



Détection et estimation du fondamental d'une suite de raies harmoniques en nombre inconnu

C. Le Martret * - G. Planquette ** - G. Vezzosi **

* CESTA, 37 av du Général de Gaulle, 35170 Bruz, FRANCE.

** LTSI, Université de Rennes 1, 35042 Rennes Cedex, FRANCE.

Résumé. La détection d'une suite de raies harmoniques noyées dans du bruit est un problème classique en traitement du signal. Hinich a proposé une solution : l'harmogramme [1]. Après avoir montré les problèmes liés à l'utilisation de l'harmogramme nous proposons des solutions permettant :

- de s'affranchir de la connaissance *a priori* du nombre d'harmoniques non-nulles ;
- de s'affranchir de la connaissance *a priori* de la puissance du bruit ;
- de traiter le cas où le fondamental n'est pas un multiple de $1/N$, N étant la taille des FFT employées.

1 - Introduction

Hinich [1] a proposé une solution pour la détection et l'estimation du fondamental f_0 d'une suite de raies harmoniques noyées dans du bruit : l'harmogramme. Si l'on suppose les $M-1$ premiers harmoniques du signal non-nuls et si $Y(f)$ est la transformée de Fourier (réalisée par FFT) du signal observé, le récepteur d'Hinich s'écrit

$$\sup_k H(f_k) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{>}} s, \quad \text{où } H(f_k) = \sum_{m=1}^M |Y(mf_k)|^2 \quad (1)$$

avec $f_k = k/N$ et $0 < Mk/N \leq 1/2$.

Après avoir évalué la probabilité de détection (Pd) de l'harmogramme nous en étudions les performances. Il s'en déduit que :

- un mauvais choix de M peut conduire à une dégradation importante des performances ;
- à rapport signal à bruit (RSB) fixé, la Pd est très fluctuante suivant la valeur du fondamental.

Nous proposons alors un récepteur ne nécessitant pas la connaissance de M . Une version modifiée de ce récepteur permet de traiter le cas où la puissance du bruit est inconnue. Les caractéristiques opérationnelles de ces récepteurs sont évaluées.

Le second problème est résolu par un nouveau balayage des fréquences associé à une modification des termes sommés dans (1).

Abstract. The problem of detecting and estimating the fundamental of an harmonic series in additive noise is often encountered in signal processing. Hinich has proposed a solution: the "harmogram"[1]. We first show the problems encountered by Hinich's harmogram. Then we propose solutions to:

- reduce the uncertainty in the number of harmonics to be summed;
- estimate the noise power;
- improve the detection probability when the fundamental is not a multiple of the inverse of the number of data.

Conventions

• La taille des FFT est égale au nombre de données. Ces deux quantités sont désignées par l'entier N . On suppose que le signal à détecter

$$x(n) = \sum_{p=1}^P A_p \sin(2\pi n p f_0 + \varphi_p), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (2)$$

est observé en présence de bruit blanc stationnaire de puissance σ^2 . Les FFT sont normalisées par $\sqrt{2}/\sigma\sqrt{N}$ si bien que les sorties des FFT peuvent être considérées comme des variables aléatoires (va) gaussiennes complexes dont les parties réelle et imaginaire sont de variance unité [2].

- Le RSB est défini par $\sum A_p^2 / 2\sigma^2 = \rho_0 / \sigma^2$.
- Lors des simulations on prendra $A_p = 1/\sqrt{p}$.
- $[x]$ désigne la partie entière de x .

2 - Performances du détecteur d'Hinich

2.1 - Caractéristiques opérationnelles

Probabilité de fausse alarme (Pfa). La Pfa se calcule sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 : bruit seul, par définition :

$$Pfa(s) = P_{\mathcal{H}_0} \{ \sup_{k=1,B} H(f_k) > s \}$$

et peut être approchée [1] par $1 - \{F_{2P}(s)\}^B$, où B est le nombre de valeurs du fondamental testées (pour le récepteur (1) : $B = [N/2P]$) et $F_d(s)$ la fonction de répartition d'un chi-2 à d degrés de liberté (χ_d^2).

