

## OPTIMISATION DE GEOMETRIES D'ANTENNES ACOUSTIQUES

Laurent HELLEQUIN, Yannick MAHIEUX

Centre National d'Etudes des Télécommunications  
Technopole Anticipa - 22300 LANNION

### RÉSUMÉ

Dans cet article, une expression du facteur de directivité d'une antenne dans laquelle apparaît explicitement sa disposition géométrique est établie et mise à profit pour optimiser la géométrie d'antennes planaires à faible nombre de capteurs. Par généralisation, on aboutit à des antennes hexagonales. Grâce à l'analyse des réseaux par transformée de Fourier, il est montré que ces antennes ont un meilleur comportement vis-à-vis de l'aliasing spatial que les antennes carrées

### ABSTRACT

In this paper, we propose an expression of the directivity factor of an array with an explicit relation to the geometrical arrangement of the sensors. Then it is possible to optimize the array geometry in order to maximize the directivity factor. The extension to arrays with a high number of sensors yields to hexagonal arrays. By means of the Fourier analysis of networks of sensors, it is shown that these arrays are less sensitive to spatial aliasing than squared arrays.

### I INTRODUCTION

Une antenne acoustique est un réseau de microphones disposés selon une certaine géométrie et dont les signaux de sortie sont combinés de manière à privilégier les ondes sonores provenant d'une certaine direction de l'espace au détriment de celles provenant des autres directions. Leur utilisation notamment en téléconférence [1] ou pour station de travail [2] est bien connue.

A nombre de microphones,  $N$ , égal, les performances de ces antennes mesurées par leur facteur de directivité dépendent dans une large mesure de la disposition géométrique des capteurs. Ce sont habituellement des dispositions simples telles que les antennes rectilignes ou les antennes carrées qui sont utilisées. A une fréquence donnée, pour une antenne rectiligne à espacement uniforme entre capteurs, l'optimisation de la géométrie est aisée puisqu'il n'y a qu'un seul paramètre variable (la distance inter-capteurs). Il en est tout autre pour des antennes planaires puisqu'alors le nombre de variables indépendantes est égal à  $2N-1$ . Des méthodes itératives d'optimisation du positionnement des capteurs sont proposées dans la littérature mais n'apportent pas en général une solution globale au problème [3]. Nous présentons dans cet article une approche non itérative permettant d'optimiser le facteur de directivité d'une antenne planaire à faible nombre de capteurs. Une extension à un nombre de capteurs quelconque est proposée et aboutit à des réseaux hexagonaux. L'analyse des réseaux de capteurs via une transformée de Fourier bi-dimensionnelle telle que décrite dans [4] et rappelée dans le présent article met en évidence la supériorité de ces antennes par rapport aux antennes carrées en terme de comportement vis-à-vis de l'aliasing spatial.

### II EXPRESSION DU FACTEUR DE DIRECTIVITE

#### 1 - Facteur de directivité d'une antenne

Considérons un réseau de  $N$  capteurs omnidirectionnels dont les signaux de sortie sont pondérés par un jeu de coefficients complexes valant pour la fréquence  $f$ ,  $\{a_i(f), i = 0, \dots, N-1\}$ . La fonction de transfert de l'antenne c'est à dire sa réponse à une onde plane harmonique de vecteur d'onde  $\vec{k}$  est donnée par :

$$H(\vec{k}) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i(f)} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} a_i(f) \cdot e^{-j \cdot \langle \vec{k}, \vec{r}_i \rangle} \cdot e^{j \cdot \langle \vec{k}_0, \vec{r}_i \rangle} \quad (1)$$

$\vec{k}_0$  est le vecteur d'onde associé à la direction dans laquelle l'antenne est pointée électroniquement en retardant les signaux captés,  $\vec{r}_i$  est le vecteur position du capteur n°  $i$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire. Le terme de normalisation assure une fonction de transfert égale à l'unité dans la direction de pointage.

