



## FILTRAGE D'ANTENNE OPTIMAL POUR SIGNAUX NON STATIONNAIRES - CONCEPTS, PERFORMANCES

Pascal Chevalier

Thomson-CSF, Division RGS, 66 rue du Fossé Blanc, 92231 Gennevilliers

### RESUME

Depuis plusieurs décennies, la problématique du filtrage d'antenne optimal consiste essentiellement, sous l'hypothèse de signaux stationnaires, à mettre en oeuvre un filtre complexe *linéaire et Invariant dans le Temps* (IT) optimisant un critère à l'ordre deux en sortie sous d'éventuelles contraintes. Optimale pour des signaux stationnaires, cette démarche s'avère sous-optimale en présence de signaux non stationnaires pour lesquels les filtres complexes optimaux deviennent *Variables dans le Temps* (VT) et, sous certaines conditions de non circularité, *Linéaires au Sens Large* (LSL). L'objet de ce papier est de prouver ces résultats, d'effleurer les problèmes de mise en oeuvre des filtres VT, de donner un sens à la démarche classique pour des signaux non stationnaires et de montrer, sur un exemple emprunté aux radiocommunications, l'intérêt des structures LSL par rapport aux structures linéaires en environnement non stationnaire.

### 1. INTRODUCTION

Depuis plusieurs décennies, la problématique du filtrage d'antenne optimal consiste principalement à mettre en oeuvre un filtre complexe, spatio-temporel dans le cas général, *linéaire et Invariant dans le Temps* (IT),  $\mathbf{h}$ , dont la sortie  $y(t) = \mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}(t)$ , où  $\mathbf{x}(t)$  est le vecteur des enveloppes complexes des observations spatio-temporelles issues des capteurs, optimise un critère à l'ordre deux sous d'éventuelles contraintes [1]. Il est montré dans ce papier que cette démarche, optimale pour des signaux stationnaires, ne l'est plus pour des signaux non stationnaires, dont l'enveloppe complexe est généralement non circulaire [2] et pour lesquels les filtres complexes optimaux deviennent *Variables dans le Temps* (VT) et, sous certaines conditions de non circularité présentées dans ce papier, *Linéaires au Sens Large* (LSL) [3], c'est-à-dire de la forme  $y(t) = \mathbf{h}_1(t)^\dagger \mathbf{x}(t) + \mathbf{h}_2(t)^\dagger \mathbf{x}(t)^*$ , où \* signifie complexe conjugué et où  $\mathbf{h}_1(t)$  et  $\mathbf{h}_2(t)$  sont des filtres complexes VT. Notons que les filtres VT optimaux ont dores et déjà fait l'objet de quelques travaux, en réception mono capteur, pour des signaux cyclostationnaires [4-5]. Les structures LSL ont, quant à elles, été introduites pour la première fois dans [6] dans un contexte restrictif. Leur intérêt pour des signaux cyclostationnaires a été signalé plus récemment dans [7] sans démonstration d'optimalité et sans référence au concept de non circularité. Enfin leur intérêt en estimation et en détection dans des contextes non circulaires a été développé tout récemment

### ABSTRACT

Since several decade, the optimal array filtering problem consists mainly to implement a complex *linear and Time Invariant* (TI) filter, optimizing a second order criterion at the output under some constraints and assuming stationary signals. Optimal for stationary signals this approach becomes sub-optimal for non stationary signals for which the optimal complex filters are *Time Variant* (TV) and, under some conditions of non circularity, *Widely Linear* (WL). The purpose of this paper is to demonstrate these results, to touch lightly on the implementation problems of TV filters, to give a sense to the classical approach for non stationary signals and to show, on a particular example borrowed from the radiocommunications field, the interest of WL structures with respect to linear ones in non stationary environments.

respectivement dans [3] et [8]. Signalons en outre que l'intérêt de pondérer séparément  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}(t)^*$  en contexte non circulaire ne se limite pas aux structures LSL mais subsiste pour des filtres non linéaires plus généraux tels que les filtres linéaire-quadratique complexes [1], [9], [10] ou les filtres de Volterra complexes d'ordre plus important [1], [9]. Après avoir démontré l'optimalité des filtres linéaires et IT en contexte stationnaire et présenté les conditions d'optimalité des filtres VT et LSL en environnement non stationnaire, omniprésent en radiocommunications, les problèmes de mise en oeuvre de ces filtres sont effleurés et un sens est donné à la démarche classique pour des signaux non stationnaires. L'intérêt des structures LSL par rapport aux structures linéaires en environnement non stationnaire et non circulaire est alors démontré sur un exemple emprunté aux radiocommunications.