Probabilité de détection (Pd). Soit $\rho(k)$ la valeur $H(f_k)$ obtenue en l'absence de bruit pour le signal $x(n)$ défini en (2). Sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 , on peut modéliser $H(f_k)$ par un χ_{2P}^2 décentré par $\rho(k)$. La Pd s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \text{Pd} &= P_{\mathcal{H}_1} \left\{ \sup_{k=1, B} H(f_k) > s \right\} \\ &= 1 - P_{\mathcal{H}_1} \left\{ \bigcap_{k=1}^B H(f_k) < s \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Les relations entre les termes $H(f_k)$ composant (3) sont extrêmement compliquées. Afin d'obtenir une évaluation de (3), nous les supposons indépendants. De plus, la détection ne s'effectue que sur une partie des fondamentaux f_k : ceux pour lesquels le coefficient $\rho(k)$ est élevé. On désigne par E l'ensemble des indices k correspondant, la Pd s'écrit

$$\text{Pd} \approx 1 - \prod_{k \in E} G_{2P, \rho(k)}(s) \quad (4)$$

où $G_{d, \rho}(s)$ est la fonction de répartition d'un χ_d^2 décentré par ρ [3, chapitre 1].

Soit $\rho(k_0) = \sup \rho(k)$. Différents ensembles E ont été testés. Les simulations effectuées ont montré que :

- $E = \{k_0\}$ constitue une bonne approximation dans le cas où le fondamental est un multiple de $1/N$;
- $E = \{k / \rho(k) \geq 0.9 \cdot \rho(k_0)\}$ estime correctement la Pd quel que soit f_0 (cf figure 2) ;
- $E = \{k / k = 1, \dots, B\}$ conduit à une surestimation de la Pd ;

Le calcul analytique des coefficients $\{\rho(k)\}$ à toutes les fréquences est complexe car chaque sortie de FFT est une combinaison des composantes harmoniques du signal. Ils peuvent cependant s'estimer en négligeant la contribution des harmoniques situés hors des lobes secondaires des filtres de FFT ou se calculer exactement de manière numérique à partir de la FFT du signal (2).

2.2 - Étude des performances du détecteur d'Hinich

Influence de M . La figure 1 représente la Pd du récepteur d'Hinich en fonction de M à Pfa constante pour différentes valeurs du fondamental $f_0 = k_0/N$. Le comportement des courbes peut s'expliquer de la manière suivante :

- $M=P$: la Pd est maximale, l'énergie maximale de décentrage vaut ρ_0 .

- $M < P$: la Pd décroît lorsque M tend vers zéro car, le nombre d'harmoniques sommés étant inférieur à P , l'énergie maximale de décentrage $\rho(k_0)$ est inférieure à ρ_0 .

- $M > P$: deux situations se présentent suivant les valeurs de M . Soit $f_{\max} = 1/2M$ la valeur maximale du fondamental testé. Lorsque $f_{\max} > f_0$ ($M < 1/2f_0$), la Pd décroît lentement car l'énergie de décentrage maximale est constante alors que la Pfa augmente. Lorsque $f_{\max} < f_0$ ($M < 1/2f_0$), l'énergie sommée peut varier entre la valeur ρ_0 (détection sur les sous-

harmoniques $f_k = k_0/nN$, eg $k_0 = 8, 9$) et 0 (cas où k_0 est premier, pas de sous-harmoniques, eg $k_0 = 13$).

Influence de la valeur du fondamental. La Pd du détecteur d'Hinich peut être extrêmement variable suivant la valeur du fondamental. La figure 2 montre que la Pd oscille régulièrement et prend sa valeur maximale aux fréquences $f_k = k/N$ et sa valeur minimale aux fréquences à $(2k+1)/N$. En effet, si la fréquence du fondamental est comprise entre k/N et $(k+1)/N$, l'harmonique M se situe dans l'un des bins $Mk, Mk+1, \dots, Mk+M$, mais seuls les bins Mk et $Mk+M$ sont pris en compte dans la somme (1). Le même phénomène se reproduit pour chacun des autres harmoniques. Les paramètres de décentrage sont donc inférieurs à ceux obtenus pour $f_0 = k_0/N$ si bien que la Pd est plus faible. On en déduit que le balayage des fréquences du fondamental au pas de $1/N$ n'est pas suffisant.

