

# FILTRAGE ADAPTE DANS LE CAS GAUSSIEN COMPLEXE NON CIRCULAIRE

*P.O. Amblard et P. Duvaut*

CEPHAG-URA 346-ENSIEG-BP 46-38402 St-Martin d'Hères Cédex  
 ETIS-ENSEA-Les Chênes Pourpres-95000 Cergy-Pontoise  
 e-mail : amblard@cephag.observ-gr.fr  
 duvaut@ensea.fr

## RÉSUMÉ

Le but de ce papier est l'étude du filtre adapté dans le cas de signaux à valeurs complexes, lorsque le bruit d'observation est non circulaire. L'approche bayésienne au problème de détection nécessite l'extension au cas non circulaire de la densité gaussienne complexe. L'utilisation de cette densité permet de montrer que le détecteur optimal est structurellement égal au filtre adapté classique.

Lorsque le bruit est non circulaire, nous étudions les pertes de performance qu'entraîne l'utilisation d'un détecteur supposant les données circulaires. Un exemple simple permet de visualiser ces pertes qui peuvent être importantes.

Nous terminons le papier par quelques remarques concernant la linéarité des traitement sur les données complexes et l'estimation des paramètres de la gaussienne complexe non circulaire.

## 1. INTRODUCTION

L'étude des variables aléatoires à valeurs complexes connaît un intérêt grandissant depuis quelques années. Elles peuvent être décrites à l'aide du formalisme traditionnel des probabilités (en considérant une variable complexe comme un couple de variables réelles) ou à l'aide d'un formalisme complexe. Les études ont alors montré que décrire une variable complexe dans le formalisme complexe nécessite de travailler à la fois sur la variable et sur sa conjuguée.

Le formalisme complexe permet des calculs simples, des interprétations rapides et claires (par exemple la notion de circularité). Les travaux se sont jusqu'à présent concentrés sur les statistiques des variables complexes. Dans ce papier, nous abordons l'aspect des densités de probabilité à travers la densité de probabilité de variables aléatoires complexes gaussiennes. La densité gaussienne complexe connue jusqu'à présent n'est en fait pas générale, puisque elle sous-entend la circularité, c'est-à-dire suppose l'orthogonalité statistique entre la variable et sa conjuguée. Nous montrons dans le premier paragraphe comment généraliser cette densité au cas non-circulaire. Deux formes sont présentées, l'une qualifiée de composite qui permet des calculs rapides et des résultats compacts; la deuxième, dite forme séparée, montre clairement l'effet de la non-circularité.

Pour illustrer ces variables gaussiennes complexes, nous traitons le cas du filtrage adapté en contexte complexe. L'utilisation de la densité composite précédemment définie permet d'obtenir un résultat structurellement identique aux résultats classiques. Toutefois, pour montrer l'importance de la non circularité, nous étudions les pertes de performances dans le cas de l'inadéquation d'un filtre adapté à l'hypothèse de circularité.

## ABSTRACT

The aim of this paper is the study of the match filter in the case of complex valued signals, when the observation noise is not circular. The complex circular gaussian density is extended to the non circular case in order to solve the problem of detection. Using this density allows to show that the optimal detector is structurally equivalent to the classical match filter.

When the noise is not circular, we study the loss of performance by using a detector based on a circular hypothesis. A simple example illustrates these loss which can be important.

We finally make some remarks about the linearity of the processing of complex data and about the estimation of the parameters of the non circular complex gaussian density.

Enfin, dans le paragraphe 5, nous effectuons quelques remarques sur l'estimation des paramètres de la densité de probabilité d'une variable gaussienne complexe et sur la non-linéarité en les données des traitements optimaux. En effet, le filtre adapté complexe est non linéaire en les données puisqu'il fait intervenir également les conjugués. Toutefois, l'introduction d'un vecteur étendu rend linéaire le traitement.

## 2. DENSITE DE PROBABILITE GAUSSIENNE COMPLEXE

L'explication statistique de variables aléatoires à valeurs complexes nécessite de travailler sur la variable mais également sur sa conjuguée [2,3]. Soit  $Z$  un vecteur aléatoire complexe gaussien (de dimension  $n$ ). La description traditionnellement adoptée consiste à séparer la variable en ses parties réelle et imaginaire. Toutefois, travailler sur l'écriture purement complexe permet des simplifications dans les calculs (lorsque les règles de manipulation ont été précisées).

