



POUVOIR SÉPARATEUR D'ALGORITHMES À HAUTE RÉOLUTION ANGULAIRE

E. VILLIER, G. VEZZOSI

Laboratoire de Traitement du Signal et de l'Image,
Université de Rennes 1, 35042 Rennes Cedex

Résumé. Cette communication présente un jeu d'expressions analytiques donnant le pouvoir séparateur du goniomètre et de l'algorithme de la norme minimale dans ses deux versions, l'une exploitant la matrice spectrale, l'autre effectuant une pseudo-inversion de la matrice des données. Les formules sont établies dans le cadre du traitement d'antenne, pour un réseau de capteurs de géométrie quelconque. Elles précisent la dépendance du pouvoir séparateur en le nombre de tranches d'observation, le rapport signal à bruit et la géométrie de l'antenne. La discussion repose sur le signe de la dérivée seconde de la réponse moyenne au point milieu, dans le cas de deux sources proches, non corrélées et de même puissance. Le gain en résolution apporté par la rectification de la matrice spectrale est évalué pour le goniomètre et comparé à la borne ultime.

Abstract. This communication introduces a set of analytical expressions for the resolving power of the MUSIC algorithm and the minimum-norm algorithm in its both forms, the first one using the eigendecomposition of the spectral density matrix, the second one performing a pseudo-inversion of the data matrix. The formulas are given in the array signal processing case, for any array geometry. The resolving power is expressed as a function of the number of snapshots, the signal to noise ratio and the array geometry. The criterion used is the sign of the second derivative of the mean algorithm output at the mid-point, in the case of two equipowered, closely spaced uncorrelated sources. The improvement in the resolution carried out by averaging the spectral matrix is obtained and compared to the ultimate bound.

1. Introduction

Le pouvoir séparateur d'un algorithme de traitement d'antenne est sa capacité à séparer deux sources proches. Pour la formation de voies, il est lié à la limite de Rayleigh de l'antenne et ne dépend donc ni du nombre de tranches d'observation K , ni du rapport signal à bruit ρ . Pour les méthodes à haute résolution angulaire, il dépend à la fois de K et ρ . Le but de cette communication est de chiffrer analytiquement cette dépendance pour une antenne de géométrie quelconque, dans le cas du goniomètre et de l'algorithme de la norme minimale dans ses deux versions, l'une exploitant la matrice spectrale, l'autre effectuant une pseudo-inversion de la matrice des données. Ceci généralise les résultats de [1] et [2] établis pour le goniomètre, dans le cas d'une antenne linéaire à pas constant. Dans ce cas particulier, on donne également le gain en résolution apporté par la rectification de la matrice spectrale. La discussion se limite au cas de deux sources proches, non corrélées et de même puissance.

2. Algorithmes de localisation

L'observation des sources émettant un signal à bande étroite est perturbée par un bruit blanc, gaussien, complexe, circulaire, centré et décorrélé de capteur à capteur. Les données traitées sont une suite de K vecteurs ($\underline{x}_k, k = 1..K$) indépendants et de même loi, \underline{x}_k étant la transformée de Fourier des sorties de capteurs de la tranche k à la fréquence de travail.

On note N le nombre de capteurs, $\underline{D} = [\underline{d}_1 \ \underline{d}_2]$ la matrice des deux vecteurs sources normés à \sqrt{N} , $\underline{\Gamma}$ la matrice de covariance des sources normalisée par la puissance du bruit,

$\underline{S} = \underline{D}\underline{\Gamma}\underline{D}^\dagger$ la matrice de densité spectrale du signal, $\underline{R} = \underline{S} + \underline{I}$ la matrice de densité spectrale exacte des observations, $\underline{\Pi} = \underline{D}(\underline{D}^\dagger \underline{D})^{-1} \underline{D}^\dagger$ le projecteur sur l'espace signal, $\underline{\Pi}^\perp = \underline{I} - \underline{\Pi}$ le projecteur sur l'espace bruit et $\underline{A} = [\underline{x}_1 \ \dots \ \underline{x}_K]^\dagger$ la matrice des données. La matrice spectrale est estimée par $\hat{\underline{R}} = \underline{A}^\dagger \underline{A} / K$ et le projecteur bruit par :

