Systèmes linéaires au sens large en traitement statistique du signal

Bernard Picinbono

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS–ESE–UPS)
École Supérieure d'Électricité
Plateau de Moulon, 91192 Gif–sur–Yvette, Cedex, France.

RÉSUMÉ

L'espérance conditionnelle qui donne la solution optimale du problème de l'estimation en moyenne quadratique est linéaire dans le cas gaussion réel mais ne l'est plus dans le cas gaussien complexe. Sa forme introduit des systèmes dits linéaires au sens large dont nous présentons quelques propriétés. Ces systèmes peuvent être considérés comme réalisant une opération linéaire simultanément sur l'entrée et son complexe conjugué. Le traitement statistique avec de tels systèmes nécessite la connaissance de propriétés du second ordre autres que la corrélation. Dans le cas des signaux stationnaires ceci conduit à introduire en plus de la fonction de corrélation une autre fonction dite de relation dont les propriétés sont analysés. Ceci permet de préciser le concept de bruit blanc et également de donner des idées nouvelles sur les signaux autorégressifs et les problèmes de prédiction associés.

ABSTRACT

The conditional expectation that gives the optimal solution of the mean square estimation problem is linear in the real Gaussian case but this linearity disappears in the complex case. Its structure introduces the concept of widely linear systems discussed in this paper. These systems can be considered as realizing a linear operation both on the input and its complex conjugate. The knowledge of the correlation properties is in general insufficient to solve statistical signal processing problems with such systems. As an exemple it is necessary in the case of complex stationary signals to introduce not only the correlation function but also another function called relation function, the properties of which are analyzed. This allows us to extend the concept of white noise and to present new ideas on prediction with autoregressive signals.

1. INTRODUCTION

Malgré les importants développements théoriques et pratiques apparus dans l'étude des systèmes non linéaires, les systèmes linéaires demeurent cependant les plus couramment utilisés en traitement du signal (TS). Il y a à cela plusieurs raisons. Du point de vue théorique ils bénéficient des résultats considérables connus en algèbre linéaire. Du point de vue pratique ce sont les plus simple à mettre en oeuvre et, en raison du principe de superposition, ils sont bien adaptés à tous les phénomènes physiques régis par des équations linéaires. Mais il y a une raison qui est plus spécifique au TS : en environnement gaussien (ou normal) les systèmes optimaux sont fréquemment linéaires. C'est le cas de l'espérance conditionnelle qui donne la solution optimale du problème de l'estimation en moyenne quadratique (EMQ) et c'est le cas du logarithme du rapport de vraisemblance qui conduit au filtre (linéaire) adapté en détection.

Ces résultats bien connus sont valables dans le cas des signaux *réels*. Mais dans bien des domaines du TS il est préférable de travailler avec des éléments complexes, même si l'on peut remarquer qu'un nombre complexe est équivalent à une paire de nombres réels. C'est par exemple le cas de l'analyse spectrale où il est bien plus commode de manipuler des signaux du type $\exp(j\omega t)$ que du type $\cos(\omega t)$ [1]. Mais c'est aussi celui du traitement linéaire d'antenne où tous les calculs sont systématiquement présentés en notation complexe [2].

La théorie des systèmes linéaires s'applique indifféremment dans les cas réels et complexes. Par contre la justification statistique de leur usage disparaît partiellement. Prenons par exemple le cas de l'EMQ. Supposons que l'on veuille estimer une variable aléatoire (centrée) y à l'aide d'un vecteur observation $\mathbf{x}$ (aussi centré). Que ces grandeurs soient réelles ou complexes, la meilleure EMQ est fournie par l'espérance conditionnelle $E[y|\mathbf{x}]$. Dans le cas où $\mathbf{x}$ et y sont des variables aléatoires complexes conjointement normales, l'espérance conditionnelle prend la forme