### 2. PROBLEMATIQUE CLASSIQUE DU FILTRAGE D'ANTENNE OPTIMAL

On considère une antenne à  $N$  capteurs et l'on note  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur des enveloppes complexes des observations spatio-temporelles issues des capteurs. Typiquement, pour des structures spatio-temporelles intégrant des filtres à RIF à  $L$  coefficients derrière les capteurs, le vecteur  $\mathbf{x}(t)$  est défini par  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t)^\top, \mathbf{x}_2(t)^\top, \dots, \mathbf{x}_N(t)^\top]^\top$  où  $\mathbf{x}_i(t)$  est le vecteur constitué de  $L$  échantillons complexes du signal issu du capteur  $i$ . Dans ces conditions, la problématique classique du filtrage



d'antenne optimal consiste généralement à mettre en oeuvre le filtre spatio-temporel, *linéaire* et IT  $\mathbf{h}$  ( $NL \times 1$ ) dont la sortie  $y(t) = \mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}(t)$  minimise l'erreur quadratique moyenne (EQM)

$$\mathcal{E}(t) \triangleq E[|d(t) - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}(t)|^2] \quad (2.1)$$

sous certaines contraintes lorsque  $d(t) \equiv 0$ , où  $d(t)$  est un signal dont la signification dépend de l'application [1].

En radiocommunications, le signal  $d(t)$  est généralement une enveloppe complexe de référence, corrélée avec le signal utile et décorrélée des interférences et du bruit, correspondant souvent à une séquence d'apprentissage introduite dans la forme d'onde [1]. D'autre-part, lorsque la direction d'arrivée du signal utile est connue ou estimée, on cherche généralement à minimiser la puissance de sortie de l'antenne, ce qui signifie que  $d(t) \equiv 0$ , sous une contrainte de non distorsion du signal utile [1]. En détection, lorsque les lois de probabilités des observations sous H0 (bruit seul) et H1 (signal plus bruit) sont inconnues, on peut chercher à maximiser un critère de déflexion en sortie [8-10], ce qui équivaut là encore à minimiser l'EQM (2.1) où  $d(t)$  correspond, dans ce cas, au rapport des vraisemblances sous H1 et H0 [1] [9], quantité réelle. Ainsi, comme on le voit, le critère (2.1) est le critère générique du filtrage d'antenne optimal classique.

### 3. FILTRAGE D'ANTENNE OPTIMAL POUR SIGNAUX NON STATIONNAIRES

#### 3.1 Problématique générale du filtrage d'antenne optimal

La problématique générale du filtrage d'antenne optimal est de pondérer, en phase et en amplitude, les signaux réels sur porteuse, stationnaires ou non, reçus par les capteurs de l'antenne, de manière à générer une sortie optimisant un critère. Il est bien connu [11] que pondérer en phase et en amplitude un signal réel sur porteuse équivaut à pondérer ce signal et son signal en quadrature par des coefficients réels. Dans ces conditions, en se limitant à l'exploitation des statistiques d'ordre deux des signaux capteurs et en tenant compte des remarques du paragraphe précédent concernant le caractère générique du critère de minimisation d'une EQM sous d'éventuelles contraintes, la problématique générale du filtrage d'antenne optimal consiste à mettre en oeuvre les filtres spatio-temporels *réels* et *linéaires*  $\mathbf{h}_r(t)$  et  $\mathbf{h}_q(t)$ , de dimension ( $NL \times 1$ ), de manière à ce que la sortie réelle  $y_r(t) = \mathbf{h}_r(t)^\top \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{h}_q(t)^\top \mathbf{x}_q(t)$  minimise l'EQM

$$\mathcal{E}_r(t) \triangleq E[|d_r(t) - \mathbf{h}_r(t)^\top \mathbf{x}_r(t) - \mathbf{h}_q(t)^\top \mathbf{x}_q(t)|^2] \quad (3.1)$$

sous certaines contraintes lorsque  $d_r(t) \equiv 0$ , où  $d_r(t)$  est un signal réel dont la signification dépend de l'application (§ 2), où  $\mathbf{x}_r(t)$  est le vecteur des observations spatio-temporelles réelles reçues par les capteurs et où les composantes du vecteur  $\mathbf{x}_q(t)$  sont les signaux en quadrature des composantes de  $\mathbf{x}_r(t)$ .

