DÉTECTION DE SIGNAUX NON-STATIONNAIRES PAR REPRÉSENTATION TEMPS-FRÉQUENCE. UNE CLASSE GÉNÉRALE DE DÉTECTEURS

Olivier LEMOINE

Laboratoire I3S, CNRS 1376 - UNSA Bât. 4, 250 Av. Albert Einstein
06 560 Valbonne Sophia-Antipolis

RÉSUMÉ

Certains résultats établis sur la détection par représentation temps-fréquence (RTF) tendent à montrer qu'une même expression du test de détection, construite à partir de RTF de la classe de Cohen, permet d'englober un large ensemble de détecteurs. Nous développons cette idée, en élargissant le champ des détecteurs concernés. Cette approche permet à fois de guider l'utilisateur dans la construction du détecteur le mieux adapté à son application, et de proposer des solutions efficaces, tirant pleinement profit des informations a priori *sur le signal, là où la théorie de la détection ne propose pas de solution optimale.*

ABSTRACT

Some results on detection using time-frequency distributions (TFD) tend to show that an identical expression of the decision test, built with TFDs of the Cohen's class, is valid for a large set of detectors. We develop this idea and widen the corresponding set. This approach is usefull to help the user in finding the best detector for its application, and to propose efficient solutions, using all the a priori *information on the signal, when the detection theory do not propose any optimal detector.*

1 INTRODUCTION

L'utilisation d'outils temps-fréquence dans la mise au point d'un détecteur présente plusieurs avantages : d'une part, elle permet, en associant description et décision, de pouvoir tirer facilement profit d'informations connues *a priori* sur le signal à détecter ; d'autre part, elle permet de développer des solutions là où une analyse temporelle s'avère inefficace, soit que le détecteur correspondant est trop lourd à mettre en œuvre (c'est souvent le cas du rapport de vraisemblance généralisé), soit que la théorie de la détection ne propose aucun détecteur optimal (ou sous-optimal) pour le signal considéré [Lem95].

L'objectif de cet article est de développer l'idée, proposée initialement dans [Fla88], d'une classe générale de détecteurs utilisant une formulation temps-fréquence. L'intérêt est à la fois de guider l'utilisateur dans la construction du détecteur optimal pour son application, et d'élargir les solutions proposées par la théorie de la détection. Pour cela, une analyse détaillée de différents détecteurs, allant du filtre adapté au détecteur d'énergie, est présentée, en précisant à chaque fois les performances du détecteur temps-fréquence obtenu, ainsi que le lien avec l'approche temporelle équivalente. Ces différents cas se distinguent par la nature des informations *a priori* dont on dispose sur le signal à détecter.

Le traitement temps-fréquence du problème de détection a fait l'objet de nombreux articles, notament dans [Alt80] et [FP89] grâce à des décompositions atomiques, ou bien dans [KC84], [KBB85], [Fla88] ou [Fla89] grâce à des distributions d'énergie. Nous nous limitons ici à l'approche énergétique. Le problème considéré est donc celui de la détection d'un signal non stationnaire complexe $s(t)$, de durée T_e , dans un bruit blanc gaussien complexe centré $b(t)$, de variance σ_b^2 :

$$\begin{cases} H_0 : x(t) = b(t), & t \in [0,T] \\ H_1 : x(t) = s(t-t_a) + b(t) & t \in [0,T] \end{cases}$$

$s(t)$ est le signal à détecter, de durée T_e, nul en dehors de l'intervalle $[0,T_e]$. B_e est sa largeur de bande approximative, et t_a son instant d'arrivée. On note ν_0 sa fréquence minimale. $[0,T]$ est l'intervalle temporel d'observation et $[0,B]$ la bande de fréquence analysée (le signal reçu $x(t)$ est supposé analytique). Les informations *a priori* dont on dispose en pratique sur $s(t)$ peuvent être par exemple des informations sur sa forme, sa phase, son spectre, ou sur la ou les lois statistiques suivies par certains de ses paramètres.

