

SUR LA RÉALLOCATION DES SCALOGRAMMES

Patrick FLANDRIN

Eric CHASSANDE-MOTTIN

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Laboratoire de Physique (URA 1325 CNRS)
46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07
E-mail: flandrin@physique.ens-lyon.fr

et

GdR 0134 CNRS *Traitement du Signal et Images*

Résumé

La réallocation est une technique qui consiste à déplacer la valeur calculée d'une distribution temps-fréquence ou temps-échelle en un autre point du plan, de façon à en améliorer la lisibilité. Dans le cas des scalogrammes (modules carrés de transformées en ondelettes), on donne la forme générale des opérateurs de réallocation et on en discute les propriétés en fonction de l'ondelette utilisée. On évalue par simulations les possibilités de caractérisation de singularités locales après réallocation et on illustre l'apport de la technique sur deux exemples, l'un mathématique et l'autre physique.

Abstract

Reassignment is a technique which consists in moving the computed value of a time-frequency or time-scale distribution to a different location in the plane, so as to increase readability. In the case of scalograms (squared modulus of wavelet transforms), a general form is given for the reassignment operators and their properties are discussed with respect to the chosen wavelet. Characterization of local singularities after reassignment is investigated by simulation and two examples (from mathematics and physics) are presented in order to support the usefulness of the approach.

1 Introduction

Une méthodologie très générale, appelée *réallocation*, a récemment été introduite pour améliorer la lisibilité des représentations temps-fréquence bilinéaires [4, 5, 6, 7]. Elle consiste en la généralisation d'une technique proposée il y a bientôt vingt ans par K. Kodera *et al.* dans le cas du seul spectrogramme [11, 10], les développements récents ayant été rendus possibles

1. en reformulant l'idée initiale à la lumière des progrès de l'analyse temps-fréquence "moderne," [9] ce qui a permis de sortir du cadre étroit du spectrogramme;
2. en proposant des algorithmes nouveaux et efficaces, ce qui a offert une amélioration notable aux outils existants.

Alors que l'essentiel des études précédentes a été consacré à la réallocation de distributions *temps-fréquence*, on se propose d'explorer ici le problème dans un contexte *temps-échelle*, et plus précisément d'étudier la réallocation des *scalogrammes*, c'est-à-dire des modules carrés de transformées en ondelettes.

2 Rappel du principe de réallocation

Alors qu'il est bien connu que les distributions d'énergie bilinéaires sont sujettes à un compromis entre résolution conjointe et interférences [9], la réallocation agit comme si, dans un premier temps, les termes interférentiels étaient réduits par lissage et, dans un deuxième temps, les termes résiduels — étalés par le lissage — étaient reconcentrés dans le plan en déplaçant les valeurs calculées vers le centre de gravité local des cellules de lissage. D'une manière plus précise, dans le cas des distributions temps-échelle $\Omega_x(t, a)$, le lissage est de type affine [12] et peut s'écrire

$$\Omega_x(t, a) = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_x(\tau, \xi) \Pi\left(\frac{\tau - t}{a}, a\xi\right) d\tau d\xi,$$

où $W_x(t, \nu)$ est la distribution de Wigner-Ville [9] du signal $x(t)$ et $\Pi(t, \nu)$ une fonction arbitraire assurant le lissage local. Il s'en suit — en introduisant l'équivalence formelle $\nu = \nu_0/a$, où ν_0 est une fréquence non-nulle de référence associée à l'échelle $a = 1$ — que, en chaque point (t, a) d'analyse, les centres de gravité locaux sont donnés



par

$$\hat{t}(t, a) = \frac{1}{\Omega_x(t, a)} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tau W_x(\tau, \xi) \Pi\left(\frac{\tau-t}{a}, a\xi\right) d\tau d\xi$$

et $\hat{a}(t, a) = \nu_0/\hat{\nu}(t, a)$, avec

$$\hat{\nu}(t, a) = \frac{1}{\Omega_x(t, a)} \iint_{-\infty}^{+\infty} \xi W_x(\tau, \xi) \Pi\left(\frac{\tau-t}{a}, a\xi\right) d\tau d\xi.$$