$$\hat{\underline{\Pi}}^\perp = \sum_{i=P+1}^N \hat{\underline{u}}_i \hat{\underline{u}}_i^\dagger,$$

où les $\hat{\underline{u}}_i$ sont les vecteurs propres associés aux $N - P$ plus petites valeurs propres de $\hat{\underline{R}}$. Les algorithmes sont présentés dans le cas exact (sans bruit) pour simplifier. La formation de voies consiste à rechercher les maxima de $P_{FV} = \underline{d}^\dagger \underline{R} \underline{d}$ et le goniomètre [3] les minima de $P_G = \underline{d}^\dagger \underline{\Pi}^\perp \underline{d}$. Proposé par Kumaresan et Tufts [4] pour une antenne linéaire à pas constant, l'algorithme de la norme minimale recherche les minima de $P_{MN} = |\underline{d}^\dagger \underline{a}|^2$ où \underline{a} est le vecteur du sous-espace bruit de norme minimale ayant un sur sa première composante. Le choix de la première composante est arbitraire. Il se trouve que ce choix est optimal, tant du point de vue de la résolution que de la variance, pour une antenne linéaire. Cet algorithme se généralise de façon évidente à une antenne de géométrie quelconque, et il y a alors N réponses possibles suivant le choix du capteur de référence. Il existe en fait deux versions de cette méthode, suivant la façon dont est calculé le vecteur \underline{a} .

La première utilise, comme le goniomètre, la décomposition de \underline{R} . Elle est liée à une méthode discutée antérieurement par Reddi [5] et sera appelée min norm KTR. Dans cette version, le vecteur \underline{a} est donné par $\underline{a} = \underline{\Pi}^\perp \underline{e}_k / \gamma_k$ où $\gamma_k = \underline{e}_k^\dagger \underline{\Pi}^\perp \underline{e}_k$ et



\underline{e}_k est le vecteur ayant un pour composante k et 0 ailleurs. On remarque alors que la réponse du goniomètre est la somme pondérée des N réponses du min norm.

La deuxième façon de calculer le vecteur de norme minimale est de résoudre au sens des moindres carrés le système $A\underline{a} = -\underline{b}$ où A est la matrice des données privée de \underline{b} , sa $k^{\text{ème}}$ colonne. La solution d'un tel système est $\underline{a} = -A^{\#}\underline{b}$ où $A^{\#}$ désigne l'inverse généralisée de Moore-Penrose ou pseudo-inverse de A . On appellera min norm KT cette version de l'algorithme.

3. Évaluation du pouvoir séparateur

Critère de résolution. On note θ, ψ les angles de gisement et de site respectivement. Soient deux sources de même puissance écartées de $(\Delta\theta, \Delta\psi)$ symétriquement autour d'une direction d'arrivée (θ_0, ψ_0) . Pour une antenne de géométrie quelconque, le vecteur directionnel est paramétré par :

$$\underline{d}(t) = \underline{d}(\theta_0 + t\Delta\theta/2, \psi_0 + t\Delta\psi/2), \quad (3.1)$$

où $1 \geq t \geq -1$. La limite de résolution est atteinte lorsque l'écart entre les sources est tel que la dérivée seconde par rapport à t de la réponse moyenne de l'algorithme s'annule au point milieu (θ_0, ψ_0) [1].

Cette réponse moyenne est approximée par le développement quadratique par rapport au bruit de la réponse réelle, développement dont on prend l'espérance mathématique. La recherche des couples $(\Delta\theta, \Delta\psi)$ annulant la dérivée seconde au point milieu ne pourrait être faite que numériquement. Pour éviter cela, il suffit de fixer l'écart entre les sources à une valeur correspondant à la limite de résolution de la formation de voies, puis à rechercher la valeur de x ($x \ll 1$) telle que la dérivée seconde au point milieu soit nulle pour l'écart $(x\Delta\theta, x\Delta\psi)$. Le gain en pouvoir séparateur de la méthode à haute résolution par rapport à la formation de voies est alors donné par $1/x$.