En notant  $d_a(t)$  le signal analytique de  $d_r(t)$ ,  $\mathbf{x}_a(t)$  le vecteur dont les composantes sont les signaux analytiques des composantes de  $\mathbf{x}_r(t)$  et en définissant les quantités  $\mathbf{h}(t)$ ,  $\mathbf{H}(t)$  et  $\mathbf{X}(t)$  respectivement par  $\mathbf{h}(t) \triangleq \mathbf{h}_r(t) + j\mathbf{h}_q(t)$ ,  $\mathbf{H}(t) \triangleq (1, -\mathbf{h}(t)^\top)^\top$  et  $\mathbf{X}_a(t) \triangleq (d_a(t), \mathbf{x}_a(t)^\top)^\top$ , il est aisé de montrer que  $e_r(t) \triangleq d_r(t) - y_r(t) = \text{Re}[\mathbf{H}(t)^\dagger \mathbf{X}_a(t)]$  et que l'expression (3.1) s'écrit

$$\mathcal{E}_r(t) = \frac{1}{4} [2\mathbf{H}(t)^\dagger R_{X(t)} \mathbf{H}(t) + \mathbf{H}(t)^\dagger C_{X(t)} \mathbf{H}(t)^* + \mathbf{H}(t)^\top C_{X(t)}^* \mathbf{H}(t)] \quad (3.2)$$

où  $R_{X(t)} \triangleq E[\mathbf{X}_a(t) \mathbf{X}_a(t)^\dagger]$  et  $C_{X(t)} \triangleq E[\mathbf{X}_a(t) \mathbf{X}_a(t)^\top]$ . La problématique générale du filtrage d'antenne à l'ordre deux optimal consiste ainsi à mettre en oeuvre le filtre complexe  $\mathbf{H}(t)$  minimisant l'EQM  $\mathcal{E}_r(t)$  sous d'éventuelles contraintes.

#### 3.2 Cas stationnaire

Lorsque le triplet  $(d_r(t), \mathbf{x}_r(t), \mathbf{x}_q(t))$  est conjointement stationnaire, ce qui équivaut à dire que  $\mathbf{X}_a(t)$  est stationnaire, alors  $R_{X(t)}$  et  $C_{X(t)}$  ne dépendent pas du temps et par conséquent le filtre  $\mathbf{H}(t)$  minimisant  $\mathcal{E}_r(t)$  sous d'éventuelles contraintes devient IT. D'autre-part, la stationnarité du vecteur analytique  $\mathbf{X}_a(t)$  engendre sa circularité à l'ordre 2 [1, p 426], [2], [9, p 473] et donc la nullité de  $C_{X(t)}$ . Dans ces conditions, l'expression (3.2) s'écrit

$$\mathcal{E}_r(t) = \frac{1}{2} \mathbf{H}^\dagger R_X \mathbf{H} = \frac{1}{2} E[|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{X}_a(t)|^2] = \frac{1}{2} E[|d_a(t) - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}_a(t)|^2] \quad (3.3)$$

ce qui correspond aussi à (2.1) (à une constante près), où  $d(t)$  est l'enveloppe complexe de  $d_r(t)$  et où  $\mathbf{x}(t)$  est le vecteur dont les composantes sont les enveloppes complexes des composantes de  $\mathbf{x}_r(t)$ . Ce résultat montre ainsi l'optimalité de la démarche classique, c'est-à-dire des filtres complexes *linéaires* et IT, lorsque  $\mathbf{X}_a(t)$  est stationnaire.

#### 3.3 Cas non stationnaire

Lorsque  $\mathbf{X}_a(t)$  est non stationnaire, les quantités  $R_{X(t)}$  et  $C_{X(t)}$  dépendent généralement du temps et par conséquent le filtre  $\mathbf{H}(t)$  minimisant  $\mathcal{E}_r(t)$  sous d'éventuelles contraintes devient VT.

Lorsque, d'autre-part,  $\mathbf{X}_a(t)$  est circulaire à l'ordre 2, le raisonnement du paragraphe précédent peut-être redéveloppé et l'expression (3.2) s'écrit

$$\mathcal{E}_r(t) = \frac{1}{2} E[|d(t) - \mathbf{h}(t)^\dagger \mathbf{x}(t)|^2] \quad (3.4)$$

ce qui signifie que les filtres complexes optimaux sont, dans ce cas, *linéaires* et VT.