Rappelons que lorsque ces antennes présentent une structure périodique - c'est notamment le cas des antennes rectilignes à espacement uniforme - leur fonction de transfert est la duplication périodique d'un motif élémentaire. Lorsque la distance inter-capteurs est trop élevée, apparaissent alors des lobes d'aliasing de manière analogue à l'aliasing se produisant en échantillonnage temporel. Cet aliasing est évité si la distance inter-capteurs est inférieure à un seuil dépendant de la longueur d'onde, de la direction de pointage de l'antenne et de sa configuration géométrique.

Le facteur de directivité est défini comme le rapport de la puissance du signal de sortie d'antenne pour une



onde incidente dans la direction considérée à la moyenne spatiale de cette même puissance :

$$Q(f, \phi_r, \theta_r) = \frac{|H(f, \phi_r, \theta_r)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |H(f, \phi, \theta)|^2 \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\phi} \quad (2)$$

$\theta$  et  $\phi$  sont respectivement les angles d'azimut et d'élévation,  $(\theta_r, \phi_r)$  indique la direction de référence considérée.

Le facteur de directivité caractérise de façon globale la sélectivité spatiale de l'antenne. La connaissance de cette grandeur présente un intérêt majeur notamment en acoustique des espaces clos où le champ réverbéré peut être assimilé sous certaines conditions à un champ diffus. De ce fait le facteur de directivité d'une antenne acoustique indique le gain en rapport son direct à champ réverbéré (rapport "Dir / Rev") apporté par l'antenne par rapport à un microphone omnidirectionnel.

Le calcul formel de  $Q(f, \theta_r, \phi_r)$  à partir de l'équation (2) n'est possible que dans des cas simples. Par exemple dans le cas d'une antenne rectiligne à espacement inter-capteurs constant égal à  $d$  et pour une direction de référence coïncidant avec la direction de pointage de l'antenne  $((\theta_r, \phi_r) = (\pi/2, \varphi_0))$ , il vient :

$$Q(f, \theta_0, \varphi_0) = \frac{N^2}{N + \frac{1}{\pi} \frac{d}{\lambda} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{N}{n} - 1\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{d}{\lambda} n \cdot \cos(\varphi_0)\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{d}{\lambda} n\right)}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde associée à la fréquence  $f$ .

Pour une antenne quelconque, il n'est pas possible d'aboutir à une telle expression et le calcul du facteur de directivité nécessite le calcul préalable de la fonction de transfert de l'antenne. Pour cela, l'espace est discrétisé et l'intégration continue du dénominateur de la formule (2) est remplacée par une sommation discrète. Pour obtenir une précision suffisante, la complexité calculatoire est élevée. Lorsque la géométrie d'antenne s'y prête, le nombre de calculs peut être réduit en profitant des éventuelles symétries. Par ailleurs l'équation (2) ne permet pas de déterminer les géométries d'antenne assurant un facteur de directivité maximal.

## 2 - Facteur de directivité et réduction de bruit diffus

Pour un champ diffus et homogène de puissance  $P_{be}(f)$  présent au niveau des capteurs, la densité spectrale de puissance du signal de sortie d'antenne est donnée par :

$$\Gamma_{yy}(f) = \frac{P_{be}(f)}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |H(f, \phi, \theta)|^2 \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\phi \quad (3)$$

D'où, d'après (2) :

$$Q(f, \phi_r, \theta_r) = |H(f, \phi_r, \theta_r)|^2 \cdot \frac{P_{be}(f)}{\Gamma_{yy}(f)} \quad (4)$$

Le facteur de directivité est donc lié à la réjection de bruit diffus apportée par l'antenne. Or, d'une manière générale, d'après (1),  $\Gamma_{yy}(f)$  est donné par :

$$\Gamma_{yy}(f) = \frac{1}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n(f) \right|^2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_n(f) \cdot a_m^*(f) \cdot \Gamma_{x_n x_m}(f) \cdot e^{j((\vec{k}_0, \vec{r}_n) - (\vec{k}_0, \vec{r}_m))}$$

où  $\Gamma_{x_n x_m}(f)$  est l'inter-densité spectrale de puissance des signaux individuels correspondant aux capteurs  $n$  et  $m$ . Dans le cas d'un bruit diffus et homogène et pour des capteurs omnidirectionnels :

$$\Gamma_{x_n x_m}(f) = P_{be}(f) \cdot \text{sin}_c\left(2\pi \cdot f \cdot \frac{d_{nm}}{c}\right)$$