2 EXPRESSION DE LA STATISTIQUE

Dans l'optique d'une généralisation du *filtrage adapté* au plan temps-fréquence et au cas de signaux contenant des incertitudes, P. Flandrin a proposé la formulation d'un test de détection effectuant une corrélation entre la DWV de $x(t)$ et une distribution de la classe de Cohen d'un signal de référence $r(t)$ [Fla88] :

$$\lambda = \int_{(T)} \int_{(B)} W_x(t,\nu) C_r(t,\nu;\Pi) \, d\nu \, dt \tag{1}$$

L'interprétation de cette expression est la suivante : à partir de la DWV de l'observation $x(t)$, une pondération de chaque coefficient est effectuée, visant à faire ressortir les régions du plan temps-fréquence sur lesquelles le signal est présent et à masquer celles où ne figure que du bruit ; le test de détection consiste alors à intégrer cette nouvelle RTF sur tout le plan. Une telle analyse revient à comparer le degré de ressemblance entre la DWV du signal reçu et une "signature" temps-fréquence $C_r(t,\nu;\Pi)$ (à définir en fonction des informations *a priori*) à un seuil. Le choix de la DWV provient de ses bonnes propriétés, en particulier le fait qu'elle soit unitaire, qu'elle localise bien le signal et conserve les supports temporel et fréquentiel, et qu'elle soit à valeurs réelles. Comme cela est montré dans [Fla88], plusieurs types de signaux admettent une expression temps-fréquence du test de détection, semblable ou proche de (1), et qui est optimale (ou sous-optimale) au sens d'un critère bien défini. Nous proposons dans cet article de généraliser ce résultat à une gamme plus étendue de signaux. Le choix du signal de référence $r(t)$ et de la fonction de paramétrisation $\Pi(\tau,\xi)$ doivent être définis à partir des informations *a priori* sur $s(t)$, de la façon suivante :

- La fonction Π doit être réelle, afin que le test (1) le soit.
- Si l'information disponible sur $s(t)$ est une information précise sur son amplitude instantanée et/ou sa phase instantanée, elle sera utilisée pour construire le signal de référence $r(t)$, en sorte que celui-ci se rapproche le plus possible de $s(t)$.

bullet S'il s'agit plutôt d'une information approximative sur sa durée, sa largeur de bande ..., elle sera utilisée pour construire la fonction de paramétrisation $\Pi(\tau,\xi)$, c'est-à-dire le lissage effectué sur la DWV de $r(t)$.

- Enfin, si l'information concerne la densité de probabilité d'éventuels paramètres de décalage en temps et en fréquence, elle pourra être utilisée pour élargir la référence d'une quantité liée à la densité de probabilité du décalage conjoint, de telle sorte que le décalage éventuel soit rattrapé par l'élargissement [Fla88].

Ces deux derniers points correspondent à un étalement de la signature dans le plan temps-fréquence autour du signal de référence. Ils traduisent un compromis entre l'optimalité du détecteur et sa robustesse : plus la référence est élargie, plus le détecteur est robuste, mais plus on s'éloigne de la formulation optimale.

3 APPLICATION À DIFFÉRENTS SIGNAUX

3.1 Signal parfaitement connu

$s(t)$ étant connu, prendre $r(t) = s(t - t_a)$, $\forall t \in [0, T]$. Aucun lissage de $W_r(t,\nu)$ n'est nécessaire puisqu'on sait localiser parfaitement le signal (un filtrage "étalerait" $r(t)$ et diminuerait donc le rapport signal sur bruit en sortie de la statistique λ). On choisit donc $\Pi(\tau,\xi) = \delta(\tau)\ \delta(\xi)$. Ainsi $C_r(t,\nu;\Pi) = W_r(t,\nu)$ et le test (1) s'écrit :

$$\lambda_1 = \int_{\nu_0}^{\nu_0+B_e} \int_{t_a}^{t_a+T_e} W_x(t,\nu) W_s^*(t-t_a,\nu)\ dt\ d\nu.$$

Grâce à la propriété d'unitarité de la DWV (formule de Moyal), le test peut se réécrire sous la forme :

$$\lambda_1 = \left| \int_{t_a}^{t_a+T_e} x(t) s^*(t-t_a)\ dt \right|^2$$

ce qui correspond à la sortie du filtre adapté suivi d'un détecteur d'enveloppe quadratique. Par conséquent, le détecteur obtenu n'est pas optimal (le détecteur optimal dans ce cas est le filtre adapté). La baisse de performance par rapport au filtre adapté est due à la nature non linéaire du test (1), qui provient de la bilinéarité de la DWV. Cependant, cette baisse est peu importante [Wha71], et dans la plupart des cas, le signal n'est pas parfaitement connu.