Toutefois, lorsque  $\mathbf{X}_a(t)$  est non circulaire à l'ordre 2, les expressions (3.2) et (3.4) ne sont plus équivalentes et les filtres complexes optimaux ne sont plus linéaires. Dans ces conditions, alors que  $e_r(t) = \text{Re}[\mathbf{H}(t)^\dagger \mathbf{X}_a(t)]$ , définissons  $e_q(t) \triangleq \text{Im}[\mathbf{V}(t)^\dagger \mathbf{X}_a(t)]$  et  $e_a(t) \triangleq e_r(t) + je_q(t)$ , où  $\mathbf{V}(t) \triangleq (1, -\mathbf{v}(t)^\top)^\top$  et où  $\mathbf{v}(t)$  est un vecteur arbitraire, indépendant de  $\mathbf{h}(t)$ . Sous ces hypothèses, en notant  $\mathcal{E}_q(t)$  et  $\mathcal{E}_a(t)$  les puissances instantanées respectivement de  $e_q(t)$  et  $e_a(t)$ , on obtient

$$\mathcal{E}_a(t)[\mathbf{H}(t), \mathbf{V}(t)] = \mathcal{E}_r(t)[\mathbf{H}(t)] + \mathcal{E}_q(t)[\mathbf{V}(t)] \quad (3.5)$$

où  $\mathcal{E}_r(t)$  est définie par (3.2) et où on vérifie que

$$\mathcal{E}_q(t) = \frac{1}{4} [2\mathbf{V}(t)^\top R_{X(t)}^* \mathbf{V}(t)^* - \mathbf{V}(t)^\dagger C_{X(t)} \mathbf{V}(t)^* - \mathbf{V}(t)^\top C_{X(t)}^* \mathbf{V}(t)] \quad (3.6)$$

En définissant  $\mathbf{h}_1(t) \triangleq [\mathbf{h}(t) + \mathbf{v}(t)]/2$  et  $\mathbf{h}_2(t) \triangleq [\mathbf{h}(t) - \mathbf{v}(t)^*]/2$ , on trouve que  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_1(t) + \mathbf{h}_2(t)^*$  et que l'expression (3.5) s'écrit

$$\mathcal{E}_a(t) = E[|d_a(t) - \mathbf{h}_1(t)^\dagger \mathbf{x}_a(t) - \mathbf{h}_2(t)^\dagger \mathbf{x}_a(t)^*|^2] \quad (3.7)$$

Dès lors, minimiser  $\mathcal{E}_r(t)$  par rapport à  $\mathbf{H}(t)$  ou  $\mathbf{h}(t)$  équivaut à minimiser  $\mathcal{E}_a(t)$  par rapport à ces mêmes vecteurs mais à  $\mathbf{V}(t)$  donné et donc en particulier à  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_{min}(t)$  où  $\mathbf{V}_{min}(t)$  minimise  $\mathcal{E}_a(t)$ , ce qui équivaut à minimiser  $\mathcal{E}_a(t)$  par rapport à

$h_1(t)$  et  $h_2(t)'$  et à calculer  $h(t) = h_1(t) + h_2(t)'^*$ . Enfin en notant  $h_2(t) = h_2(t)' \exp(j\omega_0 t)$  où  $\omega_0$  est la porteuse, on obtient

$$\mathcal{E}_a(t) = E[|d(t) - h_1(t)^\dagger x(t) - h_2(t)^\dagger x(t)'^*|^2] \quad (3.8)$$

ce qui montre que dans le cas général où  $X_a(t)$  est non stationnaire et non circulaire à l'ordre 2, les filtres complexes optimaux sont VT et LSL. Remarquons que si  $X_a(t)$  est circulaire à l'ordre 2, (3.2) et (3.6) indiquent que  $v_{min}(t) = h_{min}(t)$ , ce qui signifie que  $h_2(t) = 0$  et on retrouve (3.4).