où  $d_{nm}$  est la distance séparant les capteurs  $n$  et  $m$  et  $c$  la célérité du son [5]. Alors :

$$\Gamma_{yy}(f) = \frac{P_{be}(f)}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n(f) \right|^2} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |a_n(f)|^2 + 2 \text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=n+1}^{N-1} a_n(f) \cdot a_m^*(f) \cdot \text{sin}_c\left(2\pi f \frac{d_{nm}}{c}\right) \cdot e^{j((\vec{k}_0, \vec{r}_n) - (\vec{k}_0, \vec{r}_m))} \right\} \right\}$$

où  $\text{Re}\{\cdot\}$  signifie la partie réelle. D'où d'après (4) :

$$Q(f, \theta_r, \varphi_r) = \frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n(f) \right|^2 \cdot |H(f, \theta_r, \varphi_r)|^2}{\left( \sum_{n=0}^{N-1} |a_n(f)|^2 + 2 \text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=n+1}^{N-1} a_n(f) \cdot a_m^*(f) \cdot \text{sin}_c\left(2\pi f \frac{d_{nm}}{c}\right) \cdot e^{j((\vec{k}_0, \vec{r}_n) - (\vec{k}_0, \vec{r}_m))} \right\} \right)}$$

(5)

Par rapport à l'équation (2), l'intérêt de cette formule est évident puisqu'elle permet de connaître le facteur de directivité d'une antenne sans avoir à calculer au préalable sa fonction de transfert spatiale. De plus, elle relie explicitement la sélectivité spatiale moyenne de l'antenne à sa configuration géométrique et aux pondérations des signaux captés facilitant de ce fait son optimisation. Notons qu'une formulation du facteur de réduction de bruit pour une antenne "simple somme" est fournie dans [6].

Aux fréquences basses telles que  $|H(f, \theta_r, \varphi_r)|^2$  et  $\text{sin}_c(2\pi \cdot f \cdot d_{nm}/c)$  sont très proches de 1, on vérifie aisément que  $Q(f, \theta_r, \varphi_r)$  tend vers 1 quelque soit la direction de visée. De même lorsque le rapport  $d_{nm}/\lambda$  tend vers l'infini ou lorsqu'il est un multiple non nul de  $1/2$ , et ceci indépendamment de  $\vec{k}_0$ , le facteur de directivité

$$\frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n(f) \right|^2 \cdot |H(f, \theta_r, \varphi_r)|^2}{\left( \sum_{n=0}^{N-1} |a_n(f)|^2 \right)}$$

est égal au rapport qui dans

le cas de pondérations  $\{a_n(f)\}$  constantes vaut  $N \cdot |H(f, \theta_r, \varphi_r)|^2$ . C'est le cas de figure de bruits non corrélés présents sur les capteurs.

## 3 - Antenne à faible nombre de capteurs

Considérons à présent le cas d'une antenne planaire, pour laquelle tous les coefficients  $a_n(f)$  valent 1. Supposons que la direction de référence  $(\theta_r, \phi_r)$  est égale à la direction de pointage et que cette même direction de pointage indiquée par  $\vec{k}_0$  est orthogonale au plan

contenant les capteurs. Le facteur de directivité s'écrit alors :

$$Q(f; \theta_0, \varphi_0) = \frac{N^2}{\left( N + \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=n+1}^{N-1} \sin_c \left( 2\pi f \frac{d_{nm}}{c} \right) \right)} \quad (6)$$

$Q(f, \theta_0, \varphi_0)$  sera d'autant plus élevé que la double somme du numérateur est faible. Le minimum de la fonction  $\sin_c(2\pi \cdot f \cdot d_{nm}/c)$  est atteint lorsque le rapport  $d_{nm}/\lambda$  vaut 0,72. Ainsi pour un doublet, le facteur de directivité maximum est obtenu pour  $d_{nm} = 0,72 \cdot \lambda$  et vaut 2,55. Il est également possible de définir la géométrie optimale pour 3 capteurs. Elle est constituée par des capteurs situés aux trois sommets d'un triangle équilatéral de côté  $d_0 = 0,72 \cdot \lambda$ . Le facteur de directivité correspondant vaut alors 5,21. A titre de comparaison, pour une antenne rectiligne composée de 3 capteurs équiésespacés, le maximum est égal à 4,21 et est atteint pour une distance  $d = 0,8 \cdot \lambda$ . Notons que la structure du triangle équilatéral est mentionnée dans [3] comme résultat d'une optimisation itérative.

