

# Poursuite adaptative de non stationnarités markoviennes de second ordre appliquée à l'identification des canaux de transmission radio-mobiles

M. TURKI<sup>(1)</sup>, O. MACCHI<sup>(2)</sup>, M. JAIDANE-SAIDANE<sup>(1)</sup>, H. BESBES<sup>(1,3)</sup>

<sup>(1)</sup> Laboratoire des Systèmes de Télécommunications, ENIT, BP 37 – 1002 Tunis, TUNISIE.

<sup>(2)</sup> Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS, Supelec, Gif sur Yvette, FRANCE.

<sup>(3)</sup> Ecole Supérieure des Postes et des Télécommunications de Tunis, TUNISIE.

## RÉSUMÉ

Nous étudions la capacité de poursuite du filtre adaptatif du gradient pour des non stationnarités de la réponse impulsionnelle du système inconnu qui évolue selon un modèle markovien d'ordre quelconque. Ceci est appliqué à l'identification adaptative d'un canal ionosphérique radio-mobile qui se caractérise par des non stationnarités markoviennes d'ordre 2. Nous montrons, en particulier, l'importance d'une hypothèse correcte sur l'ordre du modèle markovien. Nous introduisons ici les temps de propagation des filtres markoviens dans la formulation analytique de l'EQMR; ceci nous permet d'analyser aisément le comportement du filtre adaptatif.

## ABSTRACT

In this paper, we study the tracking performances of the adaptive LMS filter when the unknown system impulse response has a Markov evolution. This is done for any markovian order and applied to identification of a ionospheric time-varying channel characterized by second order Markov non stationary. We prove in particular, the importance of a correct hypothesis over the order of the markovian model. We introduce the propagation times of the markovian filters in the RMSE analytical formulation; thus we can easily analyse the behavior of the adaptive filter.

## 1. PRESENTATION DU PROBLEME

L'identification des systèmes dans un contexte non stationnaire est classiquement réalisée par des filtres adaptatifs selon le schéma de la figure (1). La non stationnarité est liée à l'évolution de la réponse impulsionnelle du filtre  $F(k)$  à identifier. On note  $N$  sa longueur. L'équation entrée/sortie est

$$y(k) = s(k) + n(k) \quad (1)$$

où  $s(k) = F(k)^T X(k)$ , est la sortie du filtre. La suite d'entrée,  $X(k) = (x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1))$ , est mesurable et  $n(k)$  est le bruit d'observation centré, indépendant des  $s(k)$ , identiquement distribué (i.i.d.). L'adaptation du filtre estimé  $H(k)$  est contrôlée par l'erreur d'adaptation

$$e(k) = y(k) - H(k)^T X(k)$$

selon

$$H(k+1) = H(k) + G(k)e(k) \quad (2)$$

Le vecteur  $G(k)$  caractérise l'algorithme. Pour les algorithmes dits "à priori", il dépend seulement des  $X(k-j)$ ,  $j \leq 1$ . Ceci inclut des algorithmes très généraux comme le Gradient Stochastique (GS), les Moindres Carrés Récurifs (MCR) avec ou sans oubli et bien d'autres. Les non stationnarités considérées par les études antérieures [1], [2], sont

$$F(k) = \alpha F(k-1) + \Omega(k) \quad (3)$$

où  $0 < \alpha \leq 1$ , et  $\Omega(k)$  est une suite i.i.d. et centrée. Pour  $\alpha = 1$ ,  $F(k)$  est une promenade aléatoire; pour  $\alpha < 1$  c'est un modèle markovien d'ordre 1. Cependant, il faut un modèle markovien d'ordre plus élevé pour approcher correctement la réalité physique, par exemple les variations de

la réponse impulsionnelle  $F(k)$  des canaux de transmission radio-mobiles soumis à effet Doppler, [3]. C'est pourquoi