#### 4. MISE EN OEUVRE DES FILTRES VT OPTIMAUX

Lorsque les statistiques d'ordre 2 de  $X_a(t)$  ou de  $X(t) \triangleq X_a(t) \exp(-j\omega_0 t) = (d(t), x(t)^T)^T$  sont à variations lentes, les filtres  $h_1(t)$  et respectivement  $h_2(t)'$  ou  $h_2(t)$  optimaux peuvent être mis en oeuvre à partir des algorithmes adaptatifs classiques du filtrage d'antenne, qu'ils soient sans contraintes (LMS, RLS..) ou avec contraintes (FROST, SML..) [1]. En revanche, lorsque ces statistiques d'ordre 2 sont à variations rapides, la mise en oeuvre des filtres VT optimaux associés est généralement beaucoup plus délicate et peut même s'avérer impossible dans certains cas. Toutefois, pour certains types de non stationnarités et en particulier lorsque celles-ci présentent une certaine régularité dans le temps, la mise en oeuvre des filtres VT peut s'avérer plus aisée. C'est en particulier le cas lorsque les vecteurs  $X_a(t)$  ou  $X(t)$  sont cyclostationnaires ou quasi-cyclostationnaires à l'ordre 2 [4], c'est-à-dire lorsque les statistiques d'ordre 2 de ces vecteurs sont périodiques ou quasi-périodiques. Dans ces conditions, les filtres optimaux  $h_1(t)$  et  $h_2(t)'$  ou  $h_2(t)$  sont eux aussi périodiques ou quasi-périodiques et admettent une décomposition en série de Fourier [7]. En notant  $H(t)$  le vecteur obtenu par concaténation des vecteurs optimaux  $h_1(t)$  et, selon la nature de l'observation,  $h_2(t)'$  (signaux analytiques) ou  $h_2(t)$  (enveloppes complexes), on peut écrire

$$H(t) = \sum_{\alpha} H_{\alpha} \exp(j2\pi\alpha t) \quad (4.1)$$

où les quantités  $\alpha$  correspondent aux fréquences associées aux différentes périodes du filtre  $H(t)$  et où les filtres  $H_{\alpha}$  sont IT. Dans ces conditions, en notant  $X_{\alpha}(t)$  le vecteur obtenu par concaténation des vecteurs  $x_{\alpha}(t)$  et  $x_{\alpha}(t)'^*$  ou  $x(t)$  et  $x(t)'^*$ , selon le cas, la sortie du filtre quasi-périodique LSL  $H(t)$  s'écrit

$$y_{\alpha}(t) \triangleq H(t)^\dagger X_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha} H_{\alpha}^\dagger X_{\alpha}^{\alpha}(t) \quad (4.2)$$

où  $X_{\alpha}^{\alpha}(t) \triangleq X_{\alpha}(t) \exp(-j2\pi\alpha t)$  est l'observation  $X_{\alpha}(t)$  décalée de la fréquence  $-\alpha$ . On constate ainsi que la sortie du filtre quasi-périodique optimal  $H(t)$  est la somme des sorties des filtres IT  $H_{\alpha}$  agissant sur les observations décalées en fréquence  $X_{\alpha}^{\alpha}(t)$ . En résumé, lorsque  $X_a(t)$  ou  $X(t)$  sont quasi-cyclostationnaires, la mise en oeuvre du FVT  $H(t)$  minimisant  $\mathcal{E}_a(t)$  sous d'éventuelles contraintes se réduit à celle des filtres IT et optimaux  $H_{\alpha}$ , laquelle peut être envisagée à partir des algorithmes adaptatifs classiques. Toutefois, en pratique, seule la mise en oeuvre d'un nombre fini  $M$  de filtres IT  $H_{\alpha_i}$  peut être envisagée, ce qui contraint la structure des filtres optimaux et VT à mettre en oeuvre. Dès lors, le problème consistant à trouver les  $M$  filtres IT  $H_{\alpha_i}$  ( $1 \leq i \leq M$ ) de sorte que la sortie

$$y_{\alpha}^M(t) \triangleq \sum_{i=1}^M H_{\alpha_i}^\dagger X_{\alpha}^{\alpha_i}(t) \quad (4.3)$$

minimise à chaque instant l'EQM,  $\mathcal{E}_{\alpha}^M(t)$ , entre  $d_{\alpha}(t)$  et la sortie  $y_{\alpha}^M(t)$ , sous d'éventuelles contraintes, n'a généralement plus de sens dans la mesure où les filtres IT optimaux à un instant donné ne le sont généralement plus à un autre instant. Dans ces conditions, le problème ne peut retrouver un sens qu'en optimisant la moyenne temporelle, sur l'horizon d'observation  $[0, T]$  considéré, de l'EQM instantanée  $\mathcal{E}_{\alpha}^M(t)$ , notée  $\langle \mathcal{E}_{\alpha}^M(t) \rangle$ , sous d'éventuelles contraintes, où  $\langle \mathcal{E}_{\alpha}^M(t) \rangle$  est définie par

$$\langle \mathcal{E}_{\alpha}^M(t) \rangle \triangleq (1/T) \int_0^T \mathcal{E}_{\alpha}^M(t) dt \quad (4.4)$$