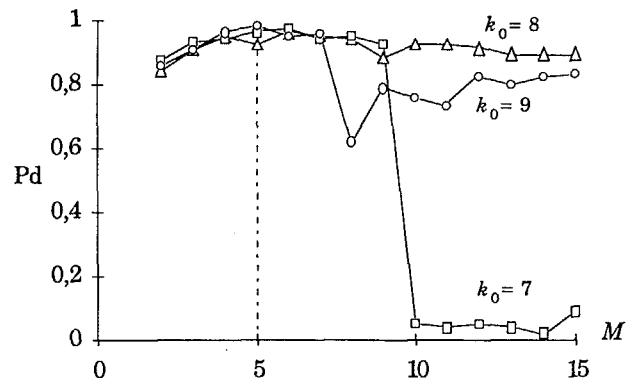


Figure 1. Pd du récepteur d'Hinich (1) en fonction de M pour différentes valeurs du fondamental. $N=128, P=5, k_0 = 7, 8, 9, Pfa=1e-3$.

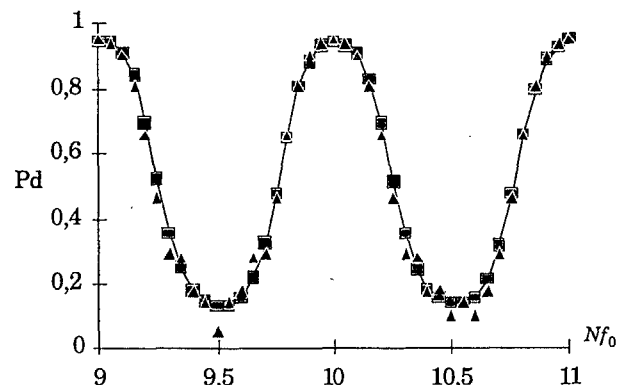


Figure 2. Pd du détecteur d'Hinich en fonction de la fréquence du fondamental f_0 . Carrés : point simulation de 10000 tirages, triangles : approximation par (4). $N=128, P=M=3, RSB=-4$ dB, $Pfa=1e-3$.

3 - Nouveau détecteur dans le cas P inconnu

3.1 - Le récepteur

N'ayant aucune connaissance de P il semble logique de prendre en compte les $N_k - 1$ ($N_k = \lfloor N/2k \rfloor$) harmoniques dont la fréquence est inférieure à $1/2$.

Les hypothèses deviennent :

- \mathcal{H}_0 : pas de signal périodique présent ;
- \mathcal{H}_k : présence d'un signal périodique (2), d'énergie ρ_0 comportant N_k-1 harmoniques.

Afin d'effectuer le test du maximum de vraisemblance, on modélise les $Y(f)$ par des variables aléatoires indépendantes, complexes et de variance :

- $\alpha_k = 1 + \theta_k$ si $f = nf_k$, $n = 1, \dots, N_k$ sous \mathcal{H}_k ,
- 1 dans tous les autres cas.