Ce paragraphe examine le cas de données gaussiennes à valeurs complexes. Nous donnons la forme générale de la densité gaussienne, puis montrons comment séparer la partie circulaire du reste de la densité.

### 2.1. Forme composite

Soit  $Z = X + iY$  un vecteur aléatoire gaussien complexe de dimension  $n$ . Les parties réelle et imaginaire  $X$  et  $Y$  sont alors des vecteurs conjointement gaussiens, et  $Z$  est entièrement caractérisé



par une densité gaussienne  $2n$  dimensionnelle en  $X, Y$ ,

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{|Det(\Gamma')|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathcal{X}_c^T \Gamma'^{-1} \mathcal{X}_c\right) \quad (1)$$

où  $\mathcal{X}_c$  signifie vecteur centré, où  $\mathcal{X} = (X^T Y^T)^T$  et où  $\Gamma'$  est la matrice covariance de ce vecteur.

Nous souhaitons écrire cette densité en fonction de  $Z$ , mais également de  $\bar{Z}$  pour suivre la première remarque. Considérons le changement de variables

$$\begin{cases} X &= \frac{Z + \bar{Z}}{2} \\ Y &= \frac{Z - \bar{Z}}{2i} \end{cases} \quad (2)$$

que l'on écrira sous forme compacte selon  $\mathcal{X} = C\mathcal{Z}$  avec  $\mathcal{Z} = (Z^T \bar{Z}^T)^T$ . Le déterminant de  $C$  vaut  $1/2^n$  en module. La forme quadratique dans (1) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_c^T \Gamma'^{-1} \mathcal{X}_c &= \mathcal{Z}_c^T C^T (CE[\mathcal{Z}_c \mathcal{Z}_c^T]C^T)^{-1} C \mathcal{Z}_c \\ &= \mathcal{Z}_c^T (E[\mathcal{Z}_c \mathcal{Z}_c^T])^{-1} \mathcal{Z}_c \\ &= \mathcal{Z}_c^{\dagger} (E[\mathcal{Z}_c \mathcal{Z}_c^{\dagger}])^{-1} \mathcal{Z}_c \end{aligned} \quad (3)$$

Introduisons  $\Gamma = E[\mathcal{Z}_c \mathcal{Z}_c^{\dagger}]$  la matrice covariance du vecteur  $\mathcal{Z}$ . Alors en utilisant l'expression de la forme quadratique précédente et les lois de changement de variables pour les densités de probabilité, on obtient

$$p_{Z,\bar{Z}}(z, \bar{z}) = \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{|Det(\Gamma)|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathcal{Z}_c^{\dagger} \Gamma^{-1} \mathcal{Z}_c\right) \quad (4)$$

$\Gamma$  étant définie par  $E[\mathcal{Z}_c \mathcal{Z}_c^{\dagger}]$  et que l'on écrira sous forme élargie

$$\Gamma = E\left[\begin{pmatrix} z_c \\ \bar{z}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_c^{\dagger} & \bar{z}_c^{\dagger} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \Gamma_{zz} & \Gamma_{z\bar{z}} \\ \Gamma_{\bar{z}z} & \Gamma_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Pour que ce changement de densité de probabilité soit valide, il faut formellement considérer  $X$  et  $Y$  comme des vecteurs complexes. Par suite, pour effectuer des calculs de probabilité, l'intégration en  $Z$  et  $\bar{Z}$  doit se faire sur des sous-espaces générés par  $X$  et  $Y$  réels (équivalent de l'intégration sur des contours dans le plan complexe).

Le cas circulaire se déduit immédiatement du cas précédent en écrivant  $\Gamma_{zz} = 0 = \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}$ , pour obtenir  $p_{C,Z,\bar{Z}}(z, \bar{z}) = ((2\pi)^n |Det(\Gamma_{z\bar{z}})|)^{-1} \exp(-z^{\dagger} \Gamma_{z\bar{z}}^{-1} z)$  qui est l'expression habituelle (voir par exemple [4]).