$$y = \mathbf{a}^H \mathbf{x} + \mathbf{b}^H \mathbf{x}^*. \tag{1}$$

Dans cette expression tous les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{x}$ sont complexes et le symbole H signifie la transconjugaison (transposition et conjugaison complexe). La relation (1) entre l'entrée $\mathbf{x}$ et la sortie y n'est plus linéaire. Elle ne le devient que si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Toutefois il est évident que si l'on introduit les parties réelles et imaginaires de toutes les quantités apparaissant dans (1), cette équation peut se mettre sous la forme d'un système de deux équations linéaires. C'est pourquoi le système décrit par (1) est appelé *linéaire au sens large*. Nous nous proposons d'étudier les propriétés et les applications de ce genre de systèmes dans quelques problèmes de TS. En particulier nous reprenons le problème de l'EMQ et nous calculons le gain potentiel produit par l'usage de ces systèmes par rapport aux méthodes linéaires traditionnelles. Ces systèmes exploitent plus sytématiquement les propriétés statistiques du second ordre, ce qui se traduit dans le cas des signaux stationnaires par l'introduction, à coté de la fonction de corrélation traditionnelle, d'une autre fonction dite de relation dont les propriétés sont analysées. Nous présentons finalement quelques applications de ces résultats à la prédiction des signaux autorégressifs.

2. ESTIMATION EN MOYENNE QUADRATIQUE

Nous appelons estimation linéaire au sens large en moyenne quadratique (ELLMQ), l'estimation de y en fonction de $\mathbf{x}$ sous la forme

$$\widehat{y} = \mathbf{u}^H \mathbf{x} + \mathbf{v}^H \mathbf{x}^*. \tag{2}$$

Il s'agit de déterminer les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de sorte que l'erreur $E[|y - \widehat{y}|^2]$ soit minimum. Le moyen le plus rapide d'y parvenir consiste à utiliser une méthode géométrique (voir p. 41 de [3]). Pour ceci on note que tous les systèmes du type (2) appartiennent à un sous-espace de Hilbert de l'espace des observations contenant tous les systèmes $s = h(\mathbf{x})$ dont la sortie s est du second ordre. Partant de cette remarque il suffit pour déterminer (2) d'appliquer le principe d'orthogonalité spécifiant que $y - \widehat{y}$ est orthogonal à $\mathbf{x}$ et à $\mathbf{x}^*$. En termes d'espérances mathématiques ceci s'écrit

$$E(\widehat{y}^* \mathbf{x}) = E(y^* \mathbf{x}) \ \ ; \ \ E(\widehat{y}^* \mathbf{x}^*) = E(y^* \, \mathbf{x})^*. \tag{3}$$

En remplaçant $\widehat{y}$ par sa valeur donnée par (2) on obtient un système de deux équations

$$\mathbf{\Gamma u} + \mathbf{C v} = \mathbf{r} \tag{4}$$

$$\mathbf{C}^* \mathbf{u} + \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{v} = \mathbf{s}^*, \tag{5}$$

permettant de déterminer $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Les quantités apparaissant dans ces équations sont

$$\mathbf{\Gamma} = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^H) \ \ ; \ \ \mathbf{r} = E(y^* \mathbf{x}) \tag{6}$$

$$\mathbf{C} = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \ \ ; \ \ \mathbf{s} = E(y\mathbf{x}) \tag{7}$$

Les quantités $\mathbf{\Gamma}$ (matrice de covariance) et $\mathbf{r}$ (vecteur de corrélation) sont celles qui apparaissent dans la formulation classique de l'ELMQ. En effet si l'on impose la contrainte $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, le système (2) devient strictement linéaire et la première relation d'orthogonalité (3) conduit à l'équation classique $\mathbf{\Gamma u} = \mathbf{r}$.

La matrice $\mathbf{C}$ est dénommée dans la suite matrice de relation et le vecteur $\mathbf{s}$ vecteur de relation. Ces grandeurs n'apparaissent pas dans la formulation classique de l'ELMQ, bien qu'elles spécifient tout autant que $\mathbf{\Gamma}$ et $\mathbf{r}$ les propriétés du second ordre du couple $(\mathbf{x}, y)$. Nous reviendrons ci-dessous sur l'origine de ce fait. Mais à ce stade on peut s'interroger sur les propriétés de la matrice $\mathbf{C}$. On sait en effet (voir p. 65 de [4]) qu'il y a identité entre l'ensemble des matrices de covariance et celui des matrices définies non négatives. On peut ainsi se demander si les matrices de relation ne possèdent pas des propriétés similaires. Il résulte de la définition de $\mathbf{C}$ qu'elle doit être symétrique et nous présenterons au paragraphe suivant une condition plus caractéristique.