Notons qu'en absence de contraintes de structure, minimiser (4.4) équivaut à minimiser  $\mathcal{E}_{\alpha}^M(t)$  à chaque instant de l'intervalle d'observation  $[0, T]$ , ce qui est également le cas sous l'hypothèse de signaux stationnaires. Il est dès lors possible de donner un sens à la démarche classique du filtrage d'antenne optimal en présence de signaux non stationnaires. Elle consiste à mettre en oeuvre le filtre linéaire et IT minimisant la moyenne temporelle, sur l'horizon d'observation considéré, de l'EQM instantanée  $\mathcal{E}(t)$ , définie par (2.1), sous d'éventuelles contraintes lorsque  $d(t) \equiv 0$ .

#### 5. EXEMPLE

L'intérêt des structures LSL par rapport aux structures linéaires de filtrage est maintenant précisé sur un exemple emprunté aux radiocommunications. Plus précisément, on considère l'optimisation de la réception d'un signal utile perturbé par la présence d'un brouilleur, à partir d'une antenne à BE, IT et à structure LSL. Dans ces conditions, le vecteur des enveloppes complexes des signaux reçus sur les  $N$  capteurs de l'antenne s'écrit

$$x(t) = s(t) e^{j\phi_0} \mathbf{s} + j(t) e^{j(\Delta\omega t + \phi_1)} \mathbf{J} + \mathbf{b}(t) \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{b}(t)$  est le vecteur bruit reçu, supposé stationnaire et circulaire,  $s(t)$ ,  $\phi_0$  et  $\mathbf{s}$  sont respectivement l'enveloppe complexe, la phase et le vecteur source ou directeur du signal utile reçu,  $j(t)$ ,  $\phi_1$  et  $\mathbf{J}$  sont respectivement l'enveloppe complexe, la phase et le vecteur source du brouilleur reçu et où  $\Delta\omega$  est le décalage de porteuse entre le brouilleur et le signal. Sous ces hypothèses, le problème consiste à trouver les filtres complexes et IT  $h_1$  et  $h_2$  minimisant la moyenne temporelle,  $\langle \mathcal{E}_a(t) \rangle$ , de l'EQM instantanée  $\mathcal{E}_a(t)$ , définie par (3.8), où  $d(t)$  est un signal de référence corrélé au signal utile et décorrélé des sources de bruit. En notant  $\mathbf{H} \triangleq (h_1^T, h_2^T)^T$  et  $\mathbf{X}(t) \triangleq (x(t)^T, x(t)^\dagger)^T$  et en supposant, en outre, que l'enveloppe complexe du signal utile est réelle à une phase constante près, ce qui est en particulier le cas pour les signaux à modulation d'amplitude analogique (AM) [12] ou numérique (ASK) [13] ou encore pour les signaux à modulation de phase à 2 états symétriques (BPSK), le filtre optimal IT et LSL s'écrit

$$\mathbf{H}_{opt} = \langle R_X(t) \rangle^{-1} \langle r_{Xd}(t) \rangle = \beta \langle R_B(t) \rangle^{-1} \mathbf{S} \quad (5.2)$$

où  $\beta$  est une constante non calculée ici,  $\mathbf{S} \triangleq (e^{j\phi_0} \mathbf{s}^T, e^{-j\phi_0} \mathbf{s}^\dagger)^T$ ,  $\langle R_X(t) \rangle$ ,  $\langle R_B(t) \rangle$  et  $\langle r_{Xd}(t) \rangle$  correspondent aux moyennes temporelles, sur la durée de la séquence, respectivement de  $R_X(t) \triangleq E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^\dagger]$ ,  $R_B(t) \triangleq E[\mathbf{B}(t)\mathbf{B}(t)^\dagger]$  et  $r_{Xd}(t) \triangleq E[\mathbf{X}(t)d(t)'^*]$ , où  $\mathbf{B}(t)$  correspond au vecteur  $\mathbf{X}(t)$  en absence de signal utile.