## 2.2. Forme séparée

La forme séparée est présentée dans [1]. On peut montrer que la densité de probabilité s'écrit

$$p_{Z,\bar{Z}}(z, \bar{z}) = p_{C,Z,\bar{Z}}(z, \bar{z}) p_{NC,Z,\bar{Z}}(z, \bar{z}) \quad (6)$$

où  $p_{C,Z,\bar{Z}}(z, \bar{z})$  est la densité circulaire et où

$$\begin{aligned} p_{NC,Z,\bar{Z}}(z, \bar{z}) &= \frac{\exp(-z^{\dagger} \Gamma_{z\bar{z}}^{-1} \Gamma_{zz} C^{-1} \Gamma_{\bar{z}\bar{z}} \Gamma_{z\bar{z}}^{-1} z)}{\sqrt{|I - \Gamma_{z\bar{z}}^{-1} \Gamma_{zz} C^{-1} \Gamma_{\bar{z}\bar{z}} \Gamma_{z\bar{z}}^{-1}|}} \\ &\times \exp(\Re(z^T C^{-1} \Gamma_{\bar{z}\bar{z}} \Gamma_{z\bar{z}}^{-1} z)) \end{aligned} \quad (7)$$

Ce dernier terme peut être écrit sous une autre forme que l'on trouvera dans [1]. La matrice  $C$  s'écrit  $C = \Gamma_{z\bar{z}}^T - \Gamma_{\bar{z}\bar{z}} \Gamma_{z\bar{z}}^{-1} \Gamma_{zz}$ .

L'intérêt de cette factorisation réside dans l'isolement de la partie circulaire qui permet facilement de chiffrer l'importance des termes non circulaires dans les traitements optimaux

## 3. FILTRE ADAPTE COMPLEXE

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la détection d'un signal à valeurs complexes, de forme connue, noyé dans un bruit gaussien complexe. Le traitement de ce problème est classique lorsque le bruit est supposé circulaire. Nous levons ici cette hypothèse et traitons le problème de détection par une approche bayésienne. Nous montrerons ensuite que le détecteur obtenu est équivalent au détecteur "linéaire" maximisant une déflection. La dernière partie de ce paragraphe concernera les performances du détecteur obtenu.

Le problème de détection à traiter est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0 &: z = b \\ \mathbf{H}_1 &: z = s + b \end{cases} \quad (8)$$

où les vecteurs sont  $n$ -dimensionnels,  $b$  est un vecteur gaussien complexe, centré, de matrice covariance  $\Gamma$  et  $s$  est un vecteur déterministe connu.

### 3.1. Approche bayésienne

L'approche bayésienne consiste à comparer à un seuil le rapport de vraisemblance  $L(z) = p(r/H_1)/p(r/H_0)$  ou son logarithme. Comme  $s$  est déterministe, la covariance du vecteur observation est identique sous les deux hypothèses, et la log-vraisemblance devient

$$l(z) = \mathcal{S}^{\dagger} \Gamma^{-1} \mathcal{Z} - \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dagger} \Gamma^{-1} \mathcal{S} \quad (9)$$

où  $\mathcal{S} = (s^T s^{\dagger})^T$ . Le test revient alors à

$$\mathcal{S}^{\dagger} \Gamma^{-1} \mathcal{Z} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta + \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dagger} \Gamma^{-1} \mathcal{S} \quad (10)$$

Le détecteur est donc un filtre adapté. Pour retrouver le filtre adapté dans le cas circulaire, il suffit de développer  $\mathcal{S}^{\dagger} \Gamma^{-1} \mathcal{Z}$  pour obtenir  $2\Re(s^{\dagger} \Gamma_{z\bar{z}}^{-1} z)$ .

### 3.2. Maximisation de la déflection

Une autre approche à ce problème de détection consiste à construire un détecteur linéaire qui maximise une déflection. Les filtres linéaires complexes jouent à la fois sur l'entrée et sa conjuguée [2]. Un détecteur linéaire s'écrit alors

$$d = \mathcal{H}^{\dagger} \mathcal{Z} = (h_1^{\dagger} h_2^{\dagger}) \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Cette structure est nécessaire pour pouvoir obtenir un détecteur réel. Une déflection traditionnellement utilisée est

$$D = \frac{|E_1[d] - E_0[d]|^2}{Var_0[d]} \quad (12)$$

où  $E_i[\cdot]$  et  $Var_i[\cdot]$  signifie respectivement espérance et variance sous l'hypothèse  $\mathbf{H}_i$ .