La résolution du système d'équations (4) et (5) conduit au résultat suivant

$$\mathbf{u} = [\mathbf{\Gamma} - \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{C}^*]^{-1} \, [\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}^{-1*}\mathbf{s}^*] \tag{8}$$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{\Gamma}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{C}]^{-1} \, [\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{r}]. \tag{9}$$

L'erreur minimum ϵ^2 obtenue se déduit du théorème de Pythagore et vaut $E(|y|^2) - E(|\widehat{y}|^2)$. Un calcul sans difficulté donne alors

$$\epsilon^2 = \sigma^2 - (\mathbf{u}^H \mathbf{r} + \mathbf{v}^H \mathbf{s}^*), \tag{10}$$

où σ^2 est la variance de y et $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont donnés respectivement par (8) et (9).

Il est intéressant de comparer cette erreur à celle que l'on aurait obtenue en utilisant la méthode linéaire classique. On sait que cette erreur ϵ_L^2 vaut $\sigma^2 - \mathbf{a}^H \mathbf{r}$, où $\mathbf{a}$ est la solution de l'équation de Wiener $\mathbf{\Gamma a} = \mathbf{r}$. Après un calcul non indiqué ici on obtient l'expression de la différence $\delta \, \epsilon^2 = \epsilon_L^2 - \epsilon^2$ par

$$\delta \, \epsilon^2 = \mathbf{v}^H [\mathbf{\Gamma}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{C}] \, \mathbf{v}, \tag{11}$$

où $\mathbf{v}$ est donné par (9). On peut montrer que la matrice entre crochets est définie positive. Il en résulte que $\delta \, \epsilon^2 = 0$ si et seulement si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ce qui est normal, puisque dans ce cas (2) devient strictement linéaire.

La condition $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ est, d'après (9), équivalente à $\mathbf{C}^*\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{s}^*$. Ceci se produit évidemment si les deux membres de l'égalité sont nuls mais pas uniquement, comme on le verra dans le cas des modèles autorégressifs.

Il convient à ce stade de comparer la méthode qui vient d'être présentée et s'appuyant sur le concept de système linéaire au sens large à celle consistant à ne raisonner que sur des quantités réelles en traitant séparément les partie réelles et imaginaires. Il est clair que l'on peut prendre ce chemin, mais il conduit à des calculs beaucoup plus laborieux. En particulier si l'on appelle respectivement $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{x}$, toutes les propriétés statistiques de ce vecteur caractérisées ci-dessus par les deux matrices complexes $\mathbf{\Gamma}$ et $\mathbf{C}$ le sont maintenant par les quatre matrices réelles $\mathbf{\Gamma}_{ij} = E[\mathbf{x}_i \, \mathbf{x}_j^T]$, i et j valant 1 ou 2, et dans cette formulation l'expression (11) devient presque inextricable. Par ailleurs, nous allons voir immédiatement que la condition $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ a un sens physique très précis qui est beaucoup plus obscur avec les matrices $\mathbf{\Gamma}_{ij}$.

Circularité

On dit que le couple $\mathbf{x}$, y est circulaire du second ordre dans son ensemble si

$$\mathbf{C} = \mathbf{0} \ \ ; \ \ \mathbf{s} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Il est évident que ces conditions entraînent $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et l'ELLMQ devient linéaire. Cette hypothèse de circularité est bien connue dans le cas normal (voir p. 118 de [4]). Elle est même parfois introduite comme faisant partie de la définition de la normalité (voir [5] et p. 128 de [6]. Elle est analysée en détail dans [7]. Limitée au second ordre elle signifie que les paires $[\mathbf{x}, y]$ et $[\mathbf{x}\, e^{j\phi}, y\, e^{j\phi}]$ ont les mêmes propriétés du second ordre quel que soit ϕ. Partant de la définition (7) cette invariance par rotation conduit immédiatement à (12). Du points de vue physique cette propriété d'invariance par rotation apparaît naturellement dans l'étude des signaux à bande étroite qui comportent souvent une phase aléatoire équipartie. Elle peut également se relier à des propriétés de stationnarité [8]. Cette hypothèse de circularité est certes très fréquente, mais loin d'être universelle, et dans beaucoup de cas elle est introduite de manière plus ou moins implicite pour facilier les calculs.