La distribution temps-échelle réallouée $\Omega_x^R(t, a)$ s'en déduit alors par

$$\Omega_x^R(t, a) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Omega_x(\tau, \alpha) \delta(t - \hat{t}(\tau, \alpha)) \delta(a - \hat{a}(\tau, \alpha)) \frac{d\tau d\alpha}{\alpha^2/a^2}.$$

3 Les opérateurs de réallocation du scalogramme

Un cas particulièrement important de représentation temps-échelle est le scalogramme

$$\Sigma_x(t, a) \equiv |T_x^{(\psi)}(t, a)|^2,$$

c'est-à-dire le module carré de la transformée en ondelettes

$$T_x^{(\psi)}(t, a) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \overline{\psi\left(\frac{s-t}{a}\right)} ds.$$

Pour une ondelette $\psi(t)$ fixée, le scalogramme est associé au lissage $\Pi(t, \nu) = W_\psi(t, \nu)$ [12].

Dans le cas d'ondelettes explicitement modulées, c'est-à-dire de la forme $\psi(t) = h(t) \exp(i2\pi\nu_0 t)$ avec $h(t)$ passés — soit encore dans le cas d'ondelettes qui sont essentiellement de type Morlet [8, 9] —, l'interprétation temps-fréquence du scalogramme conduit aux expressions d'opérateurs de réallocation données dans [7]. Il est cependant possible d'obtenir une forme plus générale de ces opérateurs dans le cas d'un scalogramme associé à une ondelette $\psi(t)$ quelconque — de fréquence de référence arbitraire ν_0 (par exemple la fréquence centrale), mais sans lien nécessaire avec l'existence d'une porteuse —, à la seule condition que celle-ci soit dérivable. On obtient explicitement

$$\hat{t}(t, a) = t + a \operatorname{Re} \left\{ \frac{T_x^{(\mathbf{T}\psi)}(t, a)}{T_x^{(\psi)}(t, a)} \right\}$$

$$\hat{a}(t, a) = -2\pi\nu_0 a / \operatorname{Im} \left\{ \frac{T_x^{(\mathbf{D}\psi)}(t, a)}{T_x^{(\psi)}(t, a)} \right\},$$

avec $(\mathbf{T}\psi)(t) \equiv t\psi(t)$ et $(\mathbf{D}\psi)(t) \equiv dh(t)/dt$.

Cette formulation permet de prendre en compte n'importe quelle ondelette (Morlet, dérivée de gaussienne, "chapeau mexicain," splines, ...) et de faciliter l'interprétation géométrique des déplacements mis en jeu dans la réallocation.

4 Trajectoires de réallocation dans le plan

Les scalogrammes réalloués bénéficient des propriétés idéales de localisation de la distribution de Wigner-Ville sur les droites du plan temps-fréquence (impulsions, fréquences pures, "chirps" [9]), ainsi que l'illustre la Figure 1 dans le cas d'une impulsion idéale.

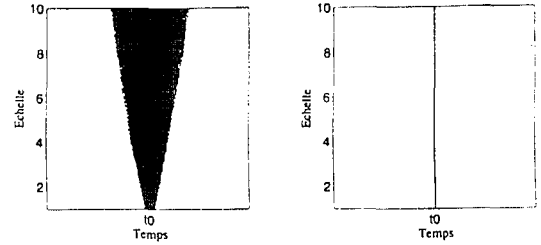


Figure 1. Scalogramme de Morlet (à gauche) et sa version réallouée (à droite) dans le cas d'une impulsion idéale située à l'instant t_0 .

La façon dont cette localisation résulte de la réallocation dépend cependant de la nature de l'ondelette utilisée. Ainsi, dans le cas de l'impulsion localisée à l'instant $t = t_0$, on montre que

$$\hat{t}_x(t, a) = t_0$$

$$\hat{a}_x(t, a) = \frac{\nu_0}{\nu_{\psi_{t_0}}(t_0)},$$

où $\nu_{\psi_{t_0}}(\tau)$ est la fréquence instantanée locale de l'ondelette à l'échelle a , c'est-à-dire la fréquence instantanée de

$$\psi_{t_0}(\tau) \equiv |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right).$$

Il s'ensuit que les trajectoires de réallocation ne sont parallèles à l'axe des temps que si la fréquence instantanée de l'ondelette est constante, ce qui est typiquement le cas de l'ondelette de Morlet. Dans les autres cas ("chapeau mexicain" par exemple), les trajectoires sont plus complexes ainsi que le montrent les figures 2 à 4.