Ici, les grandeurs utiles sont  $E_0[d] = 0$ ,  $E_1[d] = \mathcal{H}^{\dagger} \mathcal{S}$  et  $Var_0[d] = \mathcal{H}^{\dagger} \Gamma \mathcal{H}$ . La déflection devient alors

$$D = \frac{|\mathcal{H}^{\dagger} \mathcal{S}|^2}{\mathcal{H}^{\dagger} \Gamma \mathcal{H}} \quad (13)$$

La maximisation de cette quantité se fait classiquement en utilisant l'inégalité de Schwartz autour du produit scalaire  $\langle x|y \rangle = x^{\dagger} y$ . La déflection maximale est alors  $D_{max} = \mathcal{S}^{\dagger} \Gamma^{-1} \mathcal{S}$  et le détecteur optimal est  $d = \mathcal{S}^{\dagger} \Gamma^{-1} \mathcal{Z}$ .

On retrouve l'équivalence classique entre approche bayésienne et maximisation de la déflection, valide bien sur uniquement dans le cas gaussien. Une discussion sur le rapport entre les deux approches dans un cas plus générale peut être trouvée dans par exemple [6].

### 3.3. Performances

Les performances de détection sont traditionnellement illustrées par les courbes opérationnelles du détecteur (COR), c'est-à-dire la probabilité de détection fonction de la probabilité de fausse alarme à rapport signal à bruit donné. Rappelons que le test est ici

$$\mathcal{S}^\dagger \Gamma^{-1} \mathcal{Z} \stackrel{>H_1}{<H_0} \beta \quad (14)$$

Comme le détecteur est linéaire en  $\mathcal{Z}$  et que ce vecteur est gaussien sous les deux hypothèses, le détecteur est une variable aléatoire gaussienne. Ses statistiques sont

$$\begin{cases} E_0[d] &= 0 \\ E_1[d] &= \mathcal{S}^\dagger \Gamma^{-1} \mathcal{S} = m_{nc} \\ \text{Var}_0[d] &= \mathcal{S}^\dagger \Gamma^{-1} \mathcal{S} \\ \text{Var}_1[d] &= \text{Var}_0[d] = C_{nc} \end{cases} \quad (15)$$

Introduisons  $\text{Erf}(x) = \int_x^{+\infty} (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-u^2/2) du$ . Alors, les probabilités de détection  $P_d = \text{Proba}(d > \beta/H_1)$  et de fausse alarme  $P_{fa} = \text{Proba}(d > \beta/H_0)$  sont données par

$$\begin{cases} P_{fa} &= \text{Erf}\left(\frac{\beta}{\sqrt{C_{nc}}}\right) \\ P_d &= \text{Erf}\left(\frac{\beta - m_{nc}}{\sqrt{C_{nc}}}\right) \end{cases} \quad (16)$$

Dans le cas circulaire, ces relations restent vraies en remplaçant  $m_{nc}$  par  $m_c = s^\dagger \Gamma_{zz}^{-1} s$  et  $C_{nc}$  par  $C_c = s^\dagger \Gamma_{zz}^{-1} s$ .

## 4. INADEQUATION DU DETECTEUR AUX DONNEES

Les problèmes dans lesquels interviennent des données à valeurs complexes (communication, traitement d'antenne, ...) reposent en général sur l'hypothèse d'un bruit perturbateur gaussien circulaire. Les traitements optimaux reposent bien évidemment sur cette propriété. Il est donc logique de s'intéresser aux chutes de performances de ces traitements lorsque cette hypothèse devient fautive. Nous appellerons cette situation l'inadéquation. Dans ce paragraphe nous examinons le cas de l'inadéquation dans le cas du filtre adapté.

Nous cherchons à détecter un signal complexe  $s$  de forme connue dans un bruit gaussien complexe, a priori non circulaire. Soit  $d_c = \Re(s^\dagger \Gamma_{zz}^{-1} z)$  le détecteur optimal supposant le bruit circulaire et  $d_{nc} = \mathcal{S}^\dagger \Gamma^{-1} \mathcal{Z}$  le détecteur ne faisant pas d'hypothèse.