Notons que sous la contrainte d'une structure linéaire de filtrage ( $h_2 = 0$ ), on retrouve le bien connu Filtre Adapté Spatial (FAS) [1], défini par

$$h_{1,opt} = \beta \langle R(t) \rangle^{-1} s \quad (5.3)$$

où  $\langle R(t) \rangle$  est la moyenne temporelle de la matrice de corrélation instantanée  $R(t)$  du bruit total reçu sur l'antenne.

A partir des expressions (5.2) et (5.3), il est possible de calculer le rapport Signal sur Bruit plus Interférence (SINR ou Signal To Interference plus Noise Ratio) en sortie des filtres optimaux respectivement LSL et linéaire, que l'on ne peut présenter ici faute de place. Rappelons que pour un filtre donné, le SINR en sortie est défini par le rapport des moyennes temporelles des puissances instantanées du signal et du bruit total en sortie de ce filtre. Dès lors, le gain en performances,  $G$ , obtenu en utilisant l'antenne optimale IT à structure LSL à la place du FAS classique, défini par le rapport des SINR en sortie de ces deux antennes, peut être calculé. Après des calculs longs et fastidieux et en supposant le bruit de fond blanc spatialement et de puissance moyenne instantanée  $\eta_2(t)$ , l'expression du gain  $G$  est donnée par

$$G = 2 + 2\gamma\epsilon |\alpha_{js}|^2 \frac{[\epsilon\gamma - (1 + \epsilon)\cos\psi]}{[1 + \epsilon(1 - |\alpha_{js}|^2)] [1 + 2\epsilon + \epsilon^2(1 - \gamma^2)]} \quad (5.4)$$

où  $\alpha_{js}$  est le coefficient de corrélation spatiale entre le brouilleur et le signal, défini par le produit scalaire normalisé des vecteurs  $J$  et  $s$ ,  $\epsilon \triangleq J^\dagger J / \langle \pi_j(t) \rangle / \langle \eta_2(t) \rangle$  où  $\pi_j(t) \triangleq E[|j(t)|^2]$ ,  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ) est le coefficient de non circularité du brouilleur défini par  $\gamma \triangleq |c_j(t)| / \langle \pi_j(t) \rangle$  où  $c_j(t) \triangleq E[j(t)^2]$  et  $\psi$  est défini par  $\psi \triangleq 2(\phi_0 - \phi_1 + \phi_{js}) - \phi_c$  où  $\phi_c$  et  $\phi_{js}$  sont les arguments respectivement de  $\langle c_j(t) \rangle$  et  $\alpha_{js}$ .

L'expression (5.4) montre que la structure LSL optimale apporte un gain de 3 dB par rapport à la structure linéaire optimale, en absence de brouilleur, lorsque celui-ci est orthogonal au signal utile ou lorsqu'il est circulaire à l'ordre 2. Ce gain est, dans ces cas, dû au caractère non circulaire des signaux utiles considérés. Dans tous les autres cas, le SINR en sortie de l'antenne LSL optimale ainsi que le gain  $G$  dépendent en particulier de la phase différentielle  $\psi$  des différents signaux qui, pour les structures LSL, devient elle aussi un paramètre discriminant, ce qui n'est pas le cas pour le classique FAS [1].

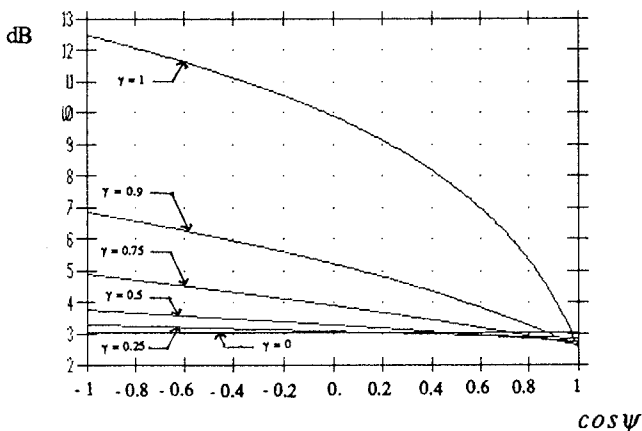


Fig.1 - Gain  $G$  en fonction de  $\cos\psi$  pour différents  $\gamma$   
 $N = 4$ ,  $RLE$ ,  $\theta_s = 0^\circ$ ,  $\theta_j = 5^\circ$ ,  $\langle \pi_j(t) \rangle / \langle \eta_2(t) \rangle = 10$  dB