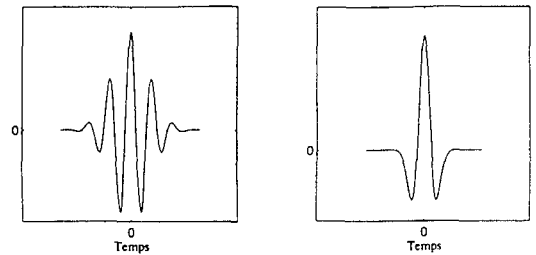


Figure 2. Partie réelle de l'ondelette de Morlet (à gauche) et du "chapeau mexicain" (à droite). La première est une onde monochromatique modulée en amplitude par une gaussienne alors que la deuxième est proportionnelle à la dérivée seconde d'une gaussienne.

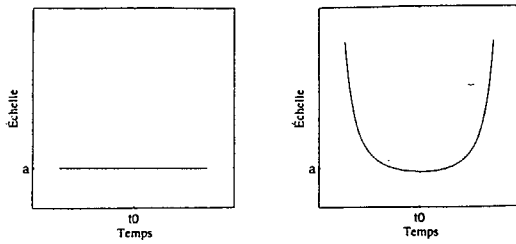


Figure 3. Echelle instantanée de l'ondelette de Morlet (à gauche) et du "chapeau mexicain" (à droite). Celle-ci est définie comme l'inverse de la fréquence instantanée, rapportée à la fréquence centrale prise comme référence à l'échelle unité.

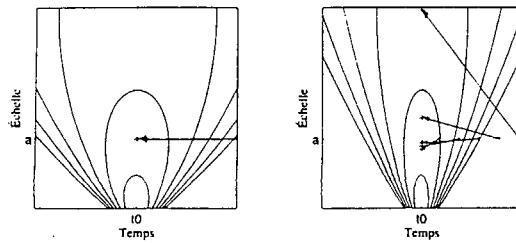


Figure 4. Vecteurs de réallocation du scalogramme — à échelle fixée — dans le cas d'une impulsion idéale située à l'instant $t = t_0$, avec ondelette de Morlet (à gauche) et "chapeau mexicain" (à droite). Si, pour des instants origine différents, les vecteurs ont tous leur extrémité en $t = t_0$, on vérifie que, conformément aux comportements rapportés en Figure 3, la réallocation ne s'opère parallèlement à l'axe des temps que si l'ondelette utilisée possède une échelle instantanée constante.

L'analyse de ces trajectoires permet par ailleurs de justifier les comportements observés lors de simulations et les précautions à prendre lors du calcul d'un scalogramme réalloué. Ainsi, le rejet de composantes énergétiques vers les hautes échelles — lorsque l'on utilise pour ondelette le "chapeau mexicain" — impose de prévoir un domaine de calcul plus large que celui que l'on souhaite observer, de façon à pouvoir intégrer l'énergie qui "entre" dans la zone d'observation, en provenance d'une gamme d'échelles extérieure à celle-ci.

5 Scalogrammes réalloués et singularités locales

Un des succès de l'analyse en ondelettes est dû à la capacité qu'ont ces dernières de caractériser les singularités locales (non oscillantes) d'un signal par inspection de la décroissance des coefficients à l'intérieur d'un "cône d'influence" centré sur la singularité [8]. Après