Pratiquement on est amené à remplacer dans la réponse moyenne les vecteurs sources $\underline{d}_1 = \underline{d}(1)$ et $\underline{d}_2 = \underline{d}(-1)$ par leur développement en série. Ce dernier s'obtient en développant l'expression (3.1) du vecteur directionnel :

$$\underline{d}(t) = \underline{\delta}_0 + t\underline{\delta}_1 + \frac{1}{2}t^2\underline{\delta}_2 + \frac{1}{6}t^3\underline{\delta}_3 + \dots, \quad (3.2)$$

où $\underline{\delta}_k = d^k \underline{d}(t) / dt^k|_{t=0}$. Les deux premières dérivées valent :

$$\underline{\delta}_1 = (\Delta\theta \underline{d}_{\theta} + \Delta\psi \underline{d}_{\psi}) / 2, \quad (3.3)$$

$$\text{et } \underline{\delta}_2 = ((\Delta\theta)^2 \underline{d}_{\theta\theta} + (\Delta\psi)^2 \underline{d}_{\psi\psi} + 2\Delta\theta \Delta\psi \underline{d}_{\theta\psi}) / 4, \quad (3.4)$$

où \underline{d}_{θ} et \underline{d}_{ψ} sont les dérivées premières de $\underline{d}(t)$ par rapport à θ et ψ évaluées en $t=0$, la notation s'appliquant de façon évidente aux dérivées d'ordre supérieur. La nullité de la dérivée seconde conduit ainsi à chercher les zéros d'un polynôme en les deux variables $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$. De plus tout produit scalaire $(\underline{\delta}_m, \underline{\delta}_n) = \underline{\delta}_n^T \underline{\delta}_m$ est un polynôme homogène de degré $m+n$ en les variables $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$, c'est-à-dire que pour tout x :

$$(\underline{\delta}_m, \underline{\delta}_n)|_{(x\Delta\theta, x\Delta\psi)} = x^{m+n} (\underline{\delta}_m, \underline{\delta}_n)|_{(\Delta\theta, \Delta\psi)}, \quad (3.5)$$

Remarque. Le vecteur source étant normé à \sqrt{N} pour tout t , si l'on choisit l'origine du repère à l'isobarycentre des capteurs, on a les produits scalaires suivants qui interviennent fréquemment au cours des calculs :

$$(\underline{\delta}_0, \underline{\delta}_1) = 0 \quad \text{et} \quad (\underline{\delta}_0, \underline{\delta}_2) = -|\underline{\delta}_1|^2. \quad (3.6)$$

La formation de voies. La réponse moyenne de la formation de voies s'écrit $E \hat{P}_{FV}(t) = \underline{d}^T(t) R \underline{d}(t)$. La nullité du développement quadratique de la dérivée seconde en $t=0$ de cette réponse est exprimée par la relation :

$$-2N|\underline{\delta}_1|^2 + 3|\underline{\delta}_1|^4 + N|\underline{\delta}_2|^2 = 0. \quad (3.7)$$

Cette équation peut être résolue analytiquement dans le cas d'une antenne linéaire à pas constant, où l'on ne tient compte que du gisement. En posant $\omega = 2\pi d / \lambda \sin \theta$ où d est la distance intercepteur et λ la longueur d'onde, le vecteur source s'écrit :

$$\underline{d}(t) = \left(\exp(i(n - \frac{N+1}{2})(\omega_0 + t\frac{\Delta\omega}{2})), n = 1..N \right).$$

La limite de résolution vaut alors :

$$\Delta\omega = 2\sqrt{10 / (2N^2 - 3)}, \quad (3.8)$$

résultat identique à celui donné dans [1]. Pour tout autre antenne où l'on tient compte du gisement et du site, il faut résoudre numériquement l'équation (3.7) dont les solutions forment une courbe de degré 4 en $(\Delta\theta, \Delta\psi)$.

