

LA MÉTHODE DE PISARENKO RECTANGULAIRE : APPLICATION AU TRAITEMENT D'ANTENNE

Jean-Jacques FUCHS

IRISA/Université de Rennes I

Campus de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex - France

RÉSUMÉ

La plupart des méthodes de localisation à haute-résolution (HR) sont basées sur l'extraction d'un sous-espace de dimension réduite de la matrice de covariance des observations. Cette tâche, généralement réalisée à l'aide d'un algorithme de décomposition en valeurs et vecteurs propres, nécessite au moins de l'ordre de N^3 opérations (flops) pour une antenne à N capteurs. Des méthodes HR ne nécessitant que $O(N^2P)$ opérations, avec P le nombre de sources, ont été proposées récemment. Nous proposons une méthode HR qui n'en nécessite que $O(P^3)$. Le prix à payer est une augmentation de la variance des estimées des angles d'arrivée qui est de l'ordre de $T^{-1}N^{-2}$ au lieu de $T^{-1}N^{-3}$ pour une méthode efficace avec T le nombre d'observations. L'idée est d'appliquer une méthode du type Pisarenko à une matrice rectangulaire extraite de la matrice de covariance *toeplérisée*.

1. INTRODUCTION

Depuis les travaux de Pisarenko [1], suivis de ceux concernant les approches du type MUSIC [2], [3], de nombreuses méthodes de localisation HR ont été développées. Elles sont, en général, basées sur la décomposition en valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance des observations (snapshots) et nécessitent $O(N^3)$ opérations pour une antenne à N capteurs. Cette complexité est pénalisante pour des implémentations en temps réel. De nouvelles techniques ont été proposées récemment pour réduire cette charge de calcul à $O(N^2P)$ avec P le nombre de sources [4].

Nous proposons ici une méthode HR qui nécessite $O(P^3)$ opérations, avec P le nombre de sources. Elle s'applique uniquement à des antennes linéaires à capteurs équirépartis. Les angles d'arrivée sont obtenus à partir des racines d'un polynôme d'ordre P , une opération également plus économique que la recherche exhaustive nécessaire dans les approches du type goniomètre. Une perte de performance est le prix à payer pour cette réduction considérable de la charge de calcul. La borne de Cramer-Rao pour la variance des estimées des angles d'arrivée est d'ordre $T^{-1}N^{-3}$ avec T le nombre d'observations, cette variance est d'ordre $T^{-1}N^{-2}P^{-1}$ pour notre approche.

La méthode proposée est une modification de celle de Pisarenko [1]. En toute rigueur, la méthode originale de Pisarenko ne s'applique que dans le cas où le nombre de capteurs excède d'une unité le nombre de sources, mais différentes extensions sont imaginables et d'une certaine façon toutes les méthodes du type MUSIC ou *Min-norm* dans leur version standard ou polynômiale peuvent être vues comme de telles extensions avec pour différence importante le fait qu'elles ne

ABSTRACT

Most high-resolution (HR) direction of arrival estimation schemes require the extraction of a low dimensional subspace a task generally accomplished via a standard eigendecomposition (ED) that requires at least $O(N^3)$ flops for an order N matrix. Different techniques have been recently proposed to reduce this computational load to $O(N^2P)$ flops with P the number of sources. The method we propose is a HR technique that requires $O(P^3)$ flops. The price to be paid for this drastic computational saving is a reduction in performance. While the Cramer Rao lower bound on the variance of the direction estimates is of the order $T^{-1}N^{-3}$ (with T the number of snapshots) this variance is of order $T^{-1}N^{-2}$ for our procedure. The idea behind the method is to apply a Pisarenko method to a rectangular matrix extracted from the *toeplérised* estimated covariance matrix.

s'appliquent pas nécessairement à une matrice de covariance *toeplérisée*. Nous proposons ici une méthode que nous appelons la méthode de Pisarenko rectangulaire. Elle utilise la sous-matrice de dimension $(N,P+1)$ constituée des $P+1$ premières colonnes de la matrice de covariance estimée et *toeplérisée* des observations. Comme la matrice est *toeplérisée* avant extraction de la sous-matrice rectangulaire, il n'y a pas de perte d'information mais un gain substantiel en charge de calcul va en résulter. Pour évaluer le vecteur singulier droit associé à la valeur singulière minimale qui nous intéresse, on peut en plus se ramener à une matrice carrée hermitienne d'ordre $P+1$ et la complexité est donc bien d'ordre P^3 pour cette partie de la procédure.