réallocation, le "cône d'influence" est réduit à un squelette très concentré — ce qui facilite la lisibilité — mais la complexité des trajectoires de réallocation ne garantit pas *a priori* qu'une estimation de la force d'une singularité puisse être conduite de la même façon. On peut cependant proposer des premiers éléments de réponse à cette question, basés essentiellement sur des simulations. Celles-ci ont été effectuées sur des singularités hœlderiennes isolées du type $|t|^H$, avec $-1 \leq H \leq +1$. Les résultats expérimentaux justifient alors que les scalogrammes réalloués présentent, à l'instant $t = 0$ de la singularité et tout comme les scalogrammes usuels, un comportement inter-échelles du type a^α dans la limite des petites échelles $a \rightarrow 0_+$. Pour des exposants de Hölder $0 \leq H \leq 1$, on observe (cf. Fig. 5) que les scalogrammes réalloués fournissent des résultats de même nature ($\alpha \sim 2H + 1$, identiques en cela à la valeur fournie par les scalogrammes non réalloués), que l'ondelette soit un "chapeau mexicain" ou une ondelette de Morlet. Ce résultat n'est cependant plus valable lorsque $H \leq 0$, l'ondelette de Morlet se distinguant dans ce cas par une relation pente-Hölder du type $\alpha \sim 2H$ (la pente étant estimée par régression linéaire aux petites échelles dans un diagramme log-log).

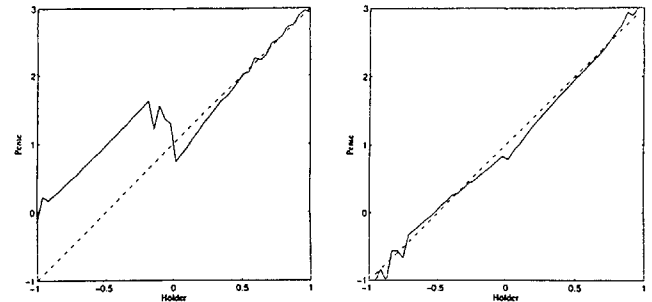


Figure 5. Abaques pente-Hölder obtenues sur un scalogramme réalloué — par régression linéaire aux petites échelles dans un diagramme log-log —, avec ondelette de Morlet (à gauche) et "chapeau mexicain" (à droite).

6 Deux exemples

A titre d'illustration et de justification relative au gain en lisibilité offert par la technique de réallocation, on peut considérer deux exemples d'origine différente, issus pour l'un d'une simulation numérique et pour l'autre d'une expérimentation physique.

Fonction de Weierstrass. Le premier exemple, de nature mathématique, est fourni par la fonction de Weierstrass :

$$W_H(t; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-kH} \sin \lambda^k t; \quad 0 \leq H \leq 1,$$

dont on sait qu'elle possède des propriétés d'auto-similarité lui fournissant un caractère fractal (sa dimension fractale est $D = 2 - H$). On vérifie sur la Figure 6 que, malgré l'allure très erratique du signal, son scalogramme réalloué met clairement en évidence — par sa



structure de branchement — l'organisation hiérarchique qui le sous-tend et est régie dans ce cas par le paramètre $\lambda = 3/2$ (rapport moyen entre deux échelles consécutives pour les points de branchement).

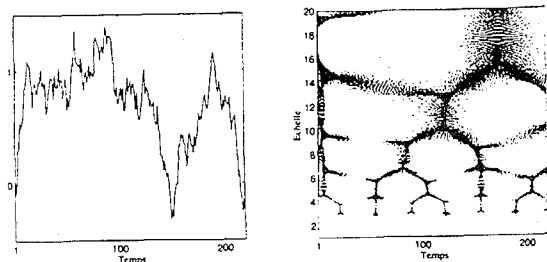


Figure 6. Fonction de Weierstrass $W_{1/2}(t; 3/2)$ (à gauche) et son scalogramme réalloué (à droite). On observe que ce dernier présente une structure arborescente dont les points de branchement se répartissent en moyenne sur des échelles consécutives en rapport $3/2$.

Signaux de pression en turbulence développée. Le deuxième exemple, de nature physique, est issu d'une expérience de turbulence développée, observée en laboratoire dans un fluide confiné entre deux disques contrarotatifs [1, 3]. La mesure fournit un signal de pression qui se caractérise en première approximation par un fond aléatoire partout singulier sur lequel se superposent de façon sporadique des dépressions brèves que l'on peut associer au passage de filaments de vorticité à proximité du capteur. Ces   v  nements portent une information sur le phénomène encore mal connu d'intermittence dans de tels écoulements, et leur caractérisation précise (nature singulière ou non des dépressions, statistique des temps d'attente, ...) revêt une grande importance pour une meilleure compréhension de la physique mise en jeu. La Figure 7 illustre le gain en lisibilité que l'on obtient dans ce contexte la réallocation, favorisant une détection automatique ultérieure des dépressions.