Singularité

On sait que l'EMQ est singulière (ou parfaite) quand l'erreur est nulle et que l'EMQ est nulle quand cette erreur est égale à la variance de y. Dans le cas de l'ELMQ la condition $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ entraîne une estimation nulle. L'interprétation est évidente puisque cette condition signifie que $\mathbf{x}$ et y sont non corrélés. Montrons alors qu'il est possible d'avoir simultanément une ELMQ nulle et une ELLMQ parfaite.

Pour ceci on suppose que le vecteur $\mathbf{x}$ n'est pas circulaire, c'est-à-dire que $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$. Soit alors $\mathbf{b}$ un vecteur quelconque et $\mathbf{a}$ le vecteur $\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{C}\,\mathbf{b}$. Introduisons la variable aléatoire $y = \mathbf{a}^H\mathbf{x} + \mathbf{b}^H\mathbf{x}^*$. En raison de sa structure son ELLMQ est parfaite. Il suffit de prendre dans (2) $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{b}$. Par contre un calcul immédiat montre que $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, ce qui signifie que $\mathbf{x}$ et y sont non corrélés et entraîne une ELMQ nulle. Cet exemple, peut-être un peu artificiel, montre cependant l'importance de prendre en compte totalement les propriétés du second ordre dans les problèmes d'estimation.

3. STATISTIQUES DU SECOND ORDRE

L'ELLMQ utilise pleinement les statistiques du second ordre à la différence de l'ELMQ qui se contente des propriétés de corrélation. Il est donc important d'étudier plus à fond ces statistiques, et vu la dimension limitée de ce texte, on se contentera d'aborder le cas des signaux complexes stationnaires. Soit $z[k]$ un tel signal. Les propriétés du second ordre sont caractérisées par les deux moments

$$\gamma[n] = E(z[k]\, z^*[k-n]) \;\; ; \;\; r[n] = E(z[k]\, z[k-n]). \quad (13)$$

Le premier est la fonction de corrélation et le second est dénommé *fonction de relation*. Il est bien connu que $\gamma[n]$ est une fonction définie non négative (DNN), ce qui se traduit par le fait que sa transformée de Fourier (TF) $\Gamma(\nu)$, dénommée densité spectrale, est non négative (NN). Réciproquement, on sait qu'à toute fonction DNN on peut associer au moins un signal $z[k]$ dont cette fonction est la fonction de corrélation.

La question qui se pose alors est de savoir si la fonction de relation $r[n]$ est quelconque. On peut d'abord noter qu'elle peut être nulle. On dit alors que $z[k]$ est *circulaire* du second ordre. Ceci signifie évidemment que les signaux $\exp(j\,\phi)\,z[k]$, quels que soient ϕ, ont les mêmes fonctions de corrélation et de relation que $z[k]$. Cette situation se rencontre en particulier quand $z[k]$ est le signal analytique associé à un signal réel $x[k]$ stationnaire (voir p. 68 de [8]). De plus on voit que $r[n]$ doit être paire, en raison de la stationnarité. Il en est de même de sa TF qui *a priori* est complexe. Introduisons alors le vecteur

$$\mathbf{z}[k] = [z[k], z^*[k]]^T. \quad (14)$$

Soit $\mathbf{\Gamma}(\nu)$ sa matrice spectrale, c'est-à-dire la matrice TF de la matrice $E(\mathbf{z}[k]\,\mathbf{z}^H[k-n])$. Par un calcul élémentaire on trouve que

$$\mathbf{\Gamma}(\nu) = \begin{pmatrix} \Gamma(\nu) & R(\nu) \\ R^*(-\nu) & \Gamma(-\nu) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

On sait (voir p. 72 de [8]) que $\mathbf{\Gamma}(\nu)$ est une matrice DNN. Ceci se produit si et seulement si les éléments diagonaux sont NN, ce qui est réalisé puisqu'il s'agit de la densité spectrale, et le déterminant est NN. Utilisant la parité de $R(\nu)$, cette dernière condition donne

$$|R(\nu)|^2 \leq \Gamma(\nu)\Gamma(-\nu). \quad (16)$$

Il s'agit d'une condition nécessaire que doit satisfaire $R(\nu)$ pour être la TF d'une fonction de relation d'un signal dont la densité spectrale est $\Gamma(\nu)$.