3.2 Signal connu à paramètres inconnus

Phase initiale aléatoire

$s(t) = a(t)\ e^{j(\phi(t)+\phi_0)}$; ϕ_0 est une variable aléatoire uniforme. Dans la pratique, la phase initiale ϕ_0 d'un signal n'est généralement pas connue. Les grandeurs instantanées $a(t)$ et $\phi(t)$ sont supposées connues.

Prendre :
- $r(t) = a(t-t_a)\ e^{j(\phi(t-t_a))}$, $\forall\ t \in [0, T]$
- Pas de lissage de $W_r(t,\nu)$: $\Pi(\tau,\xi) = \delta(\tau)\ \delta(\xi)$

λ_2 est donc identique à λ_3 :

$$\lambda_2 = \int_{\nu_0}^{\nu_0+B_e} \int_{t_a}^{t_a+T_e} W_x(t,\nu) W_s^*(t-t_a,\nu)\ dt\ d\nu$$

ou encore, d'après la formule de Moyal,

$$\lambda_2 = \left| \int_{t_a}^{t_a+T_e} x(t) a^*(t-t_a) e^{-j(\phi(t-t_a))}\ dt \right|^2.$$

λ_2 est la solution optimale, au sens du rapport de vraisemblance ([Tre68], p. 335).

Instant d'arrivée aléatoire

Lorsque l'instant d'arrivée t_a est inconnu, la solution consiste à prendre pour $r(t)$ le signal $s(t)$ avec un retard τ arbitraire, que nous ferons varier de 0 à $T - T_e$. Le test devient :

$$\begin{aligned} \lambda_3(\tau) &= \int_{\nu_0}^{\nu_0+B_e} \int_{\tau}^{\tau+T_e} W_x(t,\nu) W_s^*(t-\tau,\nu)\ dt\ d\nu \\ &= \left| \int_{\tau}^{\tau+T_e} x(t) s^*(t-\tau)\ dt \right|^2 \end{aligned}$$

Le test consistant à comparer $\lambda_3(\tau)$ à un seuil correspond donc d'une part à une corrélation (par rapport au temps) entre les deux RTF W_x et W_s, et d'autre part à la sortie d'un filtre adapté suivi d'un détecteur d'enveloppe quadratique, qui est l'approche optimale (voir [Wha71]). L'instant τ qui maximise $\lambda_3(\tau)$ constitue l'estimation de t_a par maximum de vraisemblance :

$$\hat{t_a} = \mathrm{Argmax}_\tau \lambda_3(\tau).$$

Fréquence aléatoire

L'hypothèse selon laquelle la fréquence ν_p du signal reçu est aléatoire permet de prendre en compte, dans le cas du radar, le phénomène Doppler. Nous supposons cette fréquence uniformément distribuée, ainsi que la phase initiale ϕ_0 : $s(t) = a(t)\ e^{j(2\pi\nu_p t+\phi(t)+\phi_0)}$. Nous choisissons pour $r(t)$ le signal $s(t)$ privé de sa phase initiale et centré autour d'une fréquence arbitraire ξ, choisie entre $B_e/2$ et $B - B_e/2$:

- $r_\xi(t) = a(t) e^{j(2\pi\xi t+\phi(t))}$, $\forall t \in [0, T]$
- Pas de lissage de $W_{r_r}(t,\nu)$: $\Pi(\tau,\xi) = \delta(\tau)\ \delta(\xi)$.

La statistique λ_4 est alors une fonction de la fréquence ξ, donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda_4(\xi) &= \int_{\xi-\frac{B_e}{2}}^{\xi+\frac{B_e}{2}} \int_{t_a}^{t_a+T_e} W_x(t,\nu) W_s(t,\nu-\xi)\ dt\ d\nu \\ &= \left| \int_{t_a}^{t_a+T_e} x(t) a^*(t-t_a) e^{-j(2\pi\xi t+\phi(t-t_a))}\ dt \right|^2. \end{aligned}$$

Le test consistant à comparer $\lambda_4(\xi)$ à un seuil correspond donc d'une part à une corrélation (par rapport à la fréquence) entre les deux RTF W_x et W_s, et d'autre part à la sortie d'un filtre adapté suivi d'un détecteur d'enveloppe quadratique, qui est l'approche sous optimale (voir [Wha71]). Comme dans le cas précédent, la fréquence ξ qui maximise $\lambda_4(\xi)$ ($\hat{\nu_p} = \mathrm{Argmax}_\xi \lambda_4(\xi)$) constitue l'estimation de ν_p par maximum de vraisemblance.