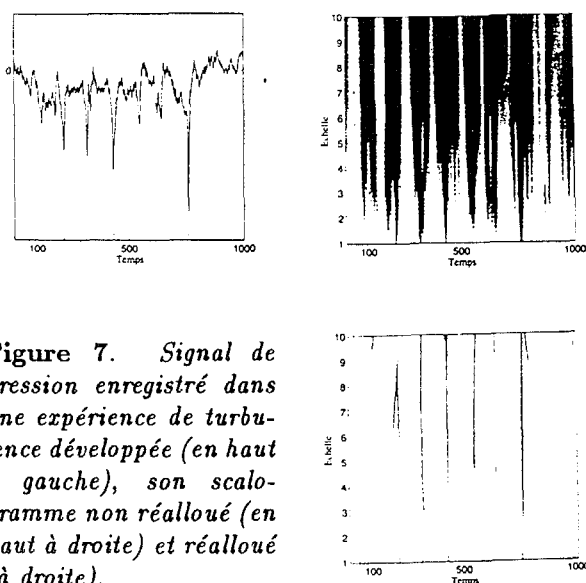


Figure 7. Signal de pression enregistré dans une expérience de turbulence développée (en haut à gauche), son scalogramme non réalloué (en haut à droite) et réalloué (   droite).

7 Conclusion

L'idée de réallocation, introduite initialement pour le seul spectrogramme, est généralisable à de larges classes de distributions. La réallocation a pour objet premier d'améliorer la lisibilité d'une représentation — partageant en cela un souci propre à d'autres approches comme les méthodes de "ridge and skeleton" ou de "synchrosqueezing" (on trouvera à ce sujet de premiers éléments de discussion dans [6]) — mais, plus qu'une méthode nouvelle, ce qu'elle offre en fait est avant tout un complément à des méthodes existantes. Dans le cas du scalogramme, il est cependant à noter que ses avantages intrinsèques se doublent d'une possibilité d'implantation algorithmique efficace [2], faisant des scalogrammes réalloués des outils d'analyse temps-échelle particulièrement prometteurs.

Références

- [1] P. ABRY, "Transformées en ondelettes — Analyses multirésolution et signaux de pression en turbulence," Thèse de Doctorat, ENS Lyon, 1994.
- [2] P. ABRY, E. CHASSANDE-MOTTIN, P. FLANDRIN, "Décompositions en ondelettes quasi-continues et leurs algorithmes rapides," 15  me Coll. GRETSI, Juan les Pins, 1995.
- [3] P. ABRY, S. FAUVE, P. FLANDRIN, C. LAROCHE, "Analysis of pressure fluctuations in swirling turbulent flows," *J. Phys. II*, Vol. 4, pp. 725-733, 1994.
- [4] F. AUGER, P. FLANDRIN, "La réallocation: une méthode générale d'amélioration de la lisibilité des représentations temps-fréquence," Coll "Temps-fréquence, Ondelettes et Multirésolution", pp. 15.1-15.7, INSA Lyon, 1994.
- [5] F. AUGER, P. FLANDRIN, "Generalization of the reassignment method to all bilinear time-frequency and time-scale representations, *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-94*, pp. IV-317-320, Adelaide, 1994.
- [6] F. AUGER, P. FLANDRIN, "The why and how of time-frequency reassignment," *Proc. IEEE-SP Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 197-200, Philadelphia, 1994.
- [7] F. AUGER, P. FLANDRIN, "Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, May 1995.
- [8] I. DAUBECHIES, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [9] P. FLANDRIN, *Temps-Fréquence*, Herm  s, Paris, 1993.
- [10] K. KODERA, R. GENDRIN, C. DE VILLEDARY, "Analysis of time-varying signals with small BT values," *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, Vol. ASSP-34, No. 1, pp. 64-76, 1978.
- [11] K. KODERA, C. DE VILLEDARY, R. GENDRIN, "A new method for the numerical analysis of time-varying signals," *Phys. Earth Plan. Int.*, No. 12, pp. 142-150, 1976.
- [12] O. RIOUL, P. FLANDRIN, "Time-scale energy distributions: A general class extending wavelet transforms," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. SP-40, No. 7, pp. 1746-1757, 1992.