Sachant que le bruit est non circulaire, les statistiques de  $d_{nc}$  sont celles évaluées précédemment. Mais il faut "recalculer" celles de  $d_c$ . Nous aurons dans le cas non circulaire  $m_c = E_1[d_c] = s^\dagger \Gamma_{zz}^{-1} s$  qui reste inchangée. Par contre, la variance de  $d_c$  devient  $\text{Var}_0[d_c] = \text{Var}_1[d_c] = 1/2(s^\dagger \Gamma_{zz}^{-1} s + \Re(s^\dagger \Gamma_{zz}^{-1} \Gamma_{zz} \Gamma_{zz}^{-1} s))$

La perte de performance peut alors être chiffrée en terme de perte de probabilité de détection à probabilité de fausse alarme fixée, soit  $\Delta P_d = P_{dnc} - P_{dc}$ . Si  $\beta_{nc}$  et  $\beta_c$  sont les seuils pour les deux détecteurs, fixer la fausse alarme revient à écrire l'égalité  $\beta_{nc}/\sqrt{C_{nc}} = \beta_c/\sqrt{C_c}$ .  $P_{dnc}$  sera alors donné par  $\text{Erf}((\beta_{nc} - m_{nc})/\sqrt{C_{nc}})$  et  $P_{dc}$  par  $\text{Erf}((\beta_c \sqrt{C_c} - m_c \sqrt{C_{nc}})/\sqrt{C_c C_{nc}})$ . L'écart des probabilités de détection est alors

$$\Delta P_d = \int_{\frac{\beta - m_{nc}}{\sqrt{C_{nc}}}}^{\frac{\beta - m_{nc}}{\sqrt{C_{nc}}} + \Delta d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (17)$$

avec

$$\Delta d = \frac{m_{nc}}{\sqrt{C_{nc}}} - \frac{m_c}{\sqrt{C_c}} \quad (18)$$

Pour illustrer ceci, considérons le problème simple de la détection du vecteur constant  $s = a + ia$  noyé dans du bruit blanc gaussien complexe non circulaire.

Pour fixer les idées, le bruit est écrit selon  $b = x + i(\alpha x + y)$  où  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs gaussiens centré normés, réels, indépendants. Le bruit  $b$  est évidemment non circulaire dès que  $\alpha$  est non nul. La figure (2) montre ce bruit sous forme de courbe de Lissajous pour  $\alpha = 0, 0.5, 1$  et  $2$ . L'effet de la non circularité est clairement démontré par l'aspect ellipsoïdale de la distribution des points. Le cas extrême est une complète corrélation entre  $\Re(b)$  et  $\Im(b)$  concentrant la distribution sur une droite. Pour ce type de bruit,  $\alpha$  apparaît comme chiffrant l'écart à la circularité.

Dans cet exemple simple de détection,  $\Delta d$  vaut

$$\Delta d = a\sqrt{n} \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4} - 2}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 2}} \quad (19)$$

La figure (1) montre  $\Delta P_d$  en fonction de l'écart à la circularité  $\alpha$  pour diverses valeurs de la probabilité de fausse alarme (cette figure est obtenue pour  $a = 0.01$ ,  $n = 100$ ,  $P_{fa}$  de 0.01 à 0.2 par pas de 0.04). Cet exemple permet de chiffrer la perte en probabilité de détection.

On remarque par exemple que pour  $\alpha = 2$  la perte en détection est de 0.3!

## 5. QUELQUES REMARQUES

### 5.1. Retour sur l'inadéquation

Pour mieux comprendre l'effet de l'inadéquation, il est utile de reprendre le problème à l'aide de la densité de probabilité séparée.

D'une façon générale, la forme séparée (6) permet d'écrire le logarithme du rapport de vraisemblance comme

$$l(z) = l_c(z) + l_{nc}(z) \quad (20)$$

De même, dans des problèmes d'estimation, la log-vraisemblance sera la somme d'une log-vraisemblance liée au circulaire et d'un terme relevant de l'écart à la circularité.