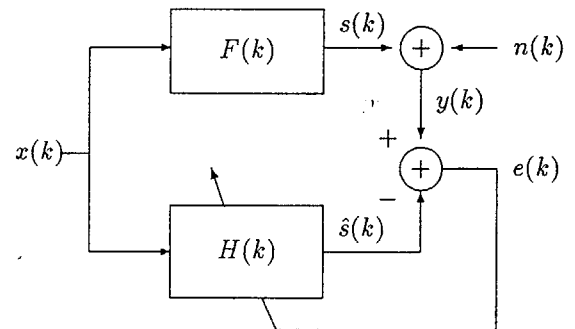


FIG. 1 - Identification adaptative d'un système

la présente étude considère un modèle markovien d'ordre quelconque  $P$  ( $P \geq 1$ ). Ceci permet de représenter en particulier les non stationnarités oscillatoires. D'où le modèle:

$$F(k) = \sum_{i=1}^P A_i F(k-i) + \Omega(k) \quad (4)$$

Sans perte de généralité on suppose que les  $A_i$  sont des matrices diagonales. A partir du formalisme introduit dans [4], cette contribution développe des résultats de convergence exponentielle du transitoire pour des algorithmes de GS, et MCR avec oubli. Contrairement aux hypothèses utilisées dans [5] pour le GS ou dans [2] pour les MCR, ceci est fait sans l'hypothèse irréaliste d'indépendance des  $X(k)$ .



L'hypothèse (réaliste) est celle de la M-indépendance des  $X(k)$ . En régime permanent et pour des entrées  $x(k)$  i.i.d., on établit des résultats analytiques sur la poursuite par le GS, des non stationnarités markoviennes d'ordre élevé aussi bien rapides que lentes. Pour des entrées corrélées, les calculs sont un peu plus complexes et ils sont réalisés pour de faibles valeurs du pas d'adaptation. Ces résultats ont permis d'étudier convenablement le problème de l'identification adaptative d'un canal ionosphérique pour la transmission radio-mobile. Nous avons montré qu'une hypothèse correcte sur l'ordre du modèle markovien est indispensable pour une bonne analyse des performances du GS. Finalement nous avons pu évaluer l'EQMR à l'aide du temps de propagation de ce modèle markovien.

## 2. FORMALISME

On définit le vecteur déviation

$$V(k) = H(k) - \widehat{F}(k/k-1) \quad (5)$$

qui caractérise l'écart entre le filtre adaptatif  $H(k)$  et la meilleure estimation

$$\widehat{F}(k/k-1) = \sum_{i=1}^p A_i F(k-i) \quad (6)$$

que l'on puisse réaliser à l'instant  $k$  en connaissant les informations jusqu'à l'instant  $k-1$  (algorithmes "a priori"). Une représentation globale du système adaptatif, est donnée par le vecteur augmenté

$$W(k) = (V(k)^T, F(k-1)^T, \dots, F(k-p)^T) \quad (7)$$

dont on montre qu'il vérifie la récurrence linéaire non homogène,

$$W(k+1) = B(k)W(k) + Q(k)\Omega(k) + R(k)n(k) \quad (8)$$

à l'aide des trois matrices

$$B(k) = \begin{pmatrix} T(k) & A_1(I - A_1) - A_2 & \dots & A_P(I - A_1) \\ 0 & A_1 & \dots & A_P \\ 0 & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$R(k) = \begin{pmatrix} G(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q(k) = \begin{pmatrix} -A_1 + G(k)X(k)^T \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

où

$$T(k) = I - G(k)X(k)^T \quad (11)$$

L'équation (8), fait apparaître le découplage entre la déviation relative au bruit d'observation  $n(k)$  et celle relative au

bruit de non stationnarité  $\Omega(k)$ . Cette description stationnarise le problème étudié en accordant à  $n(k)$  et  $\Omega(k)$  des rôles similaires.