θ_k est un paramètre caractérisant le décentrage du fondamental et des harmoniques sous \mathcal{H}_k . On suppose de plus que le RSB est faible i.e $\theta_k \ll 1$. Alors, la log-vraisemblance s'écrit :

$$\log \frac{P_{Y(0), \dots, Y(f_{N-1})} | \mathcal{H}_k}{P_{Y(0), \dots, Y(f_{N-1})} | \mathcal{H}_0} = \frac{\theta_k}{\alpha_k} H(f_k) - N_k \log(\alpha_k) \approx \theta_k \{H(f_k) - N_k\} \quad (5)$$

où $H(f_k) = \sum_{m=1}^{N_k} |Y(mf_k)|^2$. Il est naturel de garder constant l'index de déflexion du récepteur (5) afin d'assurer l'équiprobabilité du test des contre-hypothèses \mathcal{H}_k , or :

$$d_k = \frac{E(H(f_k) | \mathcal{H}_k) - E(H(f_k) | \mathcal{H}_0)}{\sqrt{\text{var}(H(f_k) | \mathcal{H}_0)}} = \frac{\theta_k \sqrt{N_k}}{\sqrt{2}}$$

Posant $d_k = C/\sqrt{2}$ où C est une constante, on obtient $\theta_k = C/\sqrt{N_k}$, et le récepteur devient d'après (5) :

$$\sup_{f_{\min} \leq f_k \leq f_{\max}} Z(f_k) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_k}{\geq}} s, \quad Z(f_k) = \frac{H(f_k) - N_k}{\sqrt{N_k}}, \quad (6)$$

où $f_{\min} = k_{\min}/N$ et $f_{\max} = k_{\max}/N$ sont les bornes de recherche du fondamental.

3.2 - Caractéristiques opérationnelles

Afin d'évaluer les performances du détecteur nous effectuons les deux approximations suivantes :

1. quelle que soit l'hypothèse, les variables aléatoires $Z(f_k)$ sont indépendantes ;
2. les $Z(f_k)$ sont des $\chi_{2N_k}^2$ décentrés par $\rho(k)$ sous l'hypothèse \mathcal{H}_k , centrés sous \mathcal{H}_0 .

En utilisant ces deux approximations, le calcul de la Pfa s'effectue comme au § (2.1) et

$$\text{Pfa}(s) = 1 - \prod_{f_{\min} \leq k/N \leq f_{\max}} F_{2N_k} \left(s\sqrt{N_k} + N_k \right). \quad (7)$$

Ce nouveau récepteur est un très bon classifieur, ce qui n'est pas montré ici, si bien que la détection ne s'effectue que sur le bon fondamental et la Pd est bien estimée par :

$$\text{Pd} = 1 - G_{2N_{k_0}, \rho(k_0)} \left(s\sqrt{N_{k_0}} + N_{k_0} \right). \quad (8)$$

Comparaison entre les deux récepteurs

On constate à la figure 3 que la Pd du nouveau récepteur est légèrement inférieure à la Pd

maximale de l'harmogramme d'Hinich mais, dès que $|M - P| \geq 4$, elle redevient plus élevée.

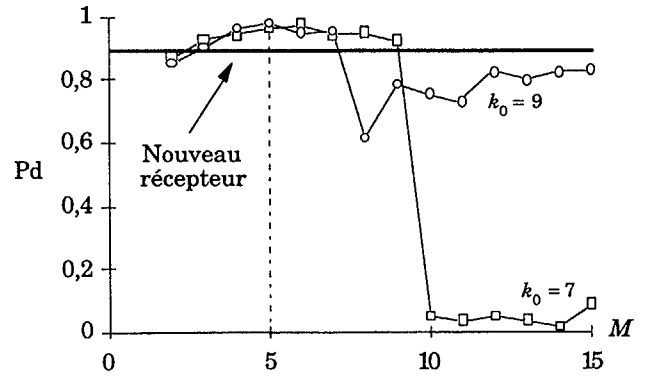


Figure 3. Pd comparaison entre l'harmogramme (1) et le nouveau récepteur. $N=128$, $Nf_{\min}=1$, $Nf_{\max}=N/4$, $f_0=11/N$, $M=5$, $\text{RSB}=-4$ dB, $\text{Pfa}=1e-3$.

4 - Cas puissance du bruit inconnue

Dans la pratique la puissance du bruit est inconnue. Afin de rendre le récepteur opérationnel il faut donc s'affranchir de la connaissance de ce paramètre.