Pour  $N = 4$ , en disposant les capteurs au sommet d'un carré de côté  $d = \lambda/\sqrt{2}$ , les 3 distances entre capteurs immédiatement voisins sont très proches de  $0,72 \lambda$  et les deux distances entre capteurs éloignés valent  $\lambda$  et de ce fait n'ont aucun effet sur la valeur de  $Q(f, \theta_0, \varphi_0)$  qui vaut alors 7,6. Du fait de cette propriété, la disposition carrée est une structure performante.

**4 - Antenne à nombre quelconque de capteurs**

Pour un nombre de capteurs élevé, il n'est pas possible de les placer dans le plan de façon à avoir l'ensemble des distances inter-capteurs égales à  $0,72 \lambda$ . Cependant, la double somme à minimiser peut être décomposée en un terme qui pour chaque capteur représente les voisins proches et en un terme associé aux voisins "secondaires". Si la géométrie de l'antenne est telle que le dernier terme a un impact mineur sur la valeur du facteur de directivité, il suffit alors d'optimiser la disposition des voisins proches. A cet effet, le principe de construction d'antennes suivant peut être énoncé : "pour chaque capteur, il faut maximiser son nombre de voisins proches, ces voisins proches seront placés à distance égale,  $d_0$ , de ce capteur, cette distance étant elle même respectée sur l'ensemble du réseau".

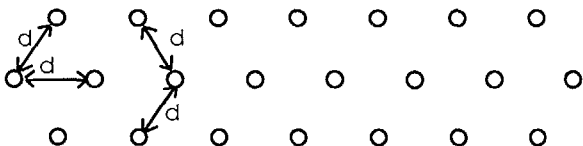


Figure 1 : Géométrie d'antenne hexagonale à 22 capteurs

Maximiser le nombre de voisins proches à distances égales conduit à des structures qui reprennent le triangle équilatéral de côté  $d_0$ , comme motif de base. Pour 4 capteurs, ce principe mène à une antenne de type "losange" aux performances analogues à celle de l'antenne carrée. Pour un nombre de capteurs plus important, on aboutit à des portions de réseaux hexagonaux comme le montre la figure 1 dans le cas d'une

antenne à 22 capteurs pour laquelle on a privilégié l'étalement du lobe dans le plan d'azimut.

Le paramètre variable est la distance qui peut être choisie en fonction de la direction de pointage. Par exemple, pour une direction de pointage normale au plan contenant les capteurs, on pourra prendre  $d_0 = 0,72 \cdot \lambda$ . Toutefois, l'effet des distances secondaires ne peut être complètement occulté et réclame une optimisation de  $d_0$ . On recherche donc la valeur de celle-ci qui assure le maximum du facteur de directivité. Il s'agit alors d'un problème d'optimisation à une seule dimension. Pour l'antenne présentée en figure 1, c'est une distance inter-capteurs égale à  $0,85 \cdot \lambda$  qui maximise le facteur de directivité comme le montre la figure 2. On note également sur cette figure la supériorité de l'antenne hexagonale par rapport à l'antenne "rectangulaire" constituée de 2 rangées de 11 capteurs. Pour la valeur de  $d_{nm}/\lambda$  qui maximise le facteur de directivité, les ouvertures angulaires des 2 antennes sont similaires.