Le vecteur  $W(k)$  peut se décomposer ainsi en une composante  $W^t(k)$  relative au régime transitoire de l'algorithme, une composante  $W^n(k)$  relative au bruit d'observation, et une composante  $W^\Omega(k)$  liée au bruit de non stationnarité:

$$W(k) = W^t(k) + W^n(k) + W^\Omega(k) \quad (12)$$

qui obéissent aux équations suivantes :

$$W^t(k+1) = B(k)W^t(k) \quad (13)$$

$$W^n(k+1) = B(k)W^n(k) + R(k)n(k) \quad (14)$$

$$W^\Omega(k+1) = B(k)W^\Omega(k) + Q(k)\Omega(k) \quad (15)$$

D'après [6], on peut choisir judicieusement les initialisations  $W^t(0)$ ,  $W^n(0)$  et  $W^\Omega(0)$  pour que  $W^t(k)$  et  $W^n(k)$  soient indépendants des  $F(j)$ , donc identiques au cas stationnaire. De l'équation (12), et des hypothèses d'indépendance sur  $\Omega(k)$  et  $n(k)$ , découlent la décomposition de l'Erreur Quadratique Moyenne Résiduelle Normalisée (EQMR)

$$m(k) = \frac{E[|s(k) - \hat{s}(k)|^2]}{P_n} \quad (16)$$

en trois composantes  $m^t$ ,  $m^n$  et  $m^\Omega$  [4]:

$$m(k) = m^t(k) + m^n(k) + m^\Omega(k) + \delta \quad (17)$$

où  $\delta = \frac{E[|\Omega(k)^T X(k)|^2]}{P_n}$  représente le degré de non stationnarité. Ce formalisme généralise celui présenté dans [4] pour les modèles markoviens d'ordre 1. Nous montrons dans [7] pour le GS et le MCR la décroissance exponentielle du transitoire. La qualité de cette décroissance est identique à celle du cas stationnaire associé caractérisé par  $\Omega(k) = 0$ . Ce résultat est établi sous des hypothèses réalistes de M indépendance des  $X(k)$  et de bornitude de leurs moments.

## 3. CAPACITE DE POURSUITE DU GS

La capacité de poursuite du GS en régime permanent est mesurée par son EQMR qui dépend du pas d'adaptation normalisé  $\nu = \mu N P_x$ . En notant  $m_\nu$  la limite de  $m(k)$  ( $k \rightarrow \infty$ ), on a d'après ce qui précède,

$$m_\nu = m_\nu^n + m_\nu^\Omega + \delta \quad (18)$$

### 3.1. Calcul de $m_\nu$ pour des $x(k)$ i.i.d.

Le calcul théorique qui suit est valable quel que soit le pas d'adaptation et pour toutes les matrices  $A_i = a_i I$ ,  $i = 1 \dots N$ , donc que la non stationnarité soit lente ou rapide.

On l'a déjà dit,  $m_\nu^n$  prend la même valeur que dans le cas stationnaire (voir [6]). Ainsi

$$m_\nu^n = \frac{\nu}{2 - \nu} \quad (19)$$

Le calcul de la composante  $m_\nu^\Omega$  est élaboré par la technique de la transformée en  $z$ . A partir de la fonction de transfert relative au filtre markovien qui génère  $F(k)$ ,

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}} \quad (20)$$

on définit

$$H_1(z) = (1 - z)H(z) + (z + a_1 - 1) \quad (21)$$

On montre ainsi dans [7] que

$$m_\nu = \frac{\delta}{2 - \nu}(\nu - 2a_1) + \frac{\delta N a_1^2}{\nu(2 - \nu)} + \frac{\delta N}{\nu(2 - \nu)}(s_1 + s_2) \quad (22)$$

$$s_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} H_1(z)H_1(z^{-1}) \frac{N + (N - \nu)z}{z[N - (N - \nu)z]} dz \quad (23)$$

$$s_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} H_1(z) \frac{2(\nu - N a_1)(N - \nu)}{N^2 - (N^2 - N\nu)z} dz \quad (24)$$

Ce résultat est établi en supposant que  $|X(k)|^2 = NP_x$ . Le calcul des termes  $s_1$  et  $s_2$  se ramène à un calcul des résidus relatifs aux pôles, (des fonctions à intégrer), à l'intérieur du cercle unité  $\Gamma$ . Les pôles de  $H_1(z)$  sont ceux de  $H(z)$ ; ils sont de modules inférieurs à 1, car le système markovien doit être stable. Quant au pôle  $\frac{N}{N - \nu}$ , il est nécessairement de module supérieur à 1 pour que l'algorithme GS soit stable. Le résultat (22) est celui qui permet de tracer la caractéristique de variations de  $m_\nu$  en fonction de  $\nu$ , et ce, quelle que soit la nature du filtre markovien.