Après avoir introduit les notations et formulé le problème, nous justifions cette approche puisque le théorème de Carathéodory [5], sur lequel s'appuie la méthode de Pisarenko, ne s'applique plus. Nous évaluons ensuite les performances de l'algorithme d'un point de vue statistique et montrons le rôle primordial joué par la *toeplérisation*. Nous terminons par des résultats de simulations qui montrent que l'analyse *asymptotique* des performances est valide même pour un nombre raisonnable d'observations.

2. FORMULATION DU PROBLÈME

Nous considérons une antenne linéaire à N capteurs omnidirectionnels équirépartis. La sortie des capteurs est filtrée par un filtre passe-bas, échantillonnée et on en prend la Transformée de Fourier Discrète (TFD). Nous ne considérons qu'un bin de fréquence de la TFD et notons X_k le vecteur complexe de dimension N contenant les composantes correspondantes sur le k -ème intervalle de temps. Une estimée \hat{R} de la ma-



trice de covariance de ces observations X_k obtenue à partir de T observations est alors donnée par :

$$\hat{R} = \frac{1}{T} \sum X_k X_k^* \quad (1)$$

Ceci est également une estimée de la matrice de densité spectrale des sorties des capteurs à la fréquence temporelle considérée. Sa valeur exacte notée R , peut être décomposée en la somme de R_n , la contribution du bruit ambiant, et de R_s , la contribution des sources :

$$\begin{aligned} R &= R_s + R_b \\ R_s &= \sum_{p=1}^P a_p d\theta(\nu_p) d\theta(\nu_p)^* \\ R_b &= \sigma_n^2 I \end{aligned} \quad (2)$$

où σ_n^2 est la variance du bruit ambiant supposé spatialement blanc et $d\theta(\nu_p)$ est le vecteur-direction associé à la p -ème source dont la puissance est notée a_p et la fréquence spatiale ν_p . Dans ce modèle, les sources sont supposées décorréelées mais ceci n'est pas strictement nécessaire. Le rapport signal à bruit (RSB) pour la source p est $\rho_p = a_p/\sigma_n^2$ et pour une antenne en $\lambda/2$ on a les relations suivantes entre φ_p l'angle fait avec la normale à l'antenne, la fréquence spatiale $f = \nu_p$ et le vecteur direction $d\theta(f)$:

$$\begin{aligned} d\theta(f) &= \left[1 e^{2i\pi f} e^{4i\pi f} \dots e^{2i\pi(N-1)f} \right]^T \\ \nu_p &= \sin \varphi_p / 2 \end{aligned} \quad (3)$$

On vérifie facilement que, sous les hypothèses faites, la matrice R est hermitienne et Toeplitz. Comme les composantes du vecteur des observations X_k sont des points de TFD isolés, ces vecteurs sont modélisés comme des vecteurs aléatoires gaussiens, complexes, circulaires centrés de matrice de covariance R ou bien, de façon équivalente, l'estimée \hat{R} en (1) est telle que $T\hat{R}$ est un échantillon d'une loi de Wishart complexe à T degrés de liberté et de matrice R . La matrice estimée \hat{R} est bien sûr hermitienne mais non Toeplitz.