Note. Dans ce paragraphe uniquement, les sorties de FFT sont normalisées par $\sqrt{2}/\sqrt{N}$ et non plus par $\sqrt{2}\sigma/\sqrt{N}$.

La structure du récepteur (6) ne change pas, seule l'expression de $H(f_k)$ se transforme en

$$H'(f_k) = \hat{\sigma}^{-2} \sum_{m=1}^{N_k} |Y(mf_k)|^2$$

où $\hat{\sigma}^2$ est l'estimée de la puissance du bruit. Pour chaque fondamental f_k testé, nous proposons d'estimer le bruit à partir de $Y(f)$ sur le complémentaire de l'ensemble des fréquences harmoniques soit :

$$S_k = \{n/N, n = 1, N/2\} - \{f_k, 2f_k, \dots, N_k f_k\}.$$

Ainsi l'expression précédente s'écrit

$$H'(f_k) = \sum_{m=1}^{N_k} |Y(mf_k)|^2 / \frac{1}{(N - 2N_k)} \sum_{f \in S_k} |Y(f)|^2. \quad (9)$$

Caractéristiques opérationnelles

Pfa. Afin de pouvoir évaluer la Pfa du récepteur (9) on ajoute aux approximations du § (3.2) l'approximation suivante : $\sum_{f \in S_k} |Y(f)|^2$ suit un $\chi_{N-2N_k}^2$ centré.

En tenant compte de l'indépendance des $Z(f_k)$ la Pfa s'écrit :

$$\text{Pfa}(s) = 1 - \prod_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} P_{\mathcal{H}_0} \left(\frac{\chi_{2N_k}^2}{\chi_{N-2N_k}^2} \leq \frac{s\sqrt{N_k} + N_k}{N - 2N_k} \right).$$

En définitive

$$\text{Pfa}(s) = 1 - \prod_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} F \left(2N_k \frac{s\sqrt{N_k} + N_k}{N - 2N_k}, 2N_k, N - 2N_k \right),$$



où $F(x,a,b)$ est la fonction F [4]. La figure 4 montre que l'approximation de la Pfa est cohérente avec les simulations effectuées.

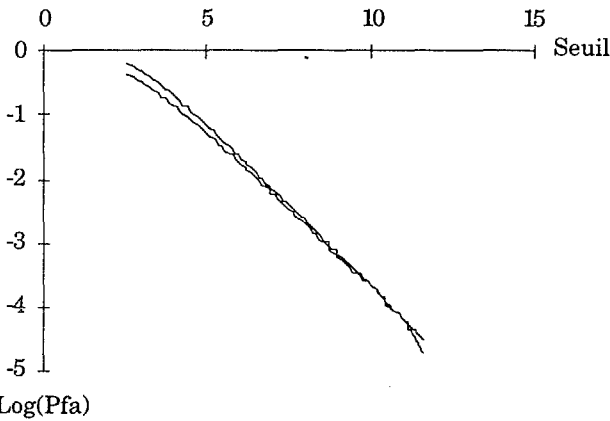


Figure 4. Pfa du récepteur (6) : comparaison entre théorie et simulations. $N=128$, $Nf_{min}=2$, $Nf_{max}=N/4$. Nombre de tirages : 500000.

Pd. On peut considérer que l'expression (8) de la Pd ne change pas. En effet les variations de l'estimation du bruit sont négligeables devant la puissance du signal.

Remarque. Le procédé que nous venons de décrire est général et peut être appliqué aux différents récepteurs présentés dans cet article.

5 - Un nouveau balayage des fréquences fondamentales

5.1- Résolution du problème

Afin de résoudre le problème de la variation de la Pd en fonction de la valeur f_0 (cf figure 2), nous proposons de balayer les fréquences du fondamental au pas de $1/QN$ (Q entier à déterminer). Ainsi, si Q est suffisamment grand, on sommerá tous les bins comportant les harmoniques du signal et la Pd restera constante. De plus, afin de pallier le phénomène de dépointage lié au caractère discret de la FFT, nous estimerons la puissance des harmoniques mf en sommant les sorties des deux filtres de FFT dont les fréquences centrales sont les plus proches de mf :

$$H(f_k) = \sum_{m=1}^M |Y(\theta_m)|^2 + |Y(\theta_m + 1/N)|^2 \quad (10)$$

avec $\theta_m = [Nm f_k] / N$ et $f_k = k / QN$.