### 3.2. Calcul de $m_\nu$ pour une entrée $x(k)$ corrélée

Dans le cas d'entrées corrélées le calcul est un peu plus complexe. Cependant la récurrence (8) peut être approchée par une équation différentielle stochastique (EDS). Pour  $\nu$  petit (ce qui correspond à des variations lentes du filtre). Nous avons montré [8] que

$$m_\nu = \frac{1}{2} \left[ \nu + \frac{N\delta}{\nu} \left[ 1 + \frac{2tr(DK_1)}{N} \right] \right] \quad (25)$$

où  $D = (I - A_1, -A_2, \dots, -A_P)$  est une matrice  $(N, N \times P)$ ,  $K_1$  est une matrice  $(P \times N, N)$  solution de l'équation suivante :

$$(C - I)K_0 - \frac{\nu}{NP_x} K_1 R_x = -K_0 D^T + R_1 \quad (26)$$

où,  $R_x$  est la fonction d'autocorrélation de l'entrée  $x(k)$ ,

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ I_N & 0_N & \dots & 0_N \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_N & I_N & 0_N & \end{pmatrix} \text{ est la matrice compagnon du}$$

filtre markovien,

$$R_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_1 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et  $K_0$  est une matrice  $(P \times N, P \times N)$  solution de l'équation

$$CK_0 + K_0 C^T - 2K_0 = -R_0 \quad (27)$$

C'est à partir de la résolution de (26) et (27) que l'on peut tracer la caractéristique de variations de  $m_\nu$  en fonction de  $\nu$ .

## 4. APPLICATION AUX TRANSMISSIONS RADIO-MOBILES

### 4.1. Caractéristiques du canal

Dans le cadre de l'application de ces résultats, nous considérons un canal ionosphérique de transmission radio-mobiles. La réponse impulsionnelle  $F(k)$  du canal dépend du temps comme les retards relatifs aux trajets constituant le canal. Le nombre de trajets constituant le canal dit "à trajets multiples" dépend du milieu séparant l'émetteur du récepteur. La mobilité du récepteur, par exemple une voiture, par rapport à une station d'émission considérée fixe, est à l'origine de l'évolution temporelle de la réponse impulsionnelle du canal et de l'effet Doppler qui affecte la fréquence porteuse. Pour modéliser cette évolution temporelle, on se contente dans la littérature d'un modèle markovien d'ordre 1 de pôle  $z = \alpha_1$ ,

$$F(k) = \alpha_1 F(k - 1) + \Omega(k) \quad (28)$$

car la théorie de poursuite de non stationnarités se limite à cet ordre. Cependant on précise dans [3] que le canal est mieux modélisé par un markovien d'ordre 2 de pôle double  $z = \alpha_2$ ,

$$F(k) = 2\alpha_2 F(k - 1) - \alpha_2^2 F(k - 2) + \Omega(k) \quad (29)$$

Les pôles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont calculés de manière à ce que la bande passante à 3 dB corresponde au Doppler maximum  $f_d$  produit par le mouvement du récepteur. Les comportements fréquentiels des filtres markoviens d'ordre 1 et 2 sont respectivement caractérisés par les temps de propagation  $\tau_1(\omega)$  et  $\tau_2(\omega)$ . Dans le cas où les pôles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont réels, les temps de propagations sont donnés par

$$\tau_1(\omega) = \frac{\alpha_1(\cos(\omega) - \alpha_1)}{1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1 \cos(\omega)} \quad (30)$$

