonction $\eta(f)$ aux signaux elliptiques stationnaires, la représentation de Wigner-Ville WV elliptique :

$$\Psi(t,f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi f\tau)\, z(t+\tfrac{\tau}{2})\, z(t-\tfrac{\tau}{2})\, d\tau \qquad (13)$$

doit s'ajouter à la représentation de WV traditionnelle $W(t,f)$ [1], lorsqu'il s'agit de décrire le second ordre des processus elliptiques non stationnaires. Ces deux représentations permettent d'interpréter la phase instantanée des processus elliptiques et des travaux sont entrepris dans ce sens là.

Note 5. L'analyse en ondelettes devrait aussi faire l'objet d'aménagements dans le cas de signaux elliptiques, dans la mesure où l'analycité des filtres de décomposition occulte une partie des informations spectrales propres aux données...

Note 6. l'espérance mathématique de (13) coïncide avec la densité elliptique $\eta(f)$ dans le cas stationnaire.

Note 7. Retenons que $z(t)$ est stationnaire si ses parties réelle et imaginaire sont marginalement et mutuellement stationnaires.

1.5. Signaux elliptiques "tricovariants"

1.51. Définition

On s'intéresse ici à des signaux complexes elliptiques qui en plus de satisfaire les hypothèses H1, H2 et H3 ont une tricovariance T^j_{ik} non-nulle et bornée, avec *(D5.)* :

$$T_{ik}^{j} \triangleq \mathrm{CUM}\{z_i z^j z_k\} \qquad (14)$$

CUM{.} désigne le cumulant conjoint [2] ; les indices i,j,k représentent des instants d'échantillonnage de z(t) ; z^j n'est autre que z_j complexe-conjugué. T_{ik}^{j} peut être considéré comme un opérateur linéaire qui associe à un vecteur, une matrice ou vice-versa. En tant que tel, sa diagonalisation n'a pas de sens. Une version composite-contractée fournit néanmoins une matrice hermitienne, donc diagonalisable.

152. Tricovariance composite-contractée

D6. w_k, *désignant une série* ($w \in [1,Q]$) *de vecteurs complexes déterministes, on appelle tricovariance composite-contractée, une quantité* A_i^j *de la forme :*

$$A_i^j \triangleq \sum_{w=1}^{Q} T_{ik}^{j} w^k + T_i^{jk} w_k \qquad (15)$$

Note 8. les quantités A_i^j admettent les vecteurs w_k, ($w \in [1,Q]$) comme degrés de liberté !

P9. les trocovariances composites-contractées sont hermitiennes (donc diagonalisables sur une base orthonormée). La preuve est évidente, il suffit de conjuguer membre à membre la définition (15) pour s'en rendre compte.

❑

153. Séparation de sources elliptiques tricovariantes

On cherche à "séparer" un mélange linéaire instantané :

$$z_i(t) = \sum_{p=1}^{P} p_i\, s_p(t) \qquad (16)$$

de P souces $s_p(t)$ elliptiques tricovariantes indépendantes entre-elles et de surcroît blanches au sens fort. Les vecteurs p_i sont supposés orthonormés (*on se place, après un blanchiment d'ordre* 2). On note ξ_p les cumulants d'ordre 3 des sources $s_p(t)$. On fait abstraction de la variable t, dans la suite.

P10. La structure d'une tricovariance composite-contractée d'un mélange de sources elliptiques tricovariantes blanches et indépendantes est donnée par :

$$A_i^j = \sum_{p=1}^{P} \beta_p\, p_i p^j \qquad (17)$$

$$\text{où : } \beta_p \triangleq \sum_{w=1}^{Q} \xi_p^* p^k w_k + \xi_p w^k p_k \qquad (18)$$

(17) et (18) proviennent de (14) (15) et (16).

❑

Les β_p sont réels. La diagonalisation de A_i^j conduit donc aux p_i (*si aucun des* β_p *n'est nul*), soit ensuite aux $s_p(t)$ par projection de $z_i(t)$ sur les p_i, voir (16). La relation (17) étend donc avantageusement (*avec une variance d'estimation des cumulants empiriques plus faible*) à l'ordre 3 et pour des sources elliptiques tricovariantes, le schéma directeur des algorithmes de séparation fondés sur la structure algébrique de la quadricovariance [2]. Les résultats obtenus sont très prometteurs, nous en rendrons compte dans un autre article.