Dans le cas nous intéressant de la détection d'un signal connu dans du bruit gaussien, la factorisation implique que le détecteur optimal s'écrit  $d = d_c + d_{nc}$  avec

$$\begin{cases} d_c &= \Re(s^\dagger \Gamma_{zz}^{-1} z) \\ d_{nc} &= \Re(s^\dagger \Gamma_1 z - s^T (\Gamma_2 + \bar{\Gamma}_2) z) \end{cases} \quad (21)$$

où les différentes matrices sont définies par

$$\begin{cases} \Gamma_1 &= \Gamma_{zz}^{-1} \Gamma_{zz} C^{-1} \Gamma_{zz} \Gamma_{zz}^{-1} \\ \Gamma_2 &= C^{-1} \Gamma_{zz} \Gamma_{zz}^{-1} \end{cases} \quad (22)$$

On remarque que  $d_c$  correspond au filtre adapté classique qui suppose les données circulaires.  $d_{nc}$  correspond alors à la correction à apporter pour obtenir le détecteur optimal.

### 5.2. Estimation des paramètres

Comme on peut le remarquer sur les diverses formes du filtre adapté, il ne peut être appliqué pratiquement si les statistiques du bruit ne sont pas connues. Le détecteur doit alors être modifié et un test du maximum de vraisemblance généralisé envisagé. La définition de ce détecteur implique l'estimation au sens du maximum de vraisemblance des paramètres d'une gaussienne complexe.

Soit à estimer la matrice covariance d'un vecteur complexe gaussien centré. On dispose de  $N$  réalisations indépendantes  $\mathcal{Z}_i$  de  $\mathcal{Z}$ . La log-vraisemblance s'écrit alors d'après (4)

$$\begin{aligned} l(z, \bar{z}, \Gamma) &= \log(p_{z, \bar{z}}(z, \bar{z})) \\ &= -nN \log(2\pi) - \frac{N}{2} \log(|\text{Det}(\Gamma)|) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{Z}_i^\dagger \Gamma^{-1} \mathcal{Z}_i \end{aligned} \quad (23)$$



En utilisant les résultat de dérivation par rapport à des grandeurs complexes de [5], trouver les maximas de  $l(z, \bar{z}, \Gamma)$  revient à résoudre

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \Gamma} &= 0 \\ &= -N\Gamma^{-1} + \sum_i \Gamma^{-1} Z_i^\dagger Z_i^\dagger \Gamma^{-1} \\ &+ \frac{1}{2} \text{Diag}(N\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1} Z_i^\dagger Z_i^\dagger \Gamma^{-1}) \end{aligned} \quad (24)$$

Les éléments diagonaux et extra-diagonaux suivent alors la même équation

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_i Z_i Z_i^\dagger \quad (25)$$

On obtiendrait de même la moyenne empirique des  $Z_i$  comme estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne.

### 5.3. Linéarité ou non-linéarité

Il est évident que le détecteur  $d = \mathcal{S}^\dagger \Gamma^{-1} Z$  est non linéaire en  $z$  puisqu'il dépend explicitement de  $\bar{z}$ . On retrouve les remarques de B. Picinbono faites dans un contexte d'estimation optimale. Tempérons toutefois en remarquant que la linéarité est présente, mais en le vecteur que nous appellerons étendu, c'est-à-dire  $Z = (z^T z^\dagger)^T$ .

Cette remarque est tout à fait générale. Tous les traitements faisant appel à des données complexes doivent être effectués sur  $z$  et son conjugué. Si les traitements sont habituellement linéaires, ils le resteront en travaillant sur le vecteur étendu.

Une autre illustration, comme mentionné précédemment, est donnée par l'estimation optimale d'un vecteur gaussien complexe  $Z_2$  par un autre  $Z_1$ . La solution à ce problème est donnée par l'espérance de  $Z_2$  conditionnellement à  $Z_1$ . Or, la densité conditionnelle s'écrit

$$p_{Z_2/Z_1}(z_2, \bar{z}_2) = \frac{p_{Z_2, Z_1}(z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1)}{p_{Z_1}(z_1, \bar{z}_1)} \quad (26)$$

En utilisant les densités construites sur les vecteurs étendus, i.e. (4), on peut montrer que

$$p_{Z_2/Z_1}(z_2, \bar{z}_2) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(Z_2 - \Gamma_{12}^\dagger \Gamma_1^{-1} Z_1)^\dagger C^{-1} (Z_2 - \Gamma_{12}^\dagger \Gamma_1^{-1} Z_1))}{(2\pi)^n \sqrt{|Det(C)|}} \quad (27)$$

où  $C = \Gamma_2 - \Gamma_{12}^\dagger \Gamma_1^{-1} \Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{12} = E[Z_1 Z_2^\dagger]$  et  $\Gamma_i = E[Z_i Z_i^\dagger]$ .