Notre objectif est d'estimer les angles d'arrivée φ_p ou les fréquences spatiales $\nu_p = \sin \varphi_p / 2$ ou les pulsations associées $\omega_p = 2\pi\nu_p$. Nous allons supposer que le nombre de sources P est connu et prendre $\hat{P} = P$ dans la suite. Si cette hypothèse est irréaliste on prend un majorant de P et ayant estimé les angles d'arrivée, on évalue les puissances associées en résolvant un système de Cramer. Comme le seuil de détection de ce type d'antenne est bien connu, il est possible d'éliminer les sources de puissances trop faibles et de recommencer si nécessaire la procédure avec la nouvelle valeur de \hat{P} .

3. LA MÉTHODE DE PISARENKO RECTANGULAIRE

La méthode de Pisarenko s'appuie sur un théorème de Caratheodory [5] qui ne s'applique pas à notre matrice rectangulaire. Il nous faut donc indiquer pourquoi l'approche que nous allons proposer, permet de trouver les angles d'arrivée. La matrice de covariance exacte R (2) se réécrit, en simplifiant les notations :

$$R = \sum_{p=1}^P a_p d\theta_p d\theta_p^* + \sigma_n^2 I = DAD^* + \sigma_n^2 I_N \quad (4)$$

où D est une matrice (N, P) de rang plein contenant les vecteurs sources $d\theta_p$. Désignons par \bar{R} la matrice rectangulaire contenant les $P+1$ premières colonnes de R :

$$\bar{R} = \sum_{p=1}^P a_p d\theta_p d\bar{\theta}_p^* + \sigma_n^2 \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = DAD\bar{D}^* + \sigma_n^2 S \quad (5)$$

où \bar{D} est une matrice $(P+1, P)$ contenant les vecteurs sources réduits $d\bar{\theta}_p$. Soit alors :

$$\bar{R} = U\Lambda V^* = \sum_{k=1}^{P+1} \lambda_k u_k v_k^*$$

la décomposition en valeurs et vecteurs singuliers de \bar{R} où U et V sont des matrices unitaires d'ordre N et $P+1$ et Λ est une matrice de dimension $(N, P+1)$ de structure diagonale similaire à celle de la matrice S définie dans la relation (5) contenant les valeurs singulières rangées par valeurs décroissantes $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > \lambda_{P+1} > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \bar{R}^* \bar{R} &= V\Lambda^2 V^* = (\bar{D}AD^* + \sigma_n^2 S^T)(DAD\bar{D}^* + \sigma_n^2 S) \\ &= \bar{D}AD^* DAD\bar{D}^* + 2\sigma_n^2 \bar{D}AD\bar{D}^* + \sigma_n^4 I_{P+1} \end{aligned} \quad (6)$$

Plusieurs conclusions importantes, concernant v_{P+1} le vecteur singulier droit associé à la valeur singulière minimale λ_{P+1} , peuvent être tirées de cette dernière expression. Comme dans l'expression (6) les deux premières matrices sont d'ordre $P+1$ mais de rang P , on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{P+1}^2 &= \sigma_n^4 \\ \bar{D}^* v_{P+1} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Comme par ailleurs on a, pour tout k , $\bar{R}v_k = \lambda_k u_k$, il en résulte en prenant $k = P+1$: $u_{P+1} = Sv_{P+1}$ avec S définie en (5).

La relation d'orthogonalité (7) est exactement celle dont nous avons besoin elle peut, en effet, se réécrire :

$$\bar{d}\theta_p^* v_{P+1} = 0 \quad \text{pour } p = 1, 2, \dots, P$$

et démontre que, comme dans le cas de la méthode de Pisarenko traditionnelle, le polynôme associé au vecteur singulier droit v_{P+1} a toutes ses racines z_p sur le cercle unité $z_p = e^{i\omega_p}$ avec des arguments $\omega_p = -2\pi\nu_p$ reliés aux fréquences spatiales des sources. En posant :

$$d(z) = [1 \ z \ \dots \ z^P]^T \quad (8)$$

on a donc montré que les racines du polynôme d'ordre P :

$$d(z)^* v_{P+1} = 0 \quad (9)$$

sont sur le cercle unité aux endroits souhaités. Si seule une estimée \hat{R} (1) de R est disponible les racines du polynôme associé à \hat{v}_{P+1} ne seront plus sur le cercle unité mais en restent proches comme nous allons le montrer plus loin. Ceci est une différence avec la méthode de Pisarenko habituelle mais ne remet pas en cause la méthode et ne doit surtout pas faire croire que la *toeplerisation* de \hat{R} est inutile. Elle est en fait absolument indispensable comme nous allons le voir dans l'analyse des performances de la méthode.

