

# BANCS DE FILTRES À RECONSTRUCTION PARFAITE DÉTERMINATION D'UNE NOUVELLE STRUCTURE TREILLIS

Didier PINCHON<sup>✧</sup> et Pierre SIOHAN<sup>✧</sup>

<sup>✧</sup>Laboratoire MIP, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex, France  
<sup>✧</sup>CCETT, 4 rue du Clos Courtel, BP 59, 35512 Cesson-Sévigné, France

## RÉSUMÉ

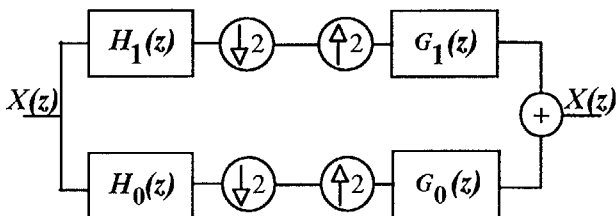
Une nouvelle structure de type treillis est obtenue qui permet, avec une complexité opératoire minimale, d'engendrer l'ensemble des systèmes de bancs de filtres à 2 sous-bandes dans le cas des filtres de type RIF à phase linéaire et pour toutes les longueurs impaires admissibles. La méthode algébrique mise en oeuvre exploite l'identité de Bezout vérifiée par les composantes polyphases des filtres d'analyse et fournit une explication des cas exceptionnels de singularités, caractéristiques des treillis déjà utilisés pour les bancs de filtres de longueurs paires [1-2].

## ABSTRACT

A new lattice structure is obtained which allows, with the lowest implementation complexity, to realize all two-channels perfect-reconstruction filter banks with linear phase FIR filters and for all admissible odd lengths. The algebraic approach used takes advantage of the Bezout's identity linking the polyphase components of the analysis filters and gives an explanation to the singularities which may occur when using the lattice structure proposed for even length filter banks [1-2].

## 1. INTRODUCTION

Dans le cas le plus général les systèmes de bancs de filtres à 2 sous-bandes peuvent se représenter par le schéma à quatre filtres, qui est celui reporté à la Figure 1.



**Figure 1.** Exemple d'un banc de filtres (non causal) à reconstruction parfaite,  $G_0(z) = H_1(-z)$  et  $G_1(z) = -H_0(-z)$ .

Du fait de la contrainte de reconstruction parfaite, il suffit de connaître deux de ces filtres pour déterminer complètement l'ensemble du banc. Si de plus on impose qu'il soit constitué de filtres RIF à phase linéaire, on sait que seuls deux types de solutions non triviales peuvent produire un banc de filtres à phase linéaire et à reconstruction parfaite [1-3] :

- Solution de type A : Les deux filtres sont de symétrie opposées et leurs longueurs paires diffèrent d'un multiple pair de 2.
- Solution de type B : Les deux filtres sont symétriques et leurs longueurs sont impaires et diffèrent d'un multiple impair de 2.

Pour la réalisation de ces filtres, si des structures en échelle peuvent être envisagées [4], les structures de référence à l'heure actuelle sont les structures transversales et celles en treillis [1-2]. Les avantages bien connus du treillis sont sa complexité opératoire plus réduite [1] ainsi que la garantie d'une reconstruction parfaite en dépit de la quantification des coefficients. Malheureusement aucune des structures treillis proposées actuellement n'est à la fois complète et canonique.

En développant la structure algébrique sous-jacente à la conception des bancs de filtres à reconstruction parfaite [3], nous dérivons une nouvelle structure pour les filtres de longueurs impaires (type B) qui est à la fois complète et canonique, c'est-à-dire qui permet avec un banc de filtre à complexité opératoire minimale de couvrir l'ensemble des solutions polynomiales à ce problème. Nous utilisons ensuite cette nouvelle structure de type B pour caractériser de manière explicite les singularités qui font que les structures de type A décrites en [1-2] ne sont pas complètes.

## 2. MÉTHODE DE CONSTRUCTION

Le principe de la méthode que nous proposons consiste à analyser à l'aide de l'identité de Bezout l'ensemble des paires  $[H_0, H_1]$  de longueurs impaires et à reconstruction parfaite, d'où nous déduisons une expression générale sous forme factorisée de la matrice polyphase associée.



## 2.1 Solution à reconstruction parfaite

Nous considérons ici le cas d'un système de type B dont les longueurs impaires des filtres  $H_0(z)$  et  $H_1(z)$  sont notées respectivement  $2p+1$  et  $2q+1$ .

