Sur les Points Stationnaires de la Méthode de Steiglitz et McBride dans le cas Sous Modélisé

Mehdi ASHARI[1], Mamadou MBOUP[2,1], Phillip A. REGALIA[3,1]

[1] *Laboratoire des Signaux et Systèmes CNRS-ESE, Plateau de Moulon 91192 Gif-sur-Yvette cedex*
[2] *Université René Descartes, UFR Mathématiques et Informatique 45, rue des Saints Pères 75270 Paris cedex 06.*
[3] *Institut National des Télécommunications Département Signal et Image 9, rue Charles Fourier 91011 Evry cedex.*

RÉSUMÉ

Dans cet article on étudie la question d'existence de points stationnaires de l'algorithme de Steiglitz et McBride en sous modélisation. Une application judicieuse du théorème de point fixe de Brouwer [9] nous permet de montrer que si l'entrée est un bruit blanc et sous certaines conditions de stabilité du système inconnu, alors l'algorithme de Steiglitz et McBride admet au moins un point stationnaire correspondant à un modèle stable.

ABSTRACT

Here we address the existence of stationary points for the Steiglitz-McBride algorithm. If we allow ourselves the tractable case in which the input sequence to an identification experiment is white noise, we shall show that the Steiglitz-McBride algorithm generically admits a stationary point for which the resulting model is stable, subject to a certain stability constraint on the unknown system.

Introduction

La plupart des résultats de convergence en identification concerne le cas de modélisation exacte, où la fonction de transfert du système inconnu est supposée de forme rationnelle et de degré connu.

Cependant, en pratique, les systèmes physiques ont des degrés très élevés, voire infinis, voir par exemple [7] pour des études sur l'estimation du degré de la fonction de transfert d'une salle de téléconférence. Dans ce cas, l'identification parfaite par un modèle de degré fini et inférieur au degré du système inconnu est impossible. Dans cette situation, c'est-à-dire, le cas de sous modélisation, la question principale qui se pose est la suivante : La méthode d'adaptation candidate convergera-t-elle vers une "bonne" approximation du système inconnu ? Pour les algorithmes qui ne sont pas des procédures de gradient appliquées à une certaine fonction de coût, l'étude de convergence n'a aucune analogie avec les méthodes communes de recherche d'un point minimum.

En particulier, pour les filtres adaptatifs RII (à réponse impulsionnelle infinie), l'analyse de convergence est assez compliquée à cause de la dépendance non-linéaire des coefficients du filtre aux signaux filtrés. Ainsi, pour établir l'existence de points stationnaires pour de tels filtres, on est amené, en général, à résoudre des équations non linéaires; ceci explique la rareté de résultat pour le cas d'ordre réduit.

Il a été montré dans [4] que s'il existe un point stationnaire pour la méthode de Steiglitz et McBride, alors une borne *a priori* simple s'applique sur l'erreur. La difficulté est, bien evidemment, de montrer *analytiquement* l'existence de points stationnaires pour cette méthode.

Dans cet article on étudie cette question en sous modélisation. Une application judicieuse du théorème de point fixe nous permet de montrer que si l'entrée est un bruit blanc et sous certaines conditions de stabilité du système inconnu, l'algorithme de Steiglitz et McBride admet au moins un point stationnaire pour lequel le modèle résultant est stable.

La méthode de Steiglitz et McBride

Soit $H(z)$ une fonction de transfert stable et causale, décrite par la suite $\{h_i\}$ de sa réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i\, z^i; \quad |z| < 1.$$

Pour identifier $H(z)$ la méthode de Steiglitz et McBride [1] minimise, à chaque itération, l'erreur d'équation pondérée suivante :

$$\min_{A_{k+1}\,,\, B_{k+1} \in \mathcal{P}_M} \left\| H(e^{j\omega}) \frac{A_{k+1}(e^{j\omega})}{A_k(e^{j\omega})} - \frac{B_{k+1}(e^{j\omega})}{A_k(e^{j\omega})} \right\|,$$

avec $A_{k+1}(z)$ monique et $\|F(\omega)\|^2 \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} |F(\omega)|^2 d\omega$, pour tout $F(\omega) \in L_2$. $\mathcal{P}_M$ est l'ensemble des polynômes de degré M et $A_k(z) \triangleq [1 \;\; z \;\; \ldots \;\; z^M]\boldsymbol{a}_k$ est la solution à l'itération k. Le filtre ajusté, à l'itération $k+1$, est donné par $\widehat{H}(z) \triangleq B_{k+1}(z)/A_{k+1}(z)$.