Amplitude aléatoire gaussienne: canal de Rayleigh
$s(t) = Aa(t)e^{j(\phi(t)+\phi_0)}$ avec A variable aléatoire gaussienne complexe centrée, de variance $E[|A|^2] = \sigma_A^2$. Ce type de signal est souvent appelé *canal de Rayleigh.* $a(t)$ et $\phi(t)$ sont supposés connus.

Choix: • $r(t) = a(t-t_a)e^{j(\phi(t-t_a))}$, $\forall t \in [0,T]$
• Pas de lissage de $W_r(t,\nu)$: $\Pi(\tau,\xi) = \delta(\tau)\,\delta(\xi)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\lambda_5 &= \int_{\nu_0}^{\nu_0+B_e}\int_{t_a}^{t_a+T_e} W_x(t,\nu)W_r(t,\nu)\,dt\,d\nu \\ &= \left|\int_{t_a}^{t_a+T_e} x(t)a^*(t-t_a)e^{-j(\phi(t-t_a))}\,dt\right|^2.\end{aligned}$$

Ce test, qui correspond à nouveau au filtre adapté suivi d'un détecteur d'enveloppe quadratique, est le test uniformément le plus puissant vis-à-vis de A [Wha71]. Il s'agit donc du test optimal.
Dans le cas où s(t) possède des paramètres déterministes inconnus, $s(t) = Aa(t,\theta)e^{j\phi(t,\theta)}$, prendre $r(t) = a(t;\hat{\theta})\exp j\phi(t;\hat{\theta})$ où $\hat{\theta}$ désigne l'estimation de θ par maximum de vraisemblance. Il a été montré dans [KBB85] que le test obtenu correspond à la solution par maximum de vraisemblance généralisé, qui est la solution asymptotiquement optimale (pour T tendant vers l'infini).

Canal de Rayleigh avec gigue
Le signal à détecter présente une amplitude A aléatoire, ainsi que des fluctuations aléatoires de son instant d'arrivée τ et de sa fréquence minimale ξ :

$$s(t) = Aa(t-\tau)e^{j(2\pi\xi t+\phi(t-\tau)+\phi_0)},$$

avec τ et ξ variables aléatoires de densité de probabilité conjointe $G(\tau,\xi)$ connue, définie sur le domaine temps-fréquence $[0,T]\times[0,B]$. Ce type de signal est fréquemment rencontré dans les systèmes radar, pour lesquels τ est proportionnel à la distance radar-cible, et ξ à la vitesse de la cible, l'amplitude aléatoire traduisant les fluctuations de la cible et les variations dues à la transmission. Cette densité de probabilité conjointe peut être utilisée comme fonction de paramétrisation pour lisser la référence :

• $r(t) = a(t)e^{j(\phi(t))}$, $\forall\, t \in [0,T]$
• $\Pi(\tau,\xi) = G(\tau,\xi)$.

Ainsi

$$\lambda_6 = \int_0^B\int_0^T W_x(t,\nu)C_r(t,\nu;G)\,dt\,d\nu.$$

Le test consiste donc à effectuer la corrélation temps-fréquence entre la DWV du signal reçu et la distribution de la classe de Cohen du signal de référence, de fonction de paramétrisation $G(\tau,\xi)$. Comme cela a été démontré dans [Fla88], cette solution est localement optimale, obtenue par décomposition de Karhunen-Loève.

Échos multiples
Considérons le cas d'un signal à plusieurs composantes arrivant à différents instants et possédant différentes fréquences Doppler : $\sum_{i=1}^{N_c} A_i s(t-\tau_i)e^{j2\pi\nu_{D_i}t}$. Nous supposons la forme $s(t)$ (correspondant au signal émis dans le cas du radar) connue, ainsi que sa durée T_e et sa largeur de bande B_e. Les amplitudes A_i sont supposées aléatoires gaussiennes et les phases initiales aléatoires uniformes. Choisir pour $r(t)$ le signal émis $s(t)$ privé de sa phase initiale, démarrant à l'instant τ et de fréquence Doppler ξ, et pour C_r la DWV :

• $r_{\tau,\xi}(t) = s(t-\tau)e^{j2\pi\xi t}$, $\forall\, t \in [0,T]$
• Pas de lissage de $W_r(t,\nu)$: $\Pi(\tau,\xi) = \delta(\tau)\,\delta(\xi)$.