Soit  $\mathbf{H}_p(z) = [H_{k,l}, 0 \leq k, l \leq 1]$  la matrice polyphase du banc d'analyse. La condition de reconstruction parfaite pour le banc complet est donnée par [3]

$$H_{0,0}(z)H_{1,1}(z) - H_{0,1}(z)H_{1,0}(z) = cz^{-d} \quad (1)$$

où  $c$  est une constante non nulle et  $d$  un entier positif. Soit  $P(z)$  un polynôme symétrique de degré  $n$ , c'est-à-dire tel que  $P(z) = z^{-n}P(z^{-1})$ , on note  $\bar{P}(u)$  le polynôme de degré  $n$  défini par

$$P(z) = z^{-n/2}\bar{P}(z+z^{-1}). \quad (2)$$

L'équation (1) peut alors se réécrire, en remplaçant  $z$  par  $z^{-1}$  et en multipliant chaque membre par  $z^{-(p+q+1)}$ , sous la forme

$$\bar{H}_{0,0}(u)\bar{H}_{1,1}(u) - \bar{H}_{0,1}(u)\bar{H}_{1,0}(u) = c. \quad (3)$$

À propos de cette identité, on note que

- les polynômes symétriques  $H_{0,0}(z)$  et  $H_{0,1}(z)$  sont premiers entre eux si et seulement si les polynômes  $\bar{H}_{0,0}(u)$  et  $\bar{H}_{0,1}(u)$  sont premiers entre eux,
- si  $p$  est pair alors  $\bar{H}_{0,0}(u)$  est de degré pair et  $\bar{H}_{0,1}(u)$  de degré impair et inversement si  $p$  est impair,
- l'un des filtres pouvant être défini à une constante près, nous supposons maintenant que  $c = 1$ .

D'après le théorème de Bezout si  $\bar{H}_{0,0}$  et  $\bar{H}_{0,1}$  sont premiers entre eux, il existe un couple unique de polynômes  $(\bar{H}_{1,0}^0, \bar{H}_{1,1}^0)$  vérifiant

$$\bar{H}_{0,0}(u)\bar{H}_{1,1}^0(u) - \bar{H}_{0,1}(u)\bar{H}_{1,0}^0(u) = 1 \quad (4)$$

avec  $\delta(\bar{H}_{1,0}^0) < \delta(\bar{H}_{0,0})$  et  $\delta(\bar{H}_{1,1}^0) < \delta(\bar{H}_{0,1})$  (Ici et dans toute la suite  $\delta(P)$  désigne le degré de  $P$ , polynôme en  $z^{-1}$ . Si  $P(z) = \sum_{i=0}^{\delta(P)} c_i z^{-i}$  avec  $c_{\delta(P)} = 1$ ,  $P$  est dit *unitaire*).

On déduit de ce résultat la forme générale de la solution de l'équation (1).

**Théorème 1.** – Soit  $H_0(z)$  un filtre symétrique unitaire de longueur impaire  $2p+1$  dont les composantes polyphases  $H_{0,0}(z)$  et  $H_{0,1}(z)$  sont des polynômes premiers entre eux. Alors il existe un entier  $m$  et un filtre symétrique  $H_1^0(z)$  de longueur  $2p-4m-1$  tels que la paire  $[H_0, H_1^0]$  soit à reconstruction parfaite. Ce filtre, unique à une constante multiplicative près, est donné par

$$\bar{H}_1^0(z) = z^{-\delta(\bar{H}_{1,0}^0)} \bar{H}_{1,0}^0(z+z^{-1}) + z^{-\delta(\bar{H}_{1,0}^0)-1} \bar{H}_{1,1}^0(z+z^{-1}). \quad (5)$$

Les autres systèmes  $[H_0, H_1]$  à reconstruction parfaite sont donnés par

$$H_1(z) = \alpha z^{-2(r+m+1)} H_1^0(z) + Q(z^2) H_0(z), \quad (6)$$

où  $Q(z)$  est un polynôme en  $z^{-1}$  non nul, symétrique, de degré impair  $2r+1$  et  $\alpha$  une constante non nulle.