On montre [5] que le vecteur de coefficients de $B_{k+1}(z)$ qui minimise l'erreur précédente s'obtient par une transformation linéaire du vecteur $\boldsymbol{a}_{k+1}$ et que ce dernier vérifie

Ce travail est financé par la Convention CNET/GRETSI 936B005

l'équation suivante :

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_k)\boldsymbol{a}_{k+1} = \sigma_{k+1}^2 \boldsymbol{\psi}, \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{\psi} = [1 \quad \underbrace{0 \; 0 \; \ldots \; 0}_{M}]^t$ et σ_{k+1}^2 est une valeur positive. On montre [5] que la matrice $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_k)$ est le grammien [1] de la matrice $\Gamma_H \mathcal{C}_k$ où $\mathcal{C}_k = [\boldsymbol{c}_k \quad \mathcal{Z}\boldsymbol{c}_k \quad \ldots \quad \mathcal{Z}^M \boldsymbol{c}_k]$ et $\boldsymbol{c}_k$ est défini par $\frac{1}{A_k(z)} = [1 \quad z \quad z^2 \quad \ldots]\boldsymbol{c}_k$. $\mathcal{Z}$ est l'opérateur de décalage à droite, i.e., $\mathcal{Z}\boldsymbol{c} = [0 \quad \boldsymbol{c}^t]^t$. La matrice Γ_H est la matrice de Hankel doublement infinie associée à $H(z)$:

$$\Gamma_H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \ldots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \ldots \\ h_2 & h_3 & h_5 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \end{bmatrix}.$$

Si $\widehat{H}(z)$ est un point stationnaire de la méthode de Steiglitz et McBride alors le vecteur des coefficients de son dénominateur, $\boldsymbol{a}^*$, coïncide avec un point fixe de l'équation (1) et inversement. Ainsi, l'existence de points stationnaires de Steiglitz et McBride revient à l'existence de points fixes de l'équation (1).

Point fixe

Dans cette partie on s'intéresse à des conditions garantissant l'existence d'un point stationnaire pour l'algorithme de Steiglitz et McBride. On montre, en particulier, que sous certaines conditions de régularité de la fonction $H(z)$, l'équation (1) admet au moins un point fixe. Ce résultat est établi par une application judicieuse du théorème de point fixe de Brouwer [9] ci-dessous :

Théorème 1 (Brouwer) *Soit $\mathcal{D}$ un domaine fermé, borné et convexe et soit $f(.)$ une fonction continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Alors $f(.)$ admet au moins un point fixe dans $\mathcal{D}$.*

Tout polynôme à phase minimal d'ordre M, peut être caractérisé par ses coefficients de reflexion, $\{\tau_j\}_{j=1}^M$ avec $|\tau_j| \leq 1$. On définie le domaine fermé $\mathcal{D}$ comme :

$$\mathcal{D} \triangleq \{\boldsymbol{\tau} : |\tau_j| \leq 1\},$$

avec $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \ldots \quad \tau_M]^t$. Pour que $\widehat{H}(z)$ soit stable il faut que $A_k(z)$ soit à phase minimal, c'est-à-dire, le vecteur $\boldsymbol{\tau}$ caractérisant $A_k(z)$ doit appartenir à $\mathcal{D} \ominus \partial\mathcal{D}$, où $\partial\mathcal{D}$ est la frontière de l'hypercube $\mathcal{D}$.

Si $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \ldots \quad \kappa_M]^t$ représentent les coefficients de reflexion de $A_{k+1}(z)$, à chaque $\boldsymbol{\tau}$ la relation (1) fait correspondre un $\boldsymbol{\kappa}$. On appelle $f(.)$ la fonction qui transforme $\boldsymbol{\tau}$ en $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\boldsymbol{\kappa} = f(\boldsymbol{\tau}).$$

Si les conditions du théorème de point fixe sont satisfaites alors il existe un $\boldsymbol{\tau}_*$ tel que :

$$\boldsymbol{\kappa}_* = f(\boldsymbol{\tau}_*) = \boldsymbol{\tau}_*.$$

Ceci signifie que $A_{k+1}(z) = A_k(z)$. Voici notre résultat principal :