Algorithmes à haute résolution. Les calculs conduisant au gain en pouvoir séparateur de ces algorithmes par rapport à la formation de voies sont trop longs pour figurer ici. Tous les détails sont exposés dans [6]. La première étape consiste à déterminer l'espérance du développement quadratique de la réponse des trois algorithmes cités au §2, par une analyse de perturbation du projecteur bruit et de la pseudo-inverse. Ces expressions sont établies dans le cas de P sources de matrice de covariance Γ . On en déduit la dérivée seconde au point milieu dans le cas particulier de deux sources incohérentes et de même puissance, soit $\Gamma = \rho I$ où ρ est le rapport signal à bruit d'entrée par source et par capteur. Pour des raisons de simplicité, la discussion du pouvoir séparateur amène à distinguer deux cas : soit K est fixé et $\rho \rightarrow +\infty$, soit ρ est fixé et $K \rightarrow +\infty$. Les résultats sont résumés dans la table 1 où l'on a posé :

$$\gamma_k = 1 - 1 / N + |\underline{e}_k^T \underline{\delta}_1|^2 / |\underline{\delta}_1|^2,$$

$$\underline{z} = |\underline{\delta}_1|^2 \underline{\delta}_0 / N - (\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2)^* \underline{\delta}_1 / |\underline{\delta}_1|^2 + \underline{\delta}_2,$$

et où \underline{e}_k est le vecteur ayant un pour composante k et 0 ailleurs.

	goniomètre	min norm KTR
K fixé, $\rho \rightarrow +\infty$	$\left[K\rho \frac{ \underline{z} ^2}{N-2} \right]^{1/4}$	$\left[K\rho \frac{ \underline{e}_k^T \underline{z} ^2}{\gamma_k} \right]^{1/4}$
ρ fixé, $K \rightarrow +\infty$	$\left[K\rho^2 2 \underline{\delta}_1 ^2 \frac{ \underline{z} ^2}{N-2} \right]^{1/6}$	$\left[K\rho^2 2 \underline{\delta}_1 ^2 \frac{ \underline{e}_k^T \underline{z} ^2}{\gamma_k} \right]^{1/6}$

Table 1 : Gain en pouvoir séparateur

Les deux versions du min norm ont les mêmes performances à fort rapport signal à bruit. Par contre le min norm KT ne converge pas avec le nombre de tranches d'observations. Il suffit donc de comparer le goniomètre et le min norm KTR, ces algorithmes exploitant tous deux la matrice spectrale des

observations. Pour K fixé et $\rho \rightarrow +\infty$, le gain en pouvoir séparateur des méthodes à haute résolution suit une loi en $(K\rho)^{1/4}$, tandis que si ρ est fixé et $K \rightarrow +\infty$ la loi est en $(K\rho^2)^{1/6}$. Ces deux lois sont affectées d'un coefficient qui ne dépend que de la géométrie de l'antenne.

Antenne linéaire. Pour une antenne linéaire à pas constant, les expressions de la table 1 peuvent être exprimées analytiquement en fonction du nombre de capteurs. Les vecteurs \underline{d}_1 et \underline{d}_2 sont orthogonaux. La limite de résolution $\Delta\omega$ de la formation de voies est donnée en (3.8). Le gain du goniomètre et du min norm sont alors donnés par η_G et η_{MN} respectivement dans les deux cas suivants.

1. K fixé et $\rho \rightarrow +\infty$

$$\eta_G = \left[K\rho \frac{5}{3^2} \frac{N(N^2-1)(N+2)}{(2N^2-3)^2} \right]^{1/4}, \quad (3.9)$$

et
$$\eta_{MN} = \left[K\rho \frac{5^2}{3^2} \frac{N(N^2-1)(N-2)}{(2N^2-3)^2} \right]^{1/4}. \quad (3.10)$$

2. ρ fixé et $K \rightarrow +\infty$

$$\eta_G = \left[K\rho^2 \frac{5^2}{3^3} \frac{N^2(N^2-1)^2(N+2)}{(2N^2-3)^3} \right]^{1/6}, \quad (3.11)$$

et
$$\eta_{MN} = \left[K\rho^2 \frac{5^3}{3^3} \frac{N^2(N^2-1)^2(N-2)}{(2N^2-3)^3} \right]^{1/6}. \quad (3.12)$$