On note que  $H_1(z)$  est unitaire si et seulement si  $Q(z)$  est unitaire. Le filtre unitaire proportionnel à  $H_1^0(z)$  est appelé *filtre complémentaire* de  $H_0(z)$  et est noté  $\mathcal{C}(H_0)$

Si l'on note  $\mathbf{H}_p^{(1)}(z)$  la matrice polyphase du système  $[H_0, H_1^0]$ , alors si  $\delta(H_0) < \delta(H_1)$ , on a

$$\mathbf{H}_p(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q(z) & \alpha z^{-(r+m+1)} \end{bmatrix} \mathbf{H}_p^{(1)}(z). \quad (7)$$

## 2.2 Expression générale de la matrice polyphase

Soit  $[H_0, H_1]$  une paire de filtres à reconstruction parfaite composée de filtres unitaires, symétriques, de longueur impaire. Sans perte de généralité, on peut supposer pour l'instant que  $\delta(H_1) < \delta(H_0)$  (c'est-à-dire que  $H_1 = \mathcal{C}(H_0)$ )

Les composantes polyphases de  $H_1(z)$  étant premières entre elles, d'après le théorème 1, il existe un unique filtre unitaire, symétrique, de longueur impaire  $H_2(z)$  avec  $\delta(H_2) < \delta(H_1)$  tel que la paire  $[H_2, H_1]$  soit à reconstruction parfaite. Soit  $\mathbf{H}_p^{(2)}(z)$  sa matrice polyphase. Si  $\delta(H_1) > 0$ , il existe une constante  $\alpha_1$  non nulle, un exposant entier  $k_1$  et un polynôme symétrique unitaire de degré impair tels que

$$\mathbf{H}_p(z) = \begin{bmatrix} \alpha_1 z^{-k_1} & Q_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{H}_p^{(2)}(z). \quad (8)$$

Il est de cette manière possible de réitérer la construction en produisant une suite  $H_0, H_1, H_2, H_3, \dots$  de filtres unitaires symétriques de longueurs impaires telle que deux filtres consécutifs de cette suite forment une paire à reconstruction parfaite jusqu'à l'obtention d'un filtre de la forme  $H_N(z) = \alpha_N z^{-(2k_N+1)} + Q_N(z^2)$ , où  $Q_N$  est unitaire, symétrique, de degré impair  $2k_N+1$ , dont le filtre complémentaire est le filtre constant égal à 1.

À la dernière étape de cette décomposition, nous associons donc l'une ou l'autre des matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_N(z) & \alpha_N z^{-k_N} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} Q_N(z) & \alpha_N z^{-k_N} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut ainsi en déduire la forme factorisée de la matrice polyphase  $\mathbf{H}_p(z)$  en fonction de matrices élémentaires définies par

$$M_0(n, Q, \alpha) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q(z) & \alpha z^{-k} \end{bmatrix} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \begin{bmatrix} Q(z) & \alpha z^{-k} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (9)$$

$$M(n, Q, \alpha, l) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q(z) & \alpha z^{-l} \end{bmatrix} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \begin{bmatrix} \alpha z^{-l} & Q(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

**Théorème 2.**— Soit  $[H_0, H_1]$  un système de banc de filtres à reconstruction parfaite tel que les filtres  $H_0$  et  $H_1$  soient symétriques, unitaires, de degrés pairs avec  $\delta(H_1) < \delta(H_0)$ . Il existe de manière unique

- un entier positif  $N$ ,
- une suite  $(\alpha_i, i=1, \dots, N)$  de nombres réels non nuls,
- une suite  $(Q_i, i=1, \dots, N)$  de polynômes symétriques, unitaires, de degré impairs ( $\delta(Q_i) = 2k_i + 1$ ),

tels que la matrice polyphase du banc  $[H_0, H_1]$  s'écrive sous la forme

$$\mathbf{H}_p(z) = \left( \prod_{i=1}^{N-1} M(i, Q_i, \alpha_i, k_i + k_{i+1} + 1) \right) M_0(N, Q_N, \alpha_N). \quad (10)$$

À partir de cette dernière expression, on peut construire, avec une cascade de  $N$  cellules, une paire de filtres  $[H_0, H_1]$  dont les degrés sont donnés par

$$\delta(H_1) = 4 \sum_{i=2}^N k_i + 2(N-1), \delta(H_0) = \delta(H_1) + 4k_1 + 2. \quad (11)$$

On distingue les cas suivants

- le cas *non défectif* où tous les polynômes  $Q_i(z)$  sont tous de degré 1,
- le cas *défectif* où l'un au moins des polynômes  $Q_i(z)$  est de degré strictement supérieur à 1 ( $k_i \neq 0$ ).