Ainsi la statistique obtenue va dépendre de τ et de ξ, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\lambda_7(\tau,\xi) &= \int_{\xi}^{\xi+B_e}\int_{\tau}^{\tau+T_e} W_x(t,\nu)W_s(t-\tau,\nu-\xi)\,dt\,d\nu \\ &= \left|\int_{\tau}^{\tau+T_e} x(t)s^*(t-\tau)e^{-j2\pi\xi t}\,dt\right|^2.\end{aligned}$$

L'expression de λ_7 correspond à une corrélation temps-fréquence des deux distributions de Wigner-Ville. Cette solution revient à mettre en œuvre une banque de filtres adaptés (à chaque fréquence et à chaque instant), suivie d'un détecteur d'enveloppe quadratique. Cette solution est asymptotiquement optimale.

3.3 Canal aléatoire variable en temps

Dans le cas présent, nous supposons que le signal à détecter $s(t)$ correspond à la sortie d'un canal de réponse impulsionnelle $h(t,u)$ variable en temps, dont l'entrée est un signal déterministe connu $f(t)$:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,u)\,f(u)\,du.$$

Nous supposons de plus que $E[h(t,u)] = 0$ et

$$E[h(t_1,u_1)\,h^*(t_2,u_2)] = k(t_1-t_2,u_1)\,\delta(u_1-u_2).$$

Considérons la *fonction de dispersion* du canal, qui décrit la dispersion attendue du signal d'entrée en temps et en fréquence :

$$S(t,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t,u)\,e^{-j2\pi\nu u}\,du.$$

Cette fonction peut être utilisée comme fonction de paramétrisation, de telle sorte qu'elle "étale" judicieusement en temps et en fréquence le signal d'entrée, choisi comme référence :

• $r(t) = f(t)$, $\forall\, t \in [0,T]$
• $\Pi(\tau,\xi) = S(\tau,\xi)$

Par conséquent

$$\lambda_8 = \int_0^B\int_0^T W_x(t,\nu)C_f(t,\nu;S)\,dt\,d\nu.$$

Cette solution est localement optimale [Fla88].

3.4 Durée et largeur de bande connues

Supposons les grandeurs T_e et B_e connues. Ce type d'information ne permet pas de caractériser le signal de référence. Elle peut par contre être utilisée efficacement pour définir le filtrage à effectuer sur la DWV du signal reçu : il s'agit de considérer la région du PTF définie par $[\tau, \tau + T_e] \times [\xi, \xi + B_e]$, et de faire varier τ et ξ respectivement de 0 à $T - T_e$ et de 0 à $B - B_e$. Ceci peut être réalisé en choisissant :

- $r(t) = \delta(t - \tau)\ e^{j2\pi\xi t}$
- $\Pi(t, \nu) = 1/(T_e B_e)$ si $t \in [\tau, \tau + T_e]$ et $\nu \in [\xi, \xi + B_e]$ $= 0$ sinon

La constante $1/(T_e B_e)$ est choisie de façon à respecter la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t, \nu)\ dt\ d\nu\ =\ 1.$$

Ce choix de la fonction de paramétrisation est justifié par la propriété de conservation des supports temporel et fréquentiel vérifiée par la DWV. La statistique obtenue est alors une fonction de τ et ξ donnée par :

$$\lambda_9(\tau, \xi) = \frac{1}{T_e B_e} \int_{\xi}^{\xi + B_e} \int_{\tau}^{\tau + T_e} W_x(t, \nu)\ dt\ d\nu.$$

Les valeurs de τ et ξ pour lesquelles $\lambda_9(\tau, \xi)$ est maximum constituent des estimations de t_a et ν_0 respectivement.

3.5 Aucune information

Le dernier cas à considérer est celui correspondant à une absence totale d'information sur $s(t)$. Rien ne permet donc de caractériser $r(t)$, ainsi que la fonction de paramétrisation. On les choisit donc tous les deux égaux à des constantes : $x(t) = 1$ et $\Pi(t, \xi) = 1/(TB)$. D'où

$$\lambda_{12} = \frac{1}{TB} \int_0^T \int_{(B)} W_y(t, \nu) dt\ d\nu = \frac{1}{TB} \int_0^T |y(t)|^2\ dt$$

ce qui n'est autre que le détecteur d'énergie, solution optimale au sens du maximum de vraisemblance, et qui consiste à comparer l'énergie du signal reçu à un seuil.