La **méthode proposée** est donc la suivante :

- estimer la matrice \hat{R} .
- la transformer en matrice de Toeplitz \hat{R}_T .
- en extraire la matrice $\hat{\hat{R}}_T$ constituée de ces $\hat{P}+1$ premières colonnes.
- calculer le vecteur propre minimal $\hat{v}_{\hat{P}+1}$ de $\hat{\hat{R}}_T^* \hat{\hat{R}}_T$ une matrice hermitienne d'ordre $\hat{P}+1$.
- calculer les racines du polynôme d'ordre \hat{P} associé à $\hat{v}_{\hat{P}+1}$ et en déduire les estimées des directions des \hat{P} sources.

On peut noter que dans le point 4, le vecteur $\hat{v}_{\hat{P}+1}$ est également le vecteur singulier droit minimal de la matrice rectangulaire $\hat{\bar{R}}_T$ et que cette façon de le calculer diminue la charge de calcul qui est donc extrêmement réduite.

4. ANALYSE DES PERFORMANCES

4.1. INTRODUCTION

Nous étudions les propriétés asymptotiques de la méthode de Pisarenko rectangulaire proposée. Ces résultats ne sont valides que si $\hat{P} = P$ car l'analyse de perturbation de matrices réalisée est faite sous cette hypothèse (la valeur singulière minimale de \bar{R} doit être simple). On peut noter, à ce sujet, que l'extension de la méthode de Pisarenko qui consisterait à *toepleriser* la matrice de covariance estimée, à calculer son vecteur propre minimal, à chercher les $N-1$ racines du polynôme associé, à estimer les $N-1$ puissances correspondantes qui identifient la matrice de covariance des sources ainsi estimées et la matrice de covariance estimée et *toeplerisée* et à ne garder que les \hat{P} sources de plus fortes puissances est une extension dont, pour le moment, on ne sait pas calculer les performances.

Le cheminement suivi pour l'analyse est le suivant. Le nombre fini T d'observations introduit une erreur d'estimation $\Delta R = \hat{R} - R$ qui se transmet à la matrice estimée, tronquée et *toeplerisée* $\Delta \bar{R}_T = \hat{\bar{R}}_T - \bar{R}$. Ces erreurs sont d'ordre $1/\sqrt{T}$ et leurs propriétés asymptotiques se déduisent du modèle statistique des observations introduit plus haut. En utilisant des résultats de perturbations de matrices il est possible d'en déduire l'écart correspondant sur le vecteur sigulier minimal $\Delta v_{P+1} = \hat{v}_{P+1} - v_{P+1}$. Il reste alors à définir comment les erreurs sur les coefficients d'un polynôme affectent ses racines.

4.2. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE ΔR

Comme indiqué plus haut, $T\hat{R}$ est modélisé comme une réalisation d'une distribution de Wishart complexe de paramètre R à T degrés de liberté, les propriétés de ΔR sont alors [6] :

$$\begin{aligned} E(\Delta R) &= 0 \\ E(\Delta r_{ij} \Delta r_{mn}) &= \frac{1}{T} r_{mj} r_{in} \end{aligned} \quad (10)$$

avec r_{ij} la composante (i,j) de R . Ces relations sont exactes pour tout T . De plus asymptotiquement en T , les composantes $\sqrt{T}\Delta r_{ij}$ suivent un théorème central limite dont les moments d'ordre deux se déduisent de (10) qui peut se réécrire [7] :

$$E(\text{Tr}(\Delta R A) \text{Tr}(\Delta R B)) = \frac{1}{T} \text{Tr}(R A R B) \quad (11)$$

Dans la suite, nous aurons à évaluer des covariances de termes faisant intervenir les matrices rectangulaires $\Delta \bar{R}$ et $\Delta \bar{R}_T$, il est judicieux de les réécrire sous la forme $\Delta R S$ et $\Delta R_T S$ et à remarquer qu'en notant A_T la matrice de Toeplitz déduite de A (en moyennant les diagonales), on a :

$$\text{Tr}(A_T B) = \text{Tr}(A B_T) \quad (12)$$

pour toutes matrices carrées A et B .