Dans les deux cas le min norm est plus résolvant que le goniomètre d'un facteur :

$$\eta_{MN/G} = [5(N-2)/(N+2)]^{1/4} \text{ soit } 1.5 \text{ pour } N \gg 2,$$

$$\eta_{MN/G} = [5(N-2)/(N+2)]^{1/6} \text{ soit } 1.3 \text{ pour } N \gg 2.$$

Remarque 1. Le gain en pouvoir séparateur du min norm dépend du capteur k choisi comme référence. C'est une fonction symétrique par rapport au milieu de l'antenne et maximum pour $k=1$. Les relations (3.10) et (3.12) correspondent au gain maximum.

Remarque 2. (3.9) est identique au résultat de [1] pour $N \gg 1$. La relation établie dans [2] donne la même dépendance en K et ρ que (3.9) et (3.11), mais le facteur par devant est différent (quoique très proche), les auteurs ayant utilisé un critère de résolution autre que la nullité de la dérivée seconde.

Antenne circulaire. On considère une antenne dans le plan (Oxy) dont les $N=11$ capteurs sont équirépartis sur un cercle de rayon R tel que $4\pi R = \lambda N$. Le gain en résolution du min norm est calculé pour chaque valeur k du capteur choisi comme référence. Ce gain est donné par les relations de la table 1 qui nécessitent la connaissance de la limite de résolution de la formation de voies de cette antenne. Cette limite est obtenue numériquement en traçant la courbe solution de (3.7). Pour un point milieu situé en $(\theta_0, \psi_0) = (20^\circ, 50^\circ)$, on extrait par exemple de cette courbe le point $(\Delta\theta, \Delta\psi) = (20.6^\circ, 17.6^\circ)$.

Les figures 1 et 2 représentent le coefficient de la loi en $(K\rho)^{1/4}$ et $(K\rho^2)^{1/6}$ respectivement, pour le min norm et le goniomètre. L'importance du choix du capteur de référence y apparaît clairement puisque dans certains cas le min norm est

moins résolvant que le goniomètre. Pour le choix optimal $k=9$, le min norm est cependant un peu plus performant d'un facteur 1.19 et 1.26 pour les deux lois.

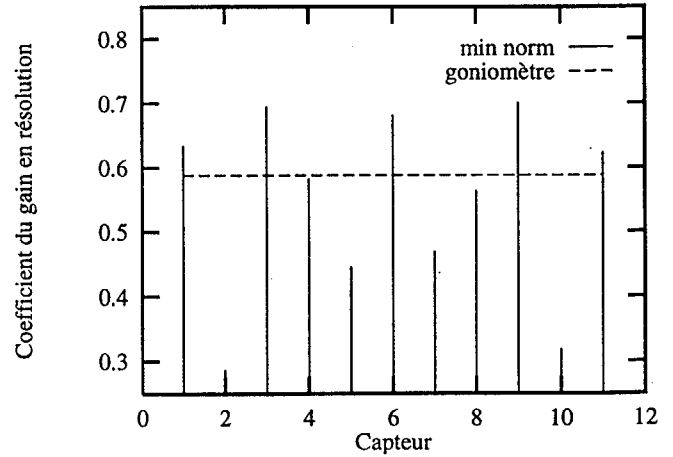


Figure 1 : Coefficient de la loi en $(K\rho)^{1/4}$

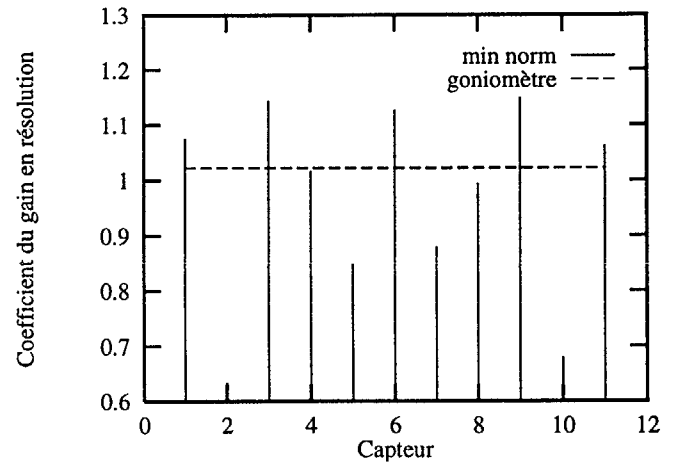


Figure 2 : Coefficient de la loi en $(K\rho^2)^{1/6}$

Variance des estimateurs. Si le min norm est un peu supérieur au goniomètre en résolution, sa variance est cependant bien plus grande. Par exemple, dans le cas du problème plan et d'une source unique, on montre que la variance du gisement du min norm KTR vaut :