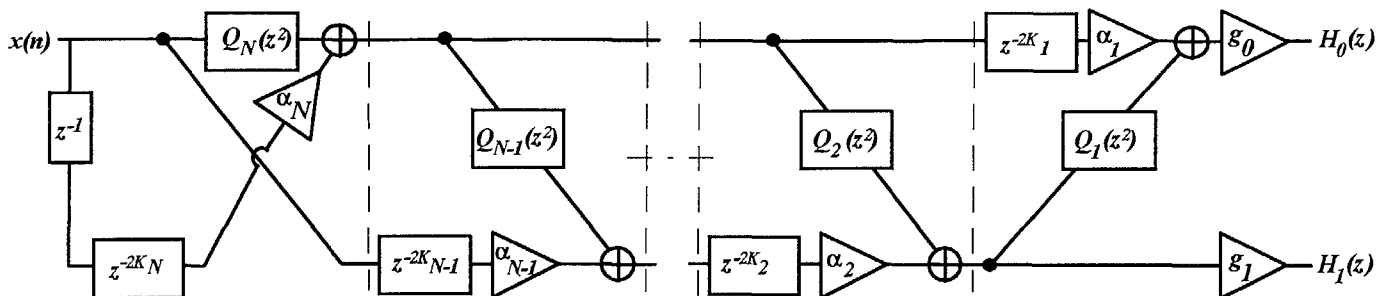


Figure 2. Banc d'analyse d'un système général de type B ( $N$  impair).

Sous les hypothèses du théorème 2, on dira également que le filtre  $H_0(z)$  est *défectif* ou *non défectif*.

Dans le cas de filtres de longueurs successives la défektivité correspond à une situation relativement exceptionnelle en pratique. Un lien entre les systèmes réguliers de type A et certains systèmes non défectifs sera établi dans le paragraphe 4.

Un exemple de structure cascade correspondant au cas le plus général est reporté à la Figure 2. Dans ce schéma les notations utilisées sont reliées à celles de l'équation (10) par  $K_i = k_i + k_{i+1} + 1, 1 \leq i \leq N-1$  et  $K_N = k_N$ .  $g_0$  et  $g_1$  représentent deux constantes de normalisation qui permettent d'obtenir, à un décalage près, une sortie égale à l'entrée.

### 3. ÉVALUATION DE LA COMPLEXITÉ OPÉRATEIRE

Les bancs d'analyse et de synthèse ayant une structure similaire et les opérations de décimation et d'interpolation ayant, après permutations adéquates, des répercussions identiques en terme de réduction du nombre d'opérations arithmétiques [6], il nous suffit d'évaluer la complexité opératoire pour le banc d'analyse. Pour cela nous comptons le nombre de multiplication (MPU) et d'additions (APU) par unité de temps. Pour comparer équitablement les structures transverses et treillis, on applique pour chaque cas, l'ensemble des simplifications déjà connues :

- Quelle que soit la structure retenue, la charge de calcul peut être divisée par 2 en permutant, à l'analyse, les opérations de filtrage et de sous-échantillonnage [6],
- La symétrie des filtres est mise à profit pour réduire la complexité des filtres transversaux, y compris celle associée aux  $Q_i(z)$ .

L'élément nouveau apporté ici concerne l'évaluation de la structure treillis canonique. Chaque cellule comportant un filtre symétrique unitaire  $Q_i(z)$ , un multiplieur ( $\alpha_i$ ) et un additionneur, son coût est de  $k_i + 1$  MPU et de  $2k_i + 1$  APU. Si le système est défectif, le coût opératoire de certaines cellules peut être plus élevé mais, pour des longueurs de filtres données, le nombre de cellules sera alors plus réduit. Dans ces conditions, la complexité opératoire totale, reportée dans le Tableau 1, est identique dans les cas défectifs et non défectifs et intègre les deux produits par  $g_0$  et  $g_1$ .



Structure →		Transv.	Treillis [1,2]	Treillis canonique
Système ↓	Coût ↓			
A(2p+2, 2p+2)	MPU	2p+2	(p+2)/2	—
	APU	2p	(3p+2)/2	—
B(2p+1, 2p+3)	MPU	p+3/2	(p+2)/2	(p+3)/2
	APU	2p+3	5p/2	p+1
B(2p+1, 2p+4r+3)	MPU	p+r+3/2	—	(p+r+3)/2
	APU	2(p+r)+3	—	p+r+1

**Tableau 1.** Complexité en nombre de multiplications (MPU) et additions (APU) des structures treillis et transverses.

Ce tableau donne l'avantage aux structures treillis. Le gain de l'ordre de 2 (cas impair) ou de 4 (cas pair), pourrait être un peu réduit par l'utilisation de techniques de filtrage rapide [7] pour implanter la structure transversale. Il est à noter que ces techniques peuvent aussi s'appliquer dans le cas de cellules de systèmes défectifs pour implanter les filtres  $Q_i(z)$  tels que  $k_i > 0$ . Dans la comparaison avec les structures treillis, il faut signaler que le léger avantage en MPU de la structure décrite en [1-2] provient du fait que les auteurs attribuent une valeur arbitraire de 64 (ce qui se traduit par un simple décalage) à la moitié des coefficients. Leur structure est complète mais ne peut être considérée comme canonique. Les avantages de la nouvelle structure se situent donc dans la réduction, d'un facteur 2,5 du nombre d'APU et dans sa possibilité de généralisation à l'ensemble des solutions de type B.