Théorème 2 *Si les $M+1$ fonctions $H(z)$, $dH(z)/dz, \ldots, d^M H(z)/dz^M$ sont BIBO stables [2], alors la méthode de Steiglitz et McBride admet au moins un point stationnaire.*

Remarques :

- Si $d^M H(z)/dz^M$ est BIBO stable, alors toutes les dérivées d'ordre inférieur à M le seront aussi, à condition que les termes $h_0, h_1, \ldots, h_{M-1}$ restent bornés.
- Si $H(z)$ est rationnelle et BIBO stable, alors $d^i H(z)/dz^i$ reste rationnelle et BIBO stable, pour tout i. La condition est donc automatiquement satisfaite pour des fonctions rationnelles.
- La fonction

  $$H(z) = \exp(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} z^i, \qquad \text{pour tout } z,$$

  est irrationnelle, mais elle vérifie les conditions de l'énoncé. Notre théorème n'exclut donc pas forcément des fonctions de degré infini.

On peut montrer que pour tout $A_k(z)$ à phase minimale, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_k)$ est une matrice définie positive (voir appendice), de structure proche de Toeplitz, *i.e.* qu'elle vérifie les conditions pour lesquelles Mullis et Roberts [6] ont montré que $A_{k+1}(z)$ obtenu par la relation (1) est aussi à phase minimale. De plus $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_k)$ est continue et bornée pour tout $A_k(z)$ à phase minimale.

Dans la suite, $A_k(z)$ sera paramétré par ses coefficients de reflexion $\boldsymbol{\tau}_k = [\tau_{k_1} \quad \ldots \quad \tau_{k_M}]^t$. Dans cette paramétrisation, la matrice $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\tau}_k)$ reste continue et bornée sur $\mathcal{D} \ominus \partial\mathcal{D}$ avec les mêmes propriétés que celles énoncées ci-dessus, puisque ces coefficients de reflexion varient de façon continue avec les $\{a_{k_i}\}$. Par conséquent, $f(.)$ est une fonction continue de $\mathcal{D} \ominus \partial\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D} \ominus \partial\mathcal{D}$. Nous montrons (voir lemme 1) que si les $M+1$ fonctions définies dans le théorème 2 sont BIBO stables, alors $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\tau}_k)$ reste bornée sur la frontière de notre hypercube. Donc, on pourra prolonger par continuité $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\tau}_k)$ sur le bord de l'hypercube. La continuité de $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\tau}_k)$ sur le domaine fermé $\mathcal{D}$ entraine celle de $f(\cdot)$ sur $\mathcal{D}$ et le théorème de point fixe nous donne le résultat désiré.

La continuité du grammien

Dans cette section, on montre que si les conditions du théorème 2 sont satisfaites, alors la fonction matricielle $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\tau}_k)$ reste bornée sur la frontière $\partial\mathcal{D}$, ce qui permet d'établir la continuité du grammien, donc de la fonction $f(\cdot)$, dans le domaine fermé $\mathcal{D}$. Dans tout ce qui va suivre, l'argument de $\boldsymbol{R}(\cdot)$ et les indices k seront omis pour alléger les notations. Pour montrer que $\boldsymbol{R}$ est bornée, il suffit de montrer que l'élément $(1,1)$, à savoir

$$\boldsymbol{R}_{1,1} = \underbrace{\boldsymbol{c}^t \, \Gamma_H}_{\boldsymbol{w}^t} \underbrace{\Gamma_H \, \boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{w}},$$

1. $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_k) = (\Gamma_H \mathcal{C}_k)^t (\Gamma_H \mathcal{C}_k)$

2. stabilité au sens d'entrée bornée sortie bornée

reste borné. En effet, puisque $||\mathcal{Z}|| = 1$ et qu'une matrice de Hankel vérifie $\Gamma_H \, \mathcal{Z} = \mathcal{Z}^t \, \Gamma_H$, on a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{R}_{i,j}| &= |\boldsymbol{c}^t \, (\mathcal{Z}^t)^{i-1} \, \Gamma_H \, \Gamma_H \, \mathcal{Z}^{j-1} \, \boldsymbol{c}| \\ &\leq ||(\mathcal{Z}^t)^{i-1} \, \Gamma_H \boldsymbol{c}|| \cdot ||(\mathcal{Z}^t)^{j-1} \, \Gamma_H \boldsymbol{c}|| \\ &\leq ||\Gamma_H \boldsymbol{c}||^2 = ||\boldsymbol{w}||^2 = \boldsymbol{R}_{1,1}, \qquad \text{pour tout } i, j. \end{aligned}$$