5.2- Caractéristiques opérationnelles

Pfa. Par rapport au récepteur (1), le nombre de bins sommé est doublé, la Pfa s'écrit donc :

$$Pfa \approx 1 - [F_{4P}(s)]^B$$

avec $B = [(N-1)Q/2M]$. Il est évident qu'à seuil constant cette Pfa est plus élevée que celle de l'harmogramme d'Hinich.

Pd. La Pd optimale est réalisée pour $Q = \min(M, P)$. Une surestimation de Q conduit à une faible perte de

Pd par rapport à la Pd originale (cf figure 5). La Pd obtenue avec l'harmogramme (10) est relativement constante comparée à celle du détecteur (1).

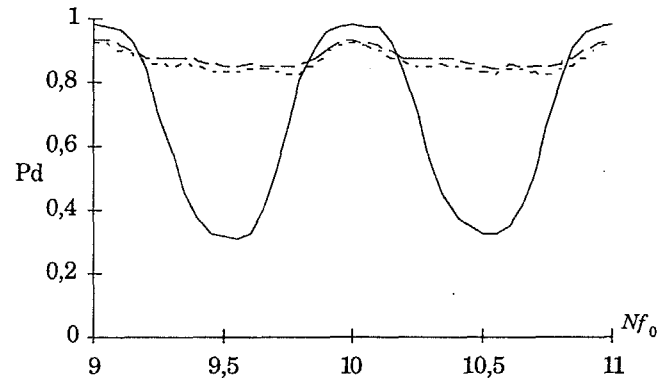


Figure 5. Comparaison de la Pd de l'harmogramme d'Hinich estimé avec (1) (trait continu) et (10) long pointillés : $Q=3$, pointillés : $Q=5$. $N=128$, $M=3$, $RSB=-4$ dB, $Pfa=1e-3$.

6 - Conclusion

Hinich a proposé une solution pour la détection de signaux dont la période est inconnue. Il supposait que les $M-1$ premiers harmoniques étaient non nuls. Soit $P-1$ le nombre réel d'harmoniques non nuls, nous avons étudié les performances de l'harmogramme en fonction de M à P fixé et en avons déduit que :

- 1 - la Pd est très fluctuante lorsque P est surestimé et il n'existe aucun moyen de fixer M ;
- 2 - même dans le cas $M=P$ lorsque $f_0 \neq \frac{k_0}{N}$ la perte de détection peut être importante.

Nous avons dans un premier temps introduit un nouveau détecteur qui tient compte de toutes les harmoniques du signal. Ce récepteur possède de bonnes performances de détection. Une extension de ce récepteur a été proposée dans le cas où la puissance du bruit est inconnue.

La modification de la sommation et un balayage plus fin des fréquences du fondamental permettent de résoudre le problème des variations de Pd tout en augmentant la précision de l'estimation du fondamental d'un rapport Q . Cette solution semble être un bon compromis complexité/performances (une FFT de taille *raisonnable*, calculs simples, Pd constante) ce qui ne semble pas être *a priori* le cas des méthodes utilisant le zéro-padding qui pourrait constituer une autre alternative aux solutions proposées au § (5).

Références

- [1] M.J. Hinich, "Detecting a hidden Periodic Signal When Its Period is Unknown", IEEE Trans. on ASSP, Vol. ASSP-30, n°5, October 1982.
- [2] D. Brillinger, *Time Series, Data Analysis, and Theory*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975, sect. 4.4.
- [3] J.G. Proakis, "Digital Communications", Mac Graw-Hill.
- [4] J.S. Bendat, A.G. Piersol, "Random Data : Anaysis Measurement Procedures", Wiley 1971.