4.3. RÉSULTAT DE PERTURBATIONS DE MATRICES

Nous indiquons maintenant comment l'erreur ΔR_T vue comme une perturbation de la matrice $R = R_T$, affecte le vecteur singulier droit v_{P+1} de \bar{R} . La *toeplerisation* de \bar{R} affecte l'erreur ΔR qui devient ΔR_T une matrice de Toeplitz. En utilisant les notations précédentes pour la décomposition en valeurs et vecteurs singuliers de \bar{R} :

$$\bar{R} = \bar{R}_T = U \Lambda V^* = \sum_{k=1}^{P+1} \lambda_k u_k v_k^*$$

il s'agit de trouver la façon dont la perturbation $\Delta \bar{R}_T$ va affecter v_{P+1} . C'est une situation relativement classique si la valeur singulière correspondante est bien séparée des autres. Dans notre cas, il faut donc que :

$$\lambda_P - \lambda_{P+1} \gg \sqrt{1/T} \quad (13)$$

puisque l'amplitude de la perturbation ΔR et donc de $\Delta \bar{R}_T$ est d'ordre $\sqrt{1/T}$. Sous cette restriction, l'écart Δv_{P+1} est du même ordre de grandeur que la perturbation et on peut démontrer le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \Delta v_{P+1} &\simeq \sum_{k=1}^P \frac{\lambda_k v_k u_k^*}{\lambda_{P+1}^2 - \lambda_k^2} \Delta R_T S v_{P+1} \\ &+ \lambda_{P+1} \sum_{k=1}^P \frac{v_k v_k^*}{\lambda_{P+1}^2 - \lambda_k^2} S^T \Delta R_T S v_{P+1} \end{aligned} \quad (14)$$

où la matrice S définie en (5) est telle que $S^T R = \bar{R}$. Pour simplifier les écritures dans la suite, nous introduisons des matrices A_1 et A_2 et réécrivons (14) sous la forme :

$$\Delta v_{P+1} \simeq A_1 \Delta R_T S v_{P+1} + A_2 S^T \Delta R_T S v_{P+1} \quad (15)$$

4.4. ERREUR SUR LES RACINES

Il reste à indiquer comment une erreur sur les coefficients d'un polynôme agit sur ses racines. Pour des racines simples et bien isolées les formules s'obtiennent facilement. Écrivons le polynôme sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 &= v_{P+1}^* d(z) \\ d(z) &= [1 \ z \ \dots \ z^P]^T. \end{aligned}$$

et notons $z_k = e^{2i\pi\nu_k}$ la racine du polynôme exact et \hat{z}_k la racine correspondante du polynôme perturbé $\hat{v}_{P+1}^* d(z) = 0$. Un développement au premier ordre de $\hat{v}_{P+1}^* d(\hat{z}_k)$ autour de z_k donne :

$$\begin{aligned} \hat{v}_{P+1}^* d(\hat{z}_k) &= (v_{P+1}^* + \Delta v_{P+1}^*)(d(z_k) + \Delta d(z_k)) \\ &\simeq v_{P+1}^* d(z_k) + \Delta v_{P+1}^* d(z_k) + v_{P+1}^* \Delta d(z_k) \end{aligned}$$

où $\Delta d(z_k)$ doit être remplacé par :

$$\begin{aligned} \Delta d(z_k) &= d^{(1)}(z_k) \Delta z_k \\ d^{(1)}(z) &= [0 \ 1 \ 2z \ \dots \ Pz^{P-1}]^T \end{aligned}$$