$$\tau_2(\omega) = \frac{2\alpha_2(\cos(\omega) - \alpha_2)}{1 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2 \cos(\omega)} \quad (31)$$

où  $\omega = 2\pi f/f_e$  est la pulsation.  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage du signal transmis à travers le canal. Remarquons ici que quelles que soient les valeurs de  $f_d$  et  $\omega$ ,  $\tau_1(\omega)$  est supérieur à  $\tau_2(\omega)$ . A partir de (30) et (31) il est possible de donner une formule analytique élégante de l'EQMR. Nous verrons dans ce qui suit comment ces temps de propagation liés à la non stationnarité du canal se comparent à la constante de temps de l'adaptation,  $\tau_a(\nu) = \frac{N}{\nu}$  [5], pour caractériser la capacité de poursuite du GS.

### 4.2. Poursuite du canal

L'application de l'équation (22) aux canaux (28) ( $P = 1$ ), et (29) ( $P = 2$ ) et l'introduction des temps de propagations



(30) et (31), conduit pour un markovien d'ordre 1 à,

$$m_\nu^1 = \frac{1}{(2-\nu)} \left[ \nu + 2 \frac{P_s}{P_n} \frac{1}{1 + \frac{\tau_1(0)}{\tau_a(\nu)}} \right] \quad (32)$$

et pour un markovien d'ordre 2 à,

$$m_\nu^2 = \frac{1}{(2-\nu)} \left[ \nu + 2 \frac{P_s}{P_n} \frac{1 + \frac{\tau_2(\pi/2)}{2\tau_a(\nu)}}{\left(1 + \frac{\tau_2(0)}{\tau_a(\nu)}\right)^2} \right] \quad (33)$$

L'analyse des résultats (32, et 33) permet de tirer des conclusions intéressantes sur la capacité du GS en poursuite.

1. quand  $\nu$  tend vers 0,  $m_\nu^i|_{(i=1,2)}$  tend vers le rapport signal sur bruit du système à identifier;  $m_0^i = \frac{P_s}{P_n}$ . Ceci surclasse la promenade aléatoire où  $m_0$  est infini, ce qui n'a pas beaucoup de sens physique.
2. la capacité de poursuite de l'algorithme est d'autant meilleure que la constante de temps de l'algorithme est faible devant les temps de propagation du filtre à identifier. Ce résultat se déduit aisément des temps de propagation (32) et (33), ( $\tau_i(0) \geq 0$  et  $\tau_i(\pi/2) \leq 0$ ).
3. les conditions pour lesquelles la poursuite devient néfaste ( $m_\nu$  croît en fonction de  $\nu$ ) sont  $\tau_1(0) < \frac{N P_n}{2 P_s}$  pour l'ordre 1 et  $\tau_2(0) - \frac{\tau_2(\pi/2)}{2} < \frac{N P_n}{2 P_s}$ . Etant donné que  $\tau_2(\pi/2)$  est négatif, ces conditions sont moins fréquentes pour l'hypothèse markovien d'ordre 2.
4. la comparaison des capacités de poursuite du GS sous l'hypothèse markovien d'ordre 1 ou 2, doit se faire dans le même contexte: même Doppler  $f_d$  et même rapport  $P_s/P_n$ . On montre d'après (32) et (33) que quelque soit  $\nu$ ,  $m_\nu^1$  est supérieure à  $m_\nu^2$ . Ceci signifie que l'on sous estime les performances du GS si on opte pour l'hypothèse markovien d'ordre 1.

#### 4.3. Illustration des résultats théoriques

Le canal considéré est caractérisé ici par une fréquence Doppler normalisée, de  $1.25 \times 10^{-3}$ . Ce cas correspond à une porteuse de 900 MHz, une vitesse du récepteur de 10 m/s et un débit de 24 kbd pour une système TDMA.

On considère un filtrage transverse de longueur  $N = 3$  et un ordre  $P = 2$ .