$$\text{var } \Delta\theta_{MN} = \frac{(1+\rho N)(N-1)}{2K(\rho N)^2 |\underline{e}_k^T \underline{d}_\theta|^2}, \quad (3.13)$$

tandis que celle du goniomètre est bien connue pour atteindre la borne de Cramér-Rao :

$$\text{var } \Delta\theta_G = \frac{1+\rho N}{2K\rho^2 N |\underline{d}_\theta|^2}. \quad (3.14)$$

Dans le cas d'une antenne linéaire à pas constant, le choix optimal donnant la plus petite variance du min norm est là aussi $k=1$. Le rapport entre (3.13) et (3.14) vaut alors $(N+1)/3$.

4. Le goniomètre rectifié

Dans le cas particulier d'une antenne linéaire à pas constant, il est bien connu qu'un prétraitement de la matrice spectrale, consistant à la moyenniser le long de ses diagonales avant de la décomposer en éléments propres, améliore de façon spectaculaire le pouvoir séparateur du goniomètre.



Pour un faible rapport signal à bruit, on montre [6] que le gain en résolution obtenu par cette simple opération par rapport au goniomètre non rectifié vaut approximativement pour $N \gg 1$:

$$\left[\frac{30}{43} (N-2) \right]^{1/6}. \quad (4.1)$$

Ce résultat peut s'interpréter en disant que la rectification a pour effet de multiplier le temps d'intégration par 0.7 fois le nombre de capteurs.

On vérifie par simulation la validité de la relation précédente dans les conditions suivantes. Les capteurs sont équidistants d'une demi-longueur d'onde. Les deux sources sont placées symétriquement par rapport au travers de l'antenne et écartées de $\Delta\omega$. En effectuant 10 000 tirages indépendants de K vecteurs d'observation, on mesure la probabilité de résolution pour différentes valeurs de K , ρ et N telles que le produit $K\rho^2\eta_R$ reste constant, avec $\eta_R = 1$ pour le goniomètre non rectifié et $\eta_R = 0.7(N-2)$ pour le goniomètre rectifié. Les résultats sont reportés dans les tableaux suivants. Ils confirment pour des valeurs raisonnables de K , ρ et N , la validité de la relation (4.1).

K	ρ	Rectification	Probabilité
500	-12 dB	non	0.47
160	-15 dB	oui	0.47
100	-14 dB	oui	0.45

Table 2 : $\Delta\omega = 0.18$ et $N = 20$

K	ρ	Rectification	Probabilité
100	-10.0 dB	non	0.51
100	-16.5 dB	oui	0.51
50	-15.0 dB	oui	0.48

Table 3 : $\Delta\omega = 0.135$ et $N = 30$

5. Borne ultime

Ce paragraphe tente de donner la dépendance entre K , ρ et la géométrie de l'antenne correspondant à la meilleure performance possible en résolution. Suivant [1] le problème est posé sous la forme d'un test d'hypothèses dans lequel la position des sources est connue. Soit H_2 l'hypothèse " deux sources présentes et de même rapport signal à bruit ρ " et H_1 l'hypothèse " une source présente au point milieu et de rapport signal à bruit 2ρ ". La matrice spectrale exacte d'une tranche d'observation sous les deux hypothèses s'écrit :

$$H_2 : \mathbf{R}_2 = \mathbf{I} + \rho(\underline{\mathbf{d}}_1 \underline{\mathbf{d}}_1^\dagger + \underline{\mathbf{d}}_2 \underline{\mathbf{d}}_2^\dagger),$$

$$\text{et } H_1 : \mathbf{R}_1 = \mathbf{I} + 2\rho \underline{\mathbf{d}}_0 \underline{\mathbf{d}}_0^\dagger.$$