1.6. Processus autorégressifs elliptiques

Pour fixer les idées, on se focalise seulement sur des processus autorégressifs complexes elliptiques d'ordre 1 (*des travaux plus généraux ont été entrepris, ils feront l'objet d'une autre publication*) décrits par une équation aux différences de la forme :

$$z[n]+az[n-1]+a'z^*[n-1] = u[n] \qquad (19)$$

où u[n] est un bruit blanc elliptique BBE centré (*admettant par exemple comme parties réelle et imaginaire des bruits blancs centrés, indépendants et de variances distinctes, de façon à garantir la non-nullité de la corrélation elliptique* (2)) ; a et a' sont des nombres complexes de modules distincts. On pose :

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} a & a' \\ a'^* & a^* \end{bmatrix} ; \mathbf{z}[n] \triangleq \begin{bmatrix} z[n] \\ z^*[n] \end{bmatrix} \qquad (20)$$

Déterminer le couple (γ[p], r[p]) à partir de (19) requiert d'adjoindre l'équation-conjuguée. Le processus vectoriel **z**[n] vérifie alors la relation :

$$\mathbf{z}[n]+\mathbf{A}\mathbf{z}[n-1] = \mathbf{u}[n] \qquad (21)$$

On vérifie que **A** est de rang plein ssi $|a| \neq |a'|$. La structure de la matrice de corrélation $\Gamma[q] = E[\mathbf{z}[n]\mathbf{z}^\dagger[n-q]]$, contenant γ[p] et r[p], repose sur la relation de récurrence :

$$\text{pour } q \geq 0,\ \Gamma[q] + \mathbf{A}\Gamma[q-1] = \Sigma\,\delta[q] \qquad (22)$$

où Σ est la matrice "variance" de **u**[n], δ[q] est la séquence impulsionnelle. Il vient :

$$\text{pour } q \geq 1,\ \Gamma[q] = (-1)^q \mathbf{A}^q \Gamma[0] \qquad (23)$$

$$\text{avec : } \mathbf{A}^{-1}\Gamma[0] - \Gamma[0]\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}\Sigma \qquad (24)$$

l'équation (24) peut être résolue en Γ[0], via l'algèbre de Kronecker [3] ou par une méthode directe. Des conditions suffisantes de stabilité se déduisent de l'inégalité entre normes de matrices, issue de l'identité (23) :

$$q \geq 0,\ |\Gamma[q]| \leq |\mathbf{A}|^q\ |\Gamma[0]| \qquad (25)$$

Il suffit que la norme de la matrice **A** soit inférieure à 1. Si l'on chosit la norme de Frobénius, on obtient la condition suffisante suivante :

$$|a|^2 + |a'|^2 - \frac{1}{2} \leq 0 \qquad (26)$$

Il est possible de trouver des conditions nécessaires et suffisantes moins restrictives, ce point est en cours d'examen.

2. VECTEURS GAUSSIENS COMPLEXES ELLIPTIQUES

2.1. Notations - hypothèses

On s'intéresse dans cette deuxième partie à des vecteurs complexes **z** = **x**+j**y** extraits de processus elliptiques gaussiens (*dont les parties réelles et imaginaires sont mutuellement gaussiennes*) stationnaires. On introduit les grandeurs du second ordre suivantes :

$$\mathbf{R} \triangleq E\{z\,z^T\} \;;\; \Gamma \triangleq E\{z^*\,z^T\} \;;\; \mathbf{M} \triangleq \mathbf{R}^*\Gamma^{-*} \quad (27)$$

On établit, d'autre part, sans difficulté les identités suivantes :

$$\hat{z}^*_{/} = \mathbf{M}\,z \;;\; \tilde{\Gamma} = \Gamma^* - \mathbf{R}\Gamma^{-1}\mathbf{R}^* \quad (28)$$

où $\hat{z}^*_{/} = \mathrm{PROJ}\{z^*/z\}$ et où $\tilde{\Gamma}$ est la matrice de covariance de l'innovation : $\tilde{z}^*_{/} = z^* - \mathrm{PROJ}\{z^*/z\}$. Finalement, on considère les matrices et vecteurs blocs :

$$\mathbb{T} \triangleq \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ -\mathrm{jI} & \mathrm{jI} \end{bmatrix} ; \mathbb{H} \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{I} \end{bmatrix} ; \mathbb{\Gamma} \triangleq \begin{bmatrix} \Gamma & \mathrm{R}^* \\ \mathrm{R} & \Gamma^* \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} ; \mathbf{z} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix} ; \mathbf{z}' \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \tilde{\mathbf{z}}^*_{/} \end{bmatrix} \quad (30)$$

2.2. Densité gaussienne elliptique

2.21. Forme compacte

La forme *compacte* de la densité de **z** s'obtient en réécrivant la densité conjointe du couple de vecteurs **x** et **y** en fonction de **z**, via la transformation $\mathbb{T}$. On obtient :

$$p_E(z,z^*) = \frac{1}{\pi^N}\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbb{\Gamma})}}\exp\{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbb{\Gamma}^{-1}\mathbf{z}^*\} \quad (31)$$

dans le cas circulaire, $\mathbb{\Gamma}$ devient bloc-diagonale, ce qui conduit alors à la forme traditionnelle de la densité [4].

2.22. Forme factorisée

La forme *factorisée* se déduit de la réécriture de p(**x**,**y**) en fonction de **z'**, à l'appui de la transformation mixte $\mathbb{TH}$. La factorisation émane des caractères décorrélés et gaussiens-conjoints (*par construction*) des vecteurs-composantes de **z'** qui entraînent leur indépendance mutuelle...