Puisque $\hat{v}_{P+1}^* d(\hat{z}_k) = v_{P+1}^* d(z_k) = 0$, on a :

$$\Delta z_k = - \frac{\Delta v_{P+1}^* d(z_k)}{v_{P+1}^* d^{(1)}(z_k)} \quad (16)$$



4.5. PROPRIÉTÉS DES ESTIMÉES

Nous combinons maintenant les résultats (14) et (16) obtenus dans les paragraphes précédents. A l'aide de (15) et (16) on a :

$$\begin{aligned} & \Delta v_{P+1}^* d(z_k) \\ &= d(z_k)^* A_1 \Delta R_T S v_{P+1} + d(z_k)^* A_2 S^T \Delta R_T S v_{P+1} \\ &= \text{Tr}(\Delta R_T \{ S v_{P+1} d(z_k)^* A_1 + S v_{P+1} d(z_k)^* A_2 S^T \}) \\ &= \text{Tr}(\Delta R_T A) \end{aligned}$$

où nous avons introduit, localement, une matrice notée A pour simplifier les notations. En combinant (16) et la propriété (12) concernant les matrices de Toeplitz on a :

$$\Delta z_k = - \frac{1}{v_{P+1}^* d^{(1)}(z_k)} \text{Tr}(\Delta R A_T)$$

Δz_k dépend linéairement de ΔR , et $\sqrt{T}\Delta z_k$ est donc asymptotiquement une variable gaussienne complexe centrée. Pour définir les moments d'ordre deux, il faut calculer $E(|\Delta z_k|^2)$ et $E((\Delta z_k)^2)$ en utilisant (11) et la relation précédente. On constate que $E((\Delta z_k)^2)$ n'est pas nul. On peut déduire de ces expressions les propriétés au second ordre de l'amplitude et de l'argument de z_k . Même dans le cas d'une source unique les expressions sont compliquées et peu parlantes. Le rapport signal à bruit notamment intervient de façon complexe dans ces expressions comme on pouvait déjà le supposer en regardant la relation (6). Une expression plus simple est obtenue pour une variante de l'algorithme, dont les performances sont d'ailleurs meilleures que celles de l'algorithme de base présenté ici. Cette variante consiste à remplacer \bar{R} par $\bar{R} - \sigma_n^2 S$. La valeur singulière minimale de cette nouvelle matrice est nulle et on peut espérer que l'écart entre λ_P et λ_{P+1} est plus grand et donc que v_{P+1} sera moins perturbé par l'erreur d'estimation. Cette variante augmente la charge de calcul puisque deux décompositions sont nécessaires, σ_n^2 étant inconnu on l'estime par une première évaluation de $\hat{\lambda}_{P+1}$. L'expression de Δv_{P+1} (14) se simplifie dans ce cas et devient :

$$\Delta v_{P+1} \simeq - \sum_{k=1}^P \frac{v_k u_k^*}{\lambda_k} S^T \Delta R_T v_{P+1}$$

Dans le cas d'un scénario à une source avec $z_1 = e^{i\omega_1}$ où $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \pi \sin\phi_1$, on obtient :

$$E(\Delta\omega_1^2) = \frac{1}{T} \frac{1}{\rho^2 N(N-1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho N}{N-1} \right) \quad (17)$$