Montrons maintenant que cette condition est suffisante. Dans le cas réel où seule la fonction de corrélation est concernée, cette réciproque est montrée en notant que toute densité spectrale $\Gamma(\nu)$ peut être considérée comme celle de la sortie d'un filtre linéaire attaqué par un bruit blanc de puissance unité. Il suffit que la réponse en fréquence $G(\nu)$ du filtre satisfasse $|G(\nu)|^2 = \Gamma(\nu)$. Cette méthode n'est plus applicable dans le cas complexe.

Pour le voir il convient tout d'abord de calculer comment se transforment les fonctions $\Gamma(\nu)$ et $R(\nu)$ par filtrage linéaire. Appelons respectivement $w[k]$ et $z[k]$ l'entrée et la sortie d'un tel filtre. Par un calcul classique (voir p. 49 de [8]) étendant la formule des interférences on trouve

$$\Gamma_z(\nu) = |G(\nu)|^2\Gamma_w(\nu) \;;\; R_z(\nu) = G(\nu)G(-\nu)R_w(\nu). \quad (17)$$

Un bruit blanc unitaire double est caractérisé par $\Gamma_w(\nu) = R_w(\nu) = 1$, et on obtient donc à la sortie

$$|G(\nu)|^2 = \Gamma(\nu) \;\; ; \;\; G(\nu)G(-\nu) = R(\nu), \quad (18)$$

où les fonctions $\Gamma(\nu)$ et $R(\nu)$ satisfont (16). Or (18) entraîne à l'évidence $|R(\nu)|^2 = \Gamma(\nu)\,\Gamma(-\nu)$, c'est-à-dire la limite supérieure de (16). En conséquence, si cette limite n'est pas atteinte il est impossible de trouver un filtre $G(\nu)$ qui, attaqué par un bruit blanc double, fournisse les fonctions $\Gamma(\nu)$ et $R(\nu)$ données. C'est ici que les systèmes linéaires au sens large prennent de l'intérêt. La relation (1) valable pour des vecteurs s'écrit maintenant

$$z[k] = \sum g[l]\; w[k-l] + \sum h[l]\, w^*[k-l]. \quad (19)$$

Par un calcul qui généralise celui aboutissant à la formule des interférences on obtient

$$|G(\nu)|^2 + |H(\nu)|^2 = \Gamma(\nu), \quad (20)$$

$$G(\nu)\; H(-\nu) + G(-\nu)\; H(\nu) = R(\nu), \quad (21)$$

Si $H(\nu) = 0$ on retrouve évidemment la première équation (18). Posons alors $G(\nu) = [(1/2)\,\Gamma(\nu)]^{1/2}$ et $H(\nu) = G(\nu)\exp[j\phi(\nu)]$, où $\phi(\nu)$ est une phase définie modulo 2π. Il est alors évident que (20) est satisfait. De plus (21) donne

$$[\Gamma(\nu)\;\Gamma(-\nu)]^{1/2}\cos[D(\nu)]\, e^{jS(\nu)} = R(\nu), \quad (22)$$

avec

$$D(\nu) = (1/2)\;[\phi(\nu) - \phi(-\nu)] \;\; ; \;\; S(\nu) = 1/2\;[\phi(\nu) + \phi(-\nu)]. \quad (23)$$

On déduit de (22) que

$$\Gamma(\nu)\;\Gamma(-\nu)\cos^2[D(\nu)] = |R(\nu)|^2, \quad (24)$$

$$S(\nu) = \mathrm{Arg}[R(\nu)]. \quad (25)$$

En raison de (16) on peut trouver au moins une solution à (24) et alors (25) détermine $S(\nu)$. Reprenant (23), on en déduit $\phi(\nu) = D(\nu) + S(\nu)$. Ainsi, à toute paire $\Gamma(\nu)$, $R(\nu)$ satisfaisant (16), on peut associer au moins un système linéaire au sens large qui, attaqué par un bruit blanc double, genère un signal $z[k]$ ayant des propriétés du second ordre caractérisées par cette paire. Ceci montre que (16) est une condition nécessaire et suffisante pour que $R(\nu)$ soit la TF d'une fonction de relation d'un signal de densité spectrale $\Gamma(\nu)$.