4 CALCUL DU SEUIL

Le calcul du seuil, selon le critère de Neyman-Pearson et pour une probabilité de fausse alarme P_{fa} donnée, nécessite la connaissance de la densité de probabilité $p_{\Lambda 0}(\lambda)$ de la statistique λ sous l'hypothèse bruit seul. Si celle-ci est connue, le seuil λ_0 peut être calculé en inversant la formule :

$$P_{fa}\ = \int_{\lambda_0}^{+\infty} p_{\Lambda 0}(\lambda)\ d\lambda \qquad (2)$$

Dans le cas où $\Pi(\tau, \xi) = \delta(\tau)\delta(\xi)$, la statistique λ s'exprime simplement sous la forme :

$$\lambda = \left| \int_0^T x(t) r^*(t)\ dt \right|^2. \qquad (3)$$

x suivant une loi normale complexe blanche (hypothèse H_0), l'intégrale précédente suit aussi une loi normale complexe, et par conséquent λ suit une loi exponentielle, qui s'écrit[1] :

$$p_{\Lambda 0}(\lambda) = \frac{1}{m_\Lambda} \exp\left[-\frac{\lambda}{m_\Lambda}\right] U(\lambda), \qquad (4)$$

où $m_\Lambda = E[\Lambda] = \sigma_x^2 E_r$. D'où le seuil à appliquer sur λ :

$$\lambda_0 = -\sigma_x^2 E_r ln P_{fa}\ . \qquad (5)$$

Dans les autres cas, il ne semble pas possible d'obtenir une expression analytique de la densité de probabilité de λ sous H_0. Il faut alors calculer le seuil expérimentalement.

[1] $U(\lambda)$ désigne l'échelon unité et E_r l'énergie de $r(t)$.

5 SORTIR DE LA CLASSE DE COHEN

Pour certaines applications bien particulières, les deux degrés de libertés laissés par r et Π dans la construction du détecteur ne suffisent pas pour exploiter pleinement les informations *a priori* sur le signal à détecter. Par exemple, appliquer un masque dans le PTF de largeur variable au cours du temps n'est pas possible à partir d'une distribution du type $C_r(t, \nu; \Pi)$. Il peut alors être intéressant de sortir de la classe de Cohen, et de remplacer $C_r(t, \nu; \Pi)$ par une "fenêtre temps-fréquence" $H(t, \nu)$, qui devra être définie à partir de ces mêmes informations *a priori* :

$$\lambda' = \int_{(T)} \int_{(B)} W_x(t, \nu) H(t, \nu)\ d\nu\ dt. \qquad (6)$$

Cela revient à effectuer un *filtrage variable en temps* du signal observé $x(t)$, et à intégrer sur tout le PTF la représentation ainsi filtrée. L'avantage de cette méthode par rapport à (1) est d'être plus souple, mais l'inconvénient majeur est qu'il n'est alors plus possible de faire le lien avec les expressions optimales temporelles.

Références

[Alt80] R. A. Altes. Detection, Estimation, and Classification with Spectrograms. *Journ. Acoust. Soc. Amer.*, 67(4):1232–1246, 1980.

[Fla88] P. Flandrin. A Time-frequency Formulation of Optimum Detection. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, 36:1377–1384, 1988.

[Fla89] P. Flandrin. Représentations temps-fréquence des signaux non stationnaires. *Traitement du Signal*, pages 89–101, 1989.

[FP89] B. Friedlander and B. Porat. Detection of Transient Signals by the Gabor Representation. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, 37(2):169–180, February 1989.

[KBB85] S. Kay and F. Boudreaux-Bartels. On the Optimality of the Wigner Distribution for Detection. In *ICASSP*, pages 27.2.1–4, 1985.

[KC84] B. Kumar and C. Carroll. Performance of Wigner distribution function based detection methods. *Optical Engineering*, 23(6):44–52, 1984.

[Lem95] O. Lemoine. *Détection de Signaux Non Stationnaires par Représentation Temps-Fréquence*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1995.

[Tre68] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory - Part I*. Wiley New-York, 1968.

[Wha71] A. Whalen. *Detection of Signals in Noise*. Academic Press, NY, 1971.