L'espérance conditionnelle, c'est-à-dire l'estimateur optimal de  $Z_2$  par  $Z_1$ , est donc  $\Gamma_{12}^\dagger \Gamma_1^{-1} Z_1$  et la matrice covariance des erreurs est  $C$ .

La structure est donc bien linéaire en le vecteur étendu.

## 6. CONCLUSION

Nous avons introduit une généralisation de la complexe gaussienne au cas général de variables non circulaires. Deux formes équivalentes sont possibles : une composite permet des calculs rapides et une autre permettant de voir l'influence de la non circularité dans les traitements optimaux. A titre d'illustration, le filtre adapté dans le cas complexe est obtenu par une approche bayésienne et par la maximisation de la déflexion. L'influence de la prise en compte de la non circularité dans le problème de détection est illustré par l'étude des chutes de performance du filtre adapté lorsqu'il y a inadéquation du détecteur. Enfin, quelques remarques montrent l'intérêt dans le cas complexe de travailler avec le vecteur étendu : le vecteur comprenant la variable complexe et sa conjugué.

### Références

- [1] P. Duvaut, Signaux et vecteurs complexes elliptiques, GRETSI 1995, dans ces actes.
- [2] B. Picinbono, On circularity, IEEE SP, Vol. 42, 12, 1994.
- [3] J.L. Lacoume, M. Gaeta, Tensorial approach to complex random variables, Higher-Order Statistics, J.L. Lacoume Ed., Elsevier, 1992.
- [4] C. Helstrom, Statistical theory of signal detection, Pergamon Press, 1960.
- [5] P. Comon, Estimation multivariable complexe, Traitement du Signal, Vol.3, 2, 1986
- [6] P. Chevalier *et al.*, Le filtrage de Volterra transverse réel et complexe en traitement du signal, Traitement du Signal, Vol.7, 7, 1990.

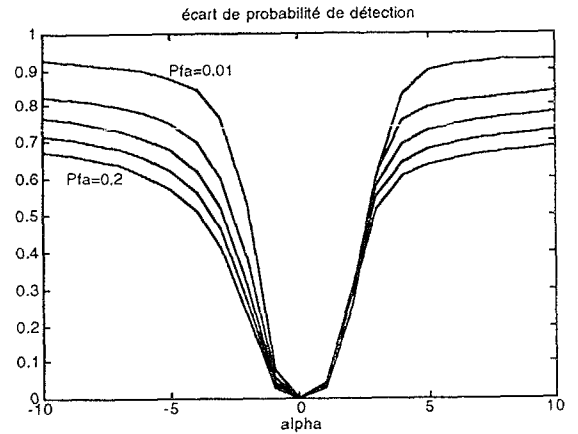


Figure 1: Différence des probabilités de détection en fonction de l'écart à la circularité ( $\alpha$  varie de -10 à 10).

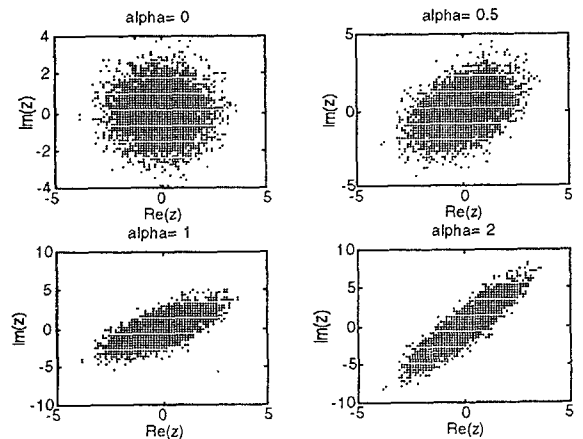


Figure 2: Illustration de la circularité sur la densité de probabilité gaussienne complexe.