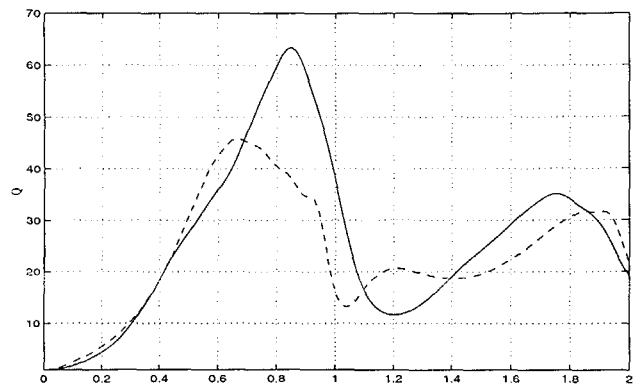


Figure 2 :  $Q(d/\lambda)$  pour l'antenne de la figure 1 (—) et pour une antenne rectangulaire de 2\*11 capteurs (---)

**III ANALYSE DE L'ALIASING SPATIAL**

**1- Réseau et transformée de Fourier bidimensionnelle**

Le choix d'une géométrie hexagonale est conforté par l'examen du comportement vis-à-vis de l'aliasing spatial. Pour cela il est fait appel au formalisme des réseaux plans périodiques tel que présenté dans [4]. Un tel réseau est défini par une matrice d'échantillonnage spatial  $T_0$ , le vecteur position des points du réseau étant donné par :

$$\vec{r}_n = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 \\ n_1 \cdot z_1 + n_2 \cdot z_2 \end{pmatrix} = T_0 \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \text{ où } T_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \text{ et } n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$$

La figure 3 donne l'exemple du réseau carré et du réseau hexagonal de distances entre capteurs proches égales à  $d$ .

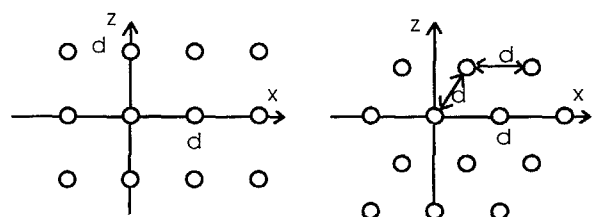


Figure 3 : Réseaux carré et hexagonal



Une antenne planaire périodique composée de capteurs répartis dans le plan (O,x,z) est complètement définie par la donnée d'un réseau périodique infini R et d'une fonction "d'illumination" spatiale continue a(x,z) à support borné Sa.

Considérons le vecteur "pulsation spatiale"  $\vec{W} = \begin{pmatrix} w_x - w_{x0} \\ w_z - w_{z0} \end{pmatrix}$  où  $w_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta)$  et  $w_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\theta)$  sont les pulsations spatiales et  $w_{x0}$  et  $w_{z0}$  sont associés à la direction de pointage. En faisant abstraction du terme de normalisation de l'équation (1), la fonction de transfert spatiale de l'antenne s'écrit :

$$H(f, \theta, \varphi) = H(\vec{W}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} a(n * T_0) \cdot e^{-j \langle \vec{W}, \vec{r}_n \rangle} \quad (7)$$

et est en fait la transformée de Fourier bidimensionnelle de la fonction continue a(x,z) échantillonnée aux points du réseau R. Du fait des propriétés de la convolution :

$$H(\vec{W}) = F_a(\vec{W}) \otimes S(\vec{W}) \quad (8)$$

où Fa et S sont les transformées de Fourier respectives de a(x,z) et du réseau et  $\otimes$  est le produit de convolution à deux dimensions.  $S(\vec{W})$  est appelé réseau réciproque car il s'agit également d'un champ d'impulsions périodiques [4]. La figure 4 donne les réseaux réciproques associés aux réseaux carré et hexagonal. Lorsque le support, Sa, de a(x,z) est grand par rapport au motif de base du réseau R et pour une fonction d'illumination constante,  $F_a(\vec{W})$  se rapproche d'une impulsion de Dirac et  $H(\vec{W}) \approx S(\vec{W})$ .