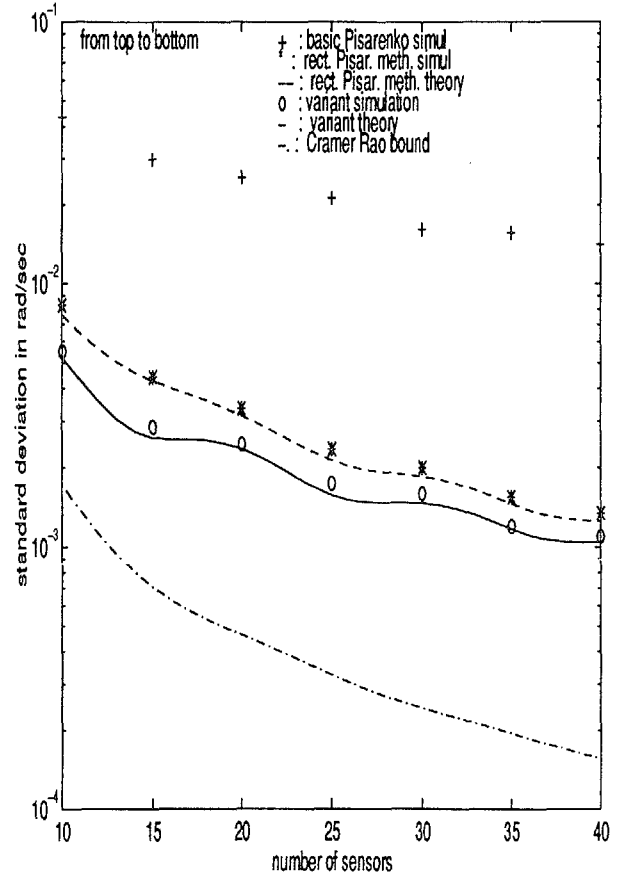
où $\rho = a_1/\sigma_n^2$ désigne le RSB. Cette variance asymptotique est à comparer à la borne de Cramer-Rao qui dans ce cas s'écrit :

$$E(\Delta\omega_1^2) \geq \frac{1}{T} \frac{1}{\rho^2 N^2} \frac{6(1+N\rho)}{N^2-1}$$

Quand N , le nombre de capteurs, augmente le rapport entre la variance de l'estimée fournie par la méthode proposée et la borne de Cramer-Rao est proche de $N/6$. Comme indiqué dans l'introduction, c'est la contrepartie à une diminution de la charge de calcul de $O(N^3)$ flops à $O(P^3)$ flops. On peut vérifier qu'en omettant la *toeplitzisation* de la matrice \hat{R} avant extraction de la matrice rectangulaire \hat{R} les performances se dégradent dramatiquement et ne diminuent plus avec N . On a dans ce cas :

$$E(\Delta\omega_1^2) = \frac{1}{T} \frac{1}{\rho^2 N} (1 + \rho N)$$

avec une perte en $O(N^3)$ par rapport à la borne de Cramer-Rao et en N^2 par rapport à notre approche.



5. RÉSULTATS DE SIMULATION

Nous considérons un scénario à $P = 2$ sources situé à des gisements $\varphi = \pm 5$ deg. Le RSB est de 0dB pour les deux sources et le nombre d'observations est $T = 100$ (snapshots). Sur la figure nous présentons, avec un nombre de capteurs variant de $N = 10$ à $N = 40$, six courbes théoriques ou obtenues par simulations (dans ce cas chaque point est obtenu à l'aide de 1000 simulations indépendantes). De haut en bas, on a successivement les résultats de simulation de la méthode de Pisarenko standart (on toeplitzise la matrice et on ne garde que la matrice (2,2) supérieure gauche), la méthode proposée (simulation et théorie), la variante proposée (simulation et théorie), la borne de Cramer-Rao.

6. REFERENCES

- [1] V.F. Pisarenko. The retrieval of harmonics from a covariance function. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 347-366, 1973.
- [2] G. Bienvenu. Influence of the spatial coherence of the background noise on high resolution passive methods. In *Proc. ICASSP*, pages 306-309, 1979.
- [3] R.O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. In *Proc. RADC Spectral Est. Workshop*, 1979.
- [4] G. Xu and T. Kailath. Fast subspace decomposition. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(3):539-551, March 1994.
- [5] U. Grenander and G. Szego. *Toeplitz forms and their applications*. University of California Press, 1958.
- [6] R.S. Muirhead. *Aspects of multivariate statistical analysis*. John Wiley, 1982.
- [7] D. R. Brillinger. *Times Series: Data Analysis and Theory*. San Francisco, Holden-Day, 1981.