On note en particulier que si $\Gamma(\nu)\,\Gamma(-\nu) = 0$, (24) entraîne que $R(\nu) = 0$, ce qui se déduit aussi de (16). Ainsi la condition $\Gamma(\nu)\,\Gamma(-\nu) = 0$ est une condition suffisante de circularité d'un signal complexe stationnaire. Cette condition apparaît en particulier dans le cas du signal analytique pour lequel $\Gamma(\nu) = 0$ si $\nu < 0$. Mais ce n'est pas une condition nécessaire. On peut très bien avoir $R(\nu) = 0$ sans que $\Gamma(\nu)\,\Gamma(-\nu)$ soit nul. Si cette situation se produit il suffit de prendre $D(\nu) = \pi/2$ et $S(\nu)$ quelconque mais paire en raison de (23). Dans ce cas $\phi(\nu) = \frac{\pi}{2} + S(\nu)$ et on voit sur (21) que $R(\nu) = 0$.

4. SIGNAUX AUTORÉGRESSIFS ET PRÉDICTION

Les signaux autorégressifs (AR) complexes sont souvent utilisés en analyse spectrale (voir Ch. 5 et 6 de [1]), mais l'on admet presque unanimement que le bruit excitateur est blanc et circulaire. Ceci signifie que sa densité spectrale est constante et que sa fonction de relation est nulle. Mais s'il en est ainsi, celle du signal AR l'est aussi, en raison de la seconde équation (17). Nous n'allons donc pas introduire cette hypothèse qui n'a rien à voir avec la blancheur. Un signal AR complexe est défini par l'équation aux différences

$$z[k] = \mathbf{a}^H \mathbf{Z}[k] + w[k], \tag{26}$$

où $\mathbf{a}$ est le vecteur de régression, en général complexe et $\mathbf{Z}[k]$ le vecteur du passé de composantes $z[k-i]$, $1 \leq i \leq p$.

La prédiction linéaire de $z[k]$ en fonction de tout son passé vaut évidemment $\mathbf{a}^H \mathbf{Z}[k]$, et dans le cas linéaire il n'y a pratiquement pas de différence entre les signaux autorégressifs réels ou complexes. Ainsi le vecteur de régression $\mathbf{a}$ et l'erreur de prédiction se déduisent des équations normales habituelles

$$\mathbf{\Gamma a} = \mathbf{c} \;\; ; \;\; \epsilon^2 = \gamma[0] - \mathbf{a}^H \mathbf{c}, \tag{27}$$

où $\mathbf{\Gamma}$ est la matrice de covariance de $\mathbf{Z}[k]$ et $\mathbf{c}$ le vecteur de corrélation $E(z^*[k]\,\mathbf{Z}[k])$.

On peut par contre s'intéresser à la prédiction linéaire au sens large à passé fini analogue à (1) et s'écrivant ici

$$\widehat{z}_{LL}[k] = \mathbf{u}^H \mathbf{Z}[k] + \mathbf{v}^H \mathbf{Z}^*[k]. \tag{28}$$

On sait que les performances de cette prédiction ne sont pas inférieures à celles obtenues linéairement et l'on va étudier plus en détail cette question.

On peut tout d'abord noter que si dans (26) le bruit excitateur $w[k]$ est doublement blanc, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ même si la fonction de relation de $z[k]$ n'est pas nulle. On a ainsi un exemple d'une situation évoquée ci-dessus après (11). Rappelons qu'un bruit doublement blanc est caractérisé par le fait que $\Gamma(\nu)$ et $R(\nu)$ sont constants. Pour montrer la propriété indiquée introduisons l'innovation linéaire $\widetilde{z}\,[k] = z[k] - \mathbf{a}^H\,\mathbf{Z}[k]$ qui d'après (26) vaut $w[k]$. Comme $w[k]$ est blanc double, ceci entraîne que $\widetilde{z}\,[k]$ est non corrélé à $z[k-i]$ et $z^*[k-i]$, quel que soit i positif. Il en résulte donc que $\widetilde{z}\,[k]$ est non corrélé à $\mathbf{Z}[k]$ et $\mathbf{Z}^*[k]$, ce qui implique que le prédicteur (28) s'obtient avec $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