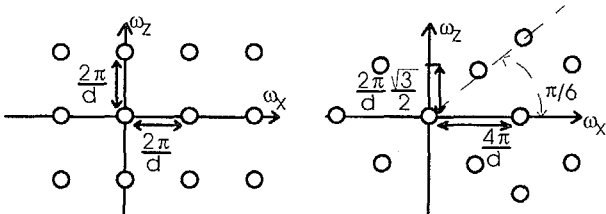


Figure 4: Réseaux réciproques des réseaux de la figure 2

### 2 Analyse de l'aliasing spatial

L'examen du spectre bi-dimensionnel permet de prévoir la distance inter-capteurs pour laquelle apparaissent les lobes d'aliasing ainsi que leurs directions. En effet, l'ensemble des pulsations spatiales explorées pour calculer le diagramme de directivité spatial est un cercle C centré en  $(w_{x0}, w_{z0})$  et de rayon  $\frac{2\pi}{\lambda}$ . L'apparition d'un point du réseau réciproque distinct de l'origine dans le cercle C correspond à l'apparition d'un lobe d'aliasing dans le diagramme de directivité de l'antenne. La distance inter-capteurs pour laquelle se manifeste ce lobe d'aliasing,  $d_{lim}$ , est déterminée en faisant tangenter le cercle C au point considéré. Pour connaître la position du lobe d'aliasing, il suffit de revenir aux coordonnées polaires.

Pour une direction de visée dans le plan d'azimut ( $\theta_0 = \pi/2$ ), pour une antenne carrée :

$$d_{lim} = \frac{\lambda}{1 + \cos(\varphi_0)} \quad (9)$$

et pour une antenne hexagonale :

$$d_{lim} = \lambda \frac{\sqrt{\frac{7}{3} - \frac{4}{3} \cos^2(\varphi_0) - \cos(\varphi_0)}}{\sin^2(\varphi_0)} \quad (10)$$

D'où pour une visée normale à l'antenne,  $((w_{x0}, w_{z0}) = (0,0))$ ,  $d_{lim} = \lambda$  pour l'antenne carrée et  $d_{lim} = 1,52 \cdot \lambda$  pour l'antenne hexagonale. Quant au premier lobe d'aliasing apparaissant dans le plan d'azimut pour une direction de visée quelconque dans ce plan ( $w_{x0} \neq 0$ ), il est atteint

pour  $d_{lim} = \frac{\lambda}{1 + \cos(\varphi_0)}$  pour l'antenne carrée et pour

$d_{lim} = \frac{2\lambda}{1 + \cos(\varphi_0)}$  pour l'antenne hexagonale.

Donc à même nombre de capteurs, l'antenne hexagonale peut être de plus grande taille que l'antenne carrée sans risque d'apparition de l'aliasing. En particulier, la taille de l'antenne hexagonale peut être double de celle de l'antenne carrée sans que l'aliasing apparaisse dans le plan d'azimut (il apparaît d'abord dans d'autres directions). Cette propriété est intéressante notamment en visioconférence où l'on cherche à discriminer des locuteurs situés dans le plan d'azimut. L'ouverture du lobe dans ce plan peut être réduite d'un facteur 2 à l'aide de l'antenne hexagonale, ce qui facilitera cette discrimination spatiale.

### IV CONCLUSION

Dans cet article, deux approches complémentaires pour l'analyse et la conception d'antennes sont présentées. Elles mettent notamment en évidence l'intérêt des réseaux hexagonaux. L'exploitation de ces deux formulations peut être poursuivie. En particulier l'expression du facteur de directivité peut permettre le calcul des pondérations individuelles qui maximisent la sélectivité spatiale de l'antenne pour une direction de pointage donné.

### REFERENCES

[1] : "Autodirective microphone systems", J. Flanagan et col, Acustica vol. 73 1991, pp 58 - 71  
 [2] : "A Microphone Array for Multimedia Workstations", Yannick Mahieux, Grégoire Le Tourneur, Alain Saliou, 98<sup>ème</sup> convention de l'AES, Paris, Février 1995.  
 [3] : "Optimization of Hydrophone Placement for Acoustics Arrays using Simulated Annealing", T. Hayward, JASA, vol. 95, n° 1, Janvier 1994, pp. 201-212.  
 [4] : "The Processing of Periodically Sampled Multidimensional Signals", M. Merserau, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 31, n° 1, Février 1983  
 [5] : "Spatial-Correlation Functions for Various Noise Models" : B. Cron & S. Sherman, JASA vol.34, Nov. 1962.  
 [6] : "Suppression of Coherent and Incoherent Noise using a Microphone Array", K. Simmer et col., Annales des Télécommunications, tome 49, n° 7-8, Juillet 1994,