Plus précisément le gain  $G$  est toujours une fonction décroissante de  $\cos\psi$  comme cela est illustré sur la figure 1. En particulier, on montre que pour  $|\alpha_{js}| = 1$  (signal et brouilleur de même direction),  $\gamma = 1$  (brouilleur de type AM, ASK ou

BPSK) et  $\cos\psi = -1$  (brouilleur et signal en quadrature), l'antenne LSL optimale annule complètement le brouilleur sans perte sur l'utile alors que le FAS n'a aucun effet sur les sources. Le gain  $G$ , alors égal à  $2(1 + \epsilon)$ , devient proportionnel à  $\langle \pi_j(t) \rangle / \langle \eta_2(t) \rangle$  lorsque  $\epsilon$  est fort. Une étude plus approfondie de l'exemple sera présentée dans des papiers futurs.

## CONCLUSION

Dans ce papier, en se limitant à l'exploitation des statistiques d'ordre 2 des observations, la problématique générale du filtrage d'antenne optimal en présence de signaux non stationnaires a été décrite et justifiée. Dans ce contexte, les filtres complexes optimaux deviennent VT et LSL en contexte non circulaire. Les problèmes de mise en oeuvre des filtres optimaux VT ont été effleurés et un sens a été donné à la démarche classique du filtrage d'antenne optimal en contexte non stationnaire. Enfin, il a été montré sur un exemple que le gain en SINR associé à l'utilisation de structures LSL à la place des structures linéaires peut s'avérer très important dans certaines situations. Ce type de structure ouvre ainsi de nouvelles perspectives pour le filtrage des signaux non circulaires.

## REMERCIEMENTS

L'auteur remercie D. PIREZ, expert en télécommunications au sein de la division RGS de Thomson, pour les discussions fructueuses qu'il a tenues avec lui sur le sujet du papier.

## RÉFÉRENCES

- [1] P. CHEVALIER, "Antenne adaptative: d'une structure linéaire à une structure non linéaire de Volterra", *Thèse de Doctorat de l'université de Paris Sud*, Juin 1991.
- [2] B. PICINBONO, "On Circularity", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol 42, N°12, pp. 3473-3482, Dec 1994.
- [3] B. PICINBONO, P. CHEVALIER, "Widely linear estimation with complex datas", à paraître dans *IEEE Trans. Signal Processing*, Août 1995.
- [4] W.A. GARDNER, L.E. FRANKS, "Characterization of cyclostationary random signal processes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol 21, N°1, pp 4-14, Jan 1975.
- [5] J.H. REED, T.C. HSIA, "The performance of time-dependent adaptive filters for interference rejection", *IEEE Trans. Acou. Speech Sign. Proc.*, Vol 38, N°8, pp 1373-1385, Aug. 1990.
- [6] W.M. BROWN, R.B. CRANE, "Conjugate linear filtering", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol 15, N°4, July 1969.
- [7] W.A. GARDNER, "Cyclic Wiener filtering: theory and method", *IEEE Trans. on Communications*, vol 41, N°1, Jan. 1993.
- [8] B. PICINBONO, P. CHEVALIER, "Extensions of the minimum variance method", soumis à *Signal Processing* en Decembre 1994.
- [9] P. CHEVALIER, P. DUVAUT, B. PICINBONO, "Le filtrage de Volterra transverse réel et complexe en traitement du signal", *Traitement du Signal*, Numéro Spécial "Non Linaire et Non Gaussien", Vol 7, N°5, pp 451-476, 1990.
- [10] P. CHEVALIER, B. PICINBONO, "Complex Linear-Quadratic systems for detection and array processing", soumis à la revue *IEEE Trans. on Signal Processing* en Mai 1995.
- [11] J.E. HUDSON, "Adaptive array principles", Peter Peregrinus, London 1981.
- [12] W.A. GARDNER, "Spectral correlation of modulated signals: Part I - Analog modulation", *IEEE Trans. on Communications*, vol 35, N°6, pp 584-594, June 1987.
- [13] W.A. GARDNER, W.A. BROWN III, C.K. CHEN, "Spectral correlation of modulated signals: Part II - Digital modulation", *IEEE Trans. on Communications*, vol 35, N°6, pp 595-601, June 1987.