La figure 2 est relative à des  $x(k)$  i.i.d. La courbe 1 est le résultat de la simulation numérique, la courbe 2 est une approximation théorique obtenue par la méthode de l'EDS, la courbe 3 est le calcul analytique exact utilisant la transformée en  $z$ . Toutes les courbes se confondent pour les faibles valeurs du pas ( $\nu \leq 0.05$ ). Le calcul analytique est en parfait accord avec la simulation pour toutes les valeurs de  $\nu$ . Si on avait supposé le canal markovien d'ordre  $P = 1$ , où le coefficient respectif  $\alpha_1$  est calculé pour la même fréquence Doppler, l'EQMR varierait selon la courbe 4. On

voit qu'une bonne hypothèse sur la non stationnarité (choix de  $P = 2$ ) est indispensable pour un bon choix des paramètres de l'algorithme d'adaptation.

La figure 3 est relative à un markovien d'ordre 2 et une entrée corrélée somme d'une sinusoïde et d'un bruit i.i.d. On agit sur la corrélation en faisant varier la puissance du bruit. Les courbes 1 (simulations) et 2 (EDS) sont relatives à la fonction d'autocorrélation  $\Gamma_x(0) = 1$ ,  $\Gamma_x(1) = 0.06$ ,  $\Gamma_x(2) = -0.014$ , alors que les courbes 3 (simulations) et 4 (EDS) correspondent à  $\Gamma_x(0) = 1$ ,  $\Gamma_x(1) = 0.65$ ,  $\Gamma_x(2) = -0.15$ . Ces courbes montrent qu'il y a toujours accord entre les simulations et la méthode EDS pour les faibles valeurs du pas d'adaptation  $\nu$ . Pour de telles valeurs de  $\nu$ , nous remarquons que l'influence de la corrélation de l'entrée sur l'EQMR est faible.

#### 5. RÉFÉRENCES

- [1] A. Benveniste. Design of adaptive algorithms for the tracking of time-varying systems. *Int. J. of Adaptive control and Signal Processing*, 1:3-29, 1987.
- [2] Evangelos Eleftheriou and David D. Falconer. Tracking properties and steady-state performance of rls adaptive filter algorithms. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Processing*, ASSP-34(5), October 1986.
- [3] Robert A. Ziegler and John M. Cioffi. Estimation of time-varying digital radio channels. *IEEE trans. on vehicular technology*, 41(2):134-151, May 1992.
- [4] M. Turki, O. Macchi, and M. Jaidane-Saidane. Non stationnarités markoviennes rapides et filtrages adaptatif. *Quatorzième Colloque GRETSI - JUAN les PINS*, September 1993.
- [5] B. Widrow and al. Stationary and nonstationary learning characteristics of the lms adaptive filter. *Proc. of IEEE*, 64(8):1151-1162, August 1976.
- [6] O. Macchi. The theory of adaptive filtering in a random time-varying environment. *A. Figueiras-Vidal*, 1995.
- [7] M. Turki. Poursuite adaptative de non stationnarités markoviennes. *Rapport préliminaire de thèse*, February 1995.
- [8] H. Besbes and M. Jaidane. Poursuite adaptative de non stationnarités markoviennes dans le cas des entrées corrélées. *Rapport interne du Laboratoire L.S.Télécoms*, March 1995.