#### 4. LIEN AVEC LES TREILLIS DE TYPE A [1-2]

Pour tout filtre  $H_0$  unitaire, symétrique, de longueur paire, il existe un unique filtre, noté  $\mathcal{L}(H_0)$  antisymétrique, unitaire, de longueur paire inférieure ou égale à celle de  $H_0$  et formant avec  $H_0$  une paire à reconstruction parfaite (système de type A).

Si  $\delta(H_0) = \delta(\mathcal{L}(H_0)) = p$  et si la matrice  $\mathbf{H}_p(z)$  des composantes polyphases de la paire  $[H_0, \mathcal{L}(H_0)]$  admet une décomposition de la forme

$$\mathbf{H}_p(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^p \begin{pmatrix} 1 & \beta_i \\ \beta_i z^{-1} & z^{-1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

où  $\beta_i \neq \pm 1$ ,  $i = 1, \dots, p$ , on dit que  $H_0$  est régulier.

**Théorème 3.**— Soit  $H_0$  un filtre unitaire symétrique de longueur paire.  $H_0$  est de la forme  $(1+z^{-1})H_0^-$  où  $H_0^-$  est unitaire, symétrique, de longueur impaire.  $H_0$  est régulier si et seulement si les filtres  $H_0^-$  et  $(1+z^{-1})^2 H_0^-$  sont des filtres non défectifs.

Ce résultat est démontré dans [5]. Par exemple, le cas exceptionnel présenté dans l'annexe B de l'article [2] est un filtre  $H_0$  non régulier de longueur 8.

#### 5. EXEMPLE

Pour illustrer par un exemple simple le passage de la forme transversale à la nouvelle structure treillis, on peut considérer le cas d'un filtre binomial  $H_0(z) = (1+z^{-1})^6$ . Un calcul simple permet de vérifier que les coefficients du banc associé  $[H_0, \mathcal{L}(H_0)]$  de longueurs (7,5) sont  $\alpha_1 = 4/3$ ,  $\alpha_2 = 32/3$  et  $\alpha_3 = 6$ .

#### 6. CONCLUSION

Nous avons décrit une méthode de calcul qui permet l'obtention d'une nouvelle structure treillis à reconstruction parfaite pour les systèmes à deux sous-bandes. Cette structure permet d'engendrer l'ensemble des paires de filtres à reconstruction parfaite de longueur impaires. En ce qui concerne la quantification des coefficients du treillis, on sait que la reconstruction parfaite est garantie par construction, et nous complétons actuellement ce travail pour évaluer la sensibilité fréquentielle des filtres à cette quantification.

#### 7. BIBLIOGRAPHIE

- [1] T.Q. Nguyen et P.P. Vaidyanathan, "Two-channel perfect-reconstruction FIR QMF structures which yield linear-phase analysis and synthesis filters", *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, vol. 37, pp. 676-690, May 1989.
- [2] M. Vetterli et D. Le Gall, "Perfect-reconstruction FIR filter banks: Some properties and factorizations", *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, vol. 37, pp. 1057-1071, July 1989.
- [3] M. Vetterli et C. Herley, "Wavelets and filter banks: Theory and design", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 40, pp. 2207-2232, Sept. 1992.
- [4] I. Shah et T. Kalker, "On ladder structures and linear phase conditions for bi-orthogonal filter banks", in *Proc. IEEE ICASSP*, vol. III, pp. 181-184, 19-22 April 1994.
- [5] D. Pinchon et P. Siohan, "Analysis and design of two-channel perfect-reconstruction linear-phase filter banks with lattice structures", *en préparation*.
- [6] P.P. Vaidyanathan, *Multirate systems and filter banks*, Prentice Hall, New York, 1993.
- [7] Z.J. Mou et P. Duhamel, "Short-length FIR filters and their use in fast non recursive filtering", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 39, no. 6, pp. 1322-1332, June 1991.