P11. La forme factorisée de la densité d'un vecteur gaussien complexe-elliptique s'écrit :

$$p_E(z,z^*) = p_C(z,z^*)\,\beta_E \exp\{-Q_E(z,z^*)\} \quad (32)$$

avec :

$$\beta_E^{-1} = \sqrt{\det(\mathbf{H}^*\mathbf{H}^T)}\sqrt{\det(\mathbf{I}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{R}\Gamma^{-1}\mathbf{R}^*\mathbf{C}^{-\dagger})}$$

$$Q_E(z,z^*) = \frac{(z^* - \hat{z}^*_{/})^T\,\tilde{\Gamma}^{-1}_{/}\,(z^* - \hat{z}^*_{/})^* - z^T\Gamma^{-1}z^*}{2}$$

où $\mathbf{CC}^\dagger = \Gamma^*$; $p_C(z,z^*)$ est la densité circulaire [4].

En utilisant le lemme d'inversion matricielle, il vient :

$$Q_E(z,z^*) = \frac{\hat{z}^{*T}_{/}\,\Gamma^{-*}\,\hat{z}^*_{/}{}^* + (z^* - \hat{z}^*_{/})^T\,W\,(z^* - \hat{z}^*_{/})^*}{2} - \mathcal{R}\{z^\dagger\,\Gamma^{-*}\,\hat{z}^*_{/}{}^*\}$$

où :

$$W = \Gamma^{-*}\,\mathbf{R}\tilde{\Gamma}^{-*}_{/}\,\mathbf{R}^*\Gamma^{-*}$$

Le résultat (32) s'obtient par un calcul direct.

❑

Note 9. La forme factorisée (32) permet d'exprimer directement, dans les approches bayésiennes, les vraisemblances et indices de performances elliptiques en fonctions des équivalents circulaires. Un exemple en détection figure dans [5].

Note 10. Pour établir la structure des estimateurs ou détecteurs bayésiens elliptiques, on aura intérêt cependant à utiliser la forme compacte.

2.3. Liens entre matrices de Fischer elliptiques et circulaires

On considère l'estimation d'un vecteur paramètre complexe θ contenu uniquement dans la moyenne $\mathbf{m}_\theta$ d'un vecteur gaussien complexe elliptique **z**. On note : $\mathbf{z}_\theta = \mathbf{z} - \mathbf{m}_\theta$; $\delta_i[\;]$ désigne l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la composante de rang i de θ. En considérant la définition de la matrice de Fischer relative à des quantités complexes [6], on établit, à partir de la forme factorisée (32), le lien suivant entre les matrices de Fischer elliptique $\mathbf{F}_E$ et circulaire $\mathbf{F}_C$:

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_C + \Delta\mathbf{F} \quad (33)$$

$$\text{où : } [\Delta F]_{ii} = \frac{1}{2}\,\delta_i^*[z_\theta^T]\,\mathbf{M}\,\tilde{\Gamma}^{-1}\,\mathbf{M}^*\,\delta_i[z_\theta^*] \quad (34)$$

Appliquée à l'estimation, au sens du maximum de vraisemblance, de l'amplitude a d'un signal **s** connu, noyé dans un bruit **b** gaussien complexe elliptique, centré et de matrices du second ordre **R** et Γ, la relation (34) conduit au quotient des bornes de Cramer-Rao elliptique CR_E et circulaire CR_C :

$$\frac{CR_E}{CR_C} = \frac{1}{1 + \dfrac{s^T\mathbf{M}\,\tilde{\Gamma}^{-1}\mathbf{M}^*s^*}{s^T\Gamma^{-1}s^*}} \quad (35)$$

La relation (35) stipule que : $(CR_E/CR_C) \le 1$. Des travaux en cours quantifient ce gain pour certaines classes de processus elliptiques.

CONCLUSION

Le caractère elliptique que présentent certains signaux complexes est source de profonds changements des outils de représentations et dispositifs de traitement. Les aménagements correspondants devraient améliorer dans certains cas les performances dans des proportions très significatives, tant en contrôle non destructif que dans les télécommunications.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. FLANDRIN, Temps-fréquence, *Editions Hermès*, 1994.

[2] A. SOULOUMIAC, Statistiques d'ordre Supérieur pour la séparation de sources, *Thèse de doctorat*, Telecom-Paris, 1993.

[3] A. GRAHAM, Kronecker products with applications, *John Wiley & Sons*, 1981.

[4] B. PICINBONO, "On Circularity", *IEEE Trans. on Information Theory*, 1995.

[5] P.O. AMBLARD et P. DUVAUT, "Filtrage adapté dans le cas non circulaire", *Colloque GRETSI*, Juan les Pins, France, septembre 1995.

[6] P. COMON, "Estimation dans le cas complexe", *revue Traitement du signal*, 1986.