Le détecteur optimal compare à un seuil s le logarithme du rapport de vraisemblance Λ :

$$\Lambda = \text{tr}(\mathbf{R}_1^{-1} - \mathbf{R}_2^{-1}) \hat{\mathbf{R}} \underset{H_1}{\overset{H_2}{\geq}} s,$$

où $\hat{\mathbf{R}}$ est une estimée de la matrice spectrale. La dépendance entre K , ρ et la géométrie de l'antenne, est obtenue en calculant

la divergence de Kullback [7] des deux hypothèses. Ce critère est supposé pertinent puisqu'il est lié asymptotiquement à la probabilité d'erreur du test pour $K \rightarrow +\infty$. La divergence est définie par :

$$J_K = E(\Lambda | H_2) - E(\Lambda | H_1).$$

L'indépendance des observations entraîne $J_K = K J$ avec

$$J = \text{tr}(\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1) - 2N.$$

Des approximations analogues à celles faites pour le calcul du pouvoir séparateur amènent [6] :

$$J_K = \frac{2K\rho^2}{1+2\rho N} \left[N|\underline{\delta}_2|^2 + |\underline{\delta}_1|^4 (3 + 8\rho^2 N^2 / (1+2\rho N)) \right]. \quad (5.2)$$

Ce résultat est valide pour une antenne de géométrie quelconque. Dans le cas particulier d'une antenne linéaire à pas constant, les modules au carré de $\underline{\delta}_1$ et $\underline{\delta}_2$ s'expriment facilement en fonction du rapport $\Delta\omega_{FV} / \Delta\omega$ où $\Delta\omega_{FV}$ est la limite de résolution de la formation de voies et $\Delta\omega$ l'écart entre les deux sources. Ce rapport η_{ult} est donc le gain ultime en résolution par rapport à la formation de voies. En se plaçant à faible rapport signal à bruit, ce gain s'exprime simplement en fonction de la divergence :

$$\eta_{ult} \sim (K\rho^2 N^2 / J_K)^{1/4}. \quad (5.3)$$

Ce résultat doit être comparé à la loi du goniomètre rectifié obtenue sous les mêmes conditions. A une constante multiplicative près, celle-ci vaut d'après (3.11) et (4.1) :

$$\eta_{GR} \sim (K\rho^2 N^2)^{1/6}. \quad (5.4)$$

Par conséquent le goniomètre rectifié n'atteint pas la borne ultime en résolution.

6. Conclusion

Un jeu de formules analytiques donnant le pouvoir séparateur du goniomètre et de l'algorithme de la norme minimale a été établi pour une antenne de géométrie quelconque. Ce dernier est un peu plus résolvant que le goniomètre, mais au prix d'une variance plus importante. Le gain apporté par la rectification a été chiffré dans le cas du goniomètre et on a montré qu'il reste inférieur au gain ultime.

RÉFÉRENCES

- [1] D. Thubert, L. Kopp, *Measurement accuracy and resolving power of high resolution passive methods*, Proc. EUSIPCO 86, La Haye.
- [2] M. Kaveh, H. Wang, *Advances in spectrum analysis and array processing* (S. Haykin, Ed.), Chapitre 5, vol. II, Prentice Hall, 1991.
- [3] G. Bienvenu, L. Kopp, *Principe de la goniométrie passive adaptative*, Proc. GRETSI, Nice, mai 1979, p. 106/1-106/10.
- [4] R. Kumaresan, D.W. Tufts, *Estimating the angle of arrival of multiple plane waves*, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 19, n° 1, janvier 1983.
- [5] S.S. Reddi, *Multiple source location - A digital approach*, IEEE Trans. on AES, vol. 15, n° 1, janvier 1979.
- [6] E. Villier, *Contribution aux méthodes à sous-espaces en traitement du signal*, Thèse de l'Université de Rennes 1, 1995.
- [7] S. Kullback, *Information theory and statistics*, Wiley, 1959.