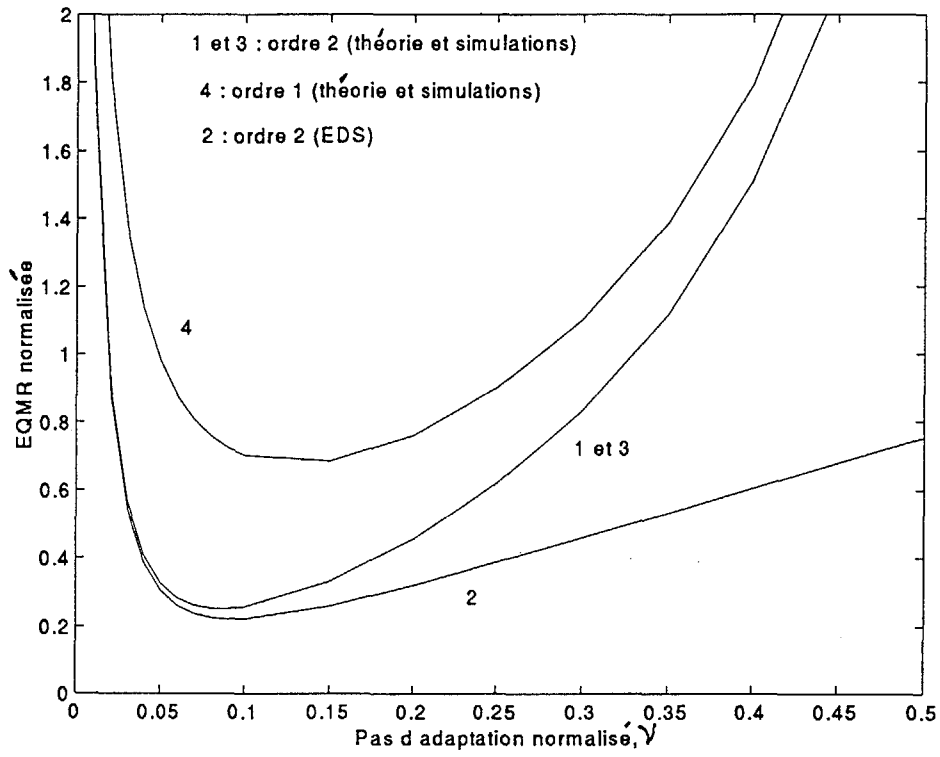


FIG. 2 - EQMR normalisée (entrée i.i.d)

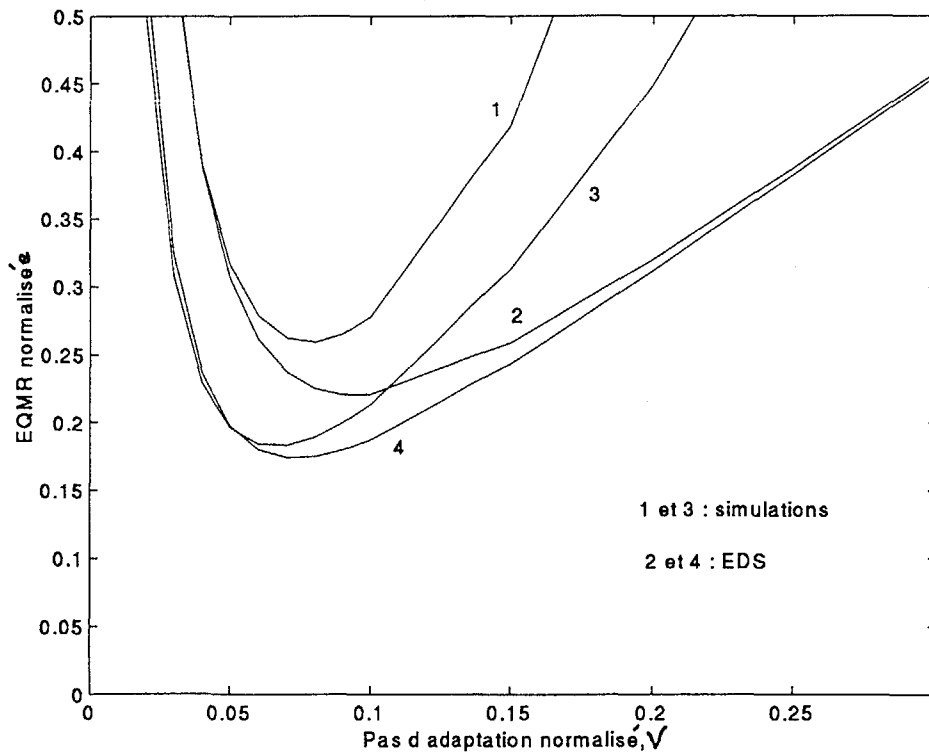


FIG. 3 - EQMR normalisée (entrée corrélée)