En conséquence pour voir une différence entre les deux types de prédiction linéaires (au sens strict et au sens large) il faut supposer que le bruit excitateur $w[k]$ apparaissant en (26) ne soit ni circulaire ($R(\nu) = 0$) ni doublement blanc ($R(\nu) = c$). Vu la complexité des calculs nous allons nous restreindre au cas d'un signal AR d'ordre 1 pour lequel le vecteur $\mathbf{a}$ se réduit à un simple scalaire a. Le prédicteur linéaire s'écrit donc $a^* z[k-1]$ et celui linéaire au sens large prend la forme

$$\widetilde{z}_{LL}[k] = u^* z[k-1] + v^*\, z^*[k-1]. \tag{29}$$

Les deux équations d'orthogonalité (4) et (5) deviennent alors

$$\gamma_0 u + r_0 v = \gamma_1^*, \tag{30}$$

$$r_0^* u + \gamma_0 v = r_1^*. \tag{31}$$

où $\gamma_i = \gamma[i]$ et $r_j = r[j]$, valeurs des fonctions de corrélation et de relation $z[k]$. Ce système d'équations linéaires se résoud sans difficulté et on on a en particulier

$$v = \Delta^{-1}(\gamma_0 r_1^* - r_0^* \gamma_1^*), \tag{32}$$

où le déterminant Δ vaut $\gamma_0^2 - |r_0|^2$. En raison de l'inégalité de Schwarz $\Delta > 0$ si $z[k]$ n'est pas un signal singulier. La formule (11) donnant le gain sur l'erreur prend alors la forme

$$\delta\epsilon^2 \stackrel{\Delta}{=} \epsilon_L^2 - \epsilon_{WL}^2 = (1/\gamma_0)\Delta|v|^2 \tag{33}$$

Comme dans le cas des signaux réels il est intéressant d'exprimer ces résultats en fonction des paramètres définissant le modèle. Celui ci est entièrement caractérisé par le paramètre de régressin a et par les propriétés du bruit excitateur $w[k]$. Appelant σ^2 la variance de ce bruit on obtient, comme dans le cas réel,

$$\gamma_0 = \sigma^2[1 - |a|^2]^{-1} \;\; ; \;\; \gamma_1 = \sigma^2[1 - |a|^2]^{-1} a^*. \tag{34}$$

Le calcul des termes r_0 et r_1 est plus compliqué et non reproduit ici. On obtient alors

$$r_0 = \sigma^2(1 - a^2)^{-1}(\rho_0 + 2a^* T), \tag{35}$$

$$r_1 = a^* r_0 + \sigma^2 T. \tag{36}$$

avec

$$T = \sum_{l=0}^{\infty} (a^*)^l \rho_{l+1}. \tag{37}$$

Dans ces expressions on a écrit la fonction de relation de $w[k]$ sous la forme $r[k] = \sigma^2 \rho_k$. On vérifie en particulier sur ces expressions que si le bruit excitateur est blanc double la quantité T est nulle, ce qui entraîne aussi la nullité de v. Ceci a été montré dans le cas général. L'examen des performances nécessite de connaître la fonction de relation ρ_k, ce qui est analysé dans un travail en cours.

5. RÉFÉRENCES

[1] S. Kay, *Modern Spectral Analysis; Theory and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.

[2] R.A Monzigo and T.W. Miller, *Introduction to adaptive arrays*, Wiley, New-York, 1980.

[3] B. Picinbono, *Signaux aléatoires Tome 3*, Dunod, Paris, 1995.

[4] B. Picinbono, *Signaux aléatoires Tome 1*, Dunod, Paris, 1994.

[5] K. Miller, *Multidimensional Gaussian distributions*, Wiley, New-York, 1964.

[6] M. Loève, *Probability theory*, Springer Verlag, New-York, 1978.

[7] B. Picinbono, *On circularity*, IEEE Trans. Sign. Proc. SP-42, pp. 3473-3482, 1994.

[8] B. Picinbono, *Signaux aléatoires Tome 2*, Dunod, Paris, 1994.