Nous examinons maintenant plus attentivement le bord $\partial\mathcal{D}$. Tant que les pôles de $1/A(z)$ sur le cercle unité restent simples, nous aurons

$$|c_i| \leq \beta, \qquad \text{pour tout } i,$$

avec $\boldsymbol{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots]$ et $\beta \leq N < \infty$. Mais si $1/A(z)$ a un pôle double sur le cercle unité (situation génériquement atteignable sur le bord $\partial\mathcal{D}$), la suite $\{c_i\}$ est croissante, mais peut être facilement majorée :

$$|c_i| \leq \beta \cdot (i+1), \qquad \text{pour tout } i,$$

pour une certaine valeur de $\beta < \infty$. Le pire des cas est d'avoir un pôle de multiplicité M sur le cercle unité, correspondant à :

$$A(z) = (1+z)^M \qquad \text{ou} \qquad A(z) = (1-z)^M.$$

Dans cette situation,

$$|c_i| \leq \beta \cdot (i+1)^{M-1} \qquad \text{pour tout } i.$$

Nous devons montrer donc que le vecteur $\boldsymbol{w}$ introduit ci-dessus vérifie toujours $||\boldsymbol{w}||_2^2 < \infty$, ce qui sera assuré dès lors que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |w_i| < \infty.$$

Lemme 1 *Si les $M+1$ fonctions $H(z)$, $dH(z)/dz$, ..., $d^M H(z)/dz^M$ sont BIBO stables, alors la limite de $\boldsymbol{R}$ sur la frontière de l'hypercube $\mathcal{D}$ est bornée.*

Pour vérifier ce résultat, commençons par le cas où des pôles de $1/A(z)$ sur le cercle unité sont tous simples. Ceci donne

$$|c_i| \leq \beta, \qquad \text{pour tout } i.$$

Nous voyons directement que

$$\begin{aligned} w_1 &= h_1 \, c_0 + h_2 \, c_1 + h_3 \, c_2 + \cdots \\ w_2 &= h_2 \, c_0 + h_3 \, c_1 + h_4 \, c_2 + \cdots \\ w_3 &= h_3 \, c_0 + h_4 \, c_1 + h_5 \, c_2 + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} |w_1| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} h_i \, c_{i-1} \right| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |h_i| \cdot |c_{i-1}| \\ &\leq \sup_i |c_i| \sum_{i=1}^{\infty} |h_i| = \beta \sum_{i=1}^{\infty} |h_i|. \end{aligned}$$

Traitant les autres termes $\{w_i\}$ de la même manière, nous obtenons

$$\begin{aligned} |w_1| &\leq \beta \, (|h_1| + |h_2| + |h_3| + \cdots) \\ |w_2| &\leq \beta \, (\qquad |h_2| + |h_3| + \cdots) \\ |w_3| &\leq \beta \, (\qquad\qquad |h_3| + \cdots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |w_i| \leq \beta \sum_{i=1}^{\infty} i \, |h_i|.$$

Le membre de droite de cette equation est borné si $dH(z)/dz$ est BIBO stable.

Considérons maintenant le cas où un pôle double (ou éventuellement plusieurs pôles doubles) se situe(nt) sur le cercle unité. D'après,

$$|c_i| \leq \beta \cdot (i+1),$$

il vient

$$\begin{aligned} |w_1| &\leq \beta \, (|h_1| + 2 \, |h_2| + 3 \, |h_3| + 4 \, |h_4| + \cdots) \\ |w_2| &\leq \beta \, (\qquad |h_2| + 2 \, |h_3| + 3 \, |h_4| + \cdots) \\ |w_3| &\leq \beta \, (\qquad\qquad |h_3| + 2 \, |h_4| + \cdots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

La somme absolue des $\{w_i\}$ est donc majorée par

$$\sum_{i=1}^{\infty} |w_i| \leq \beta \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} j \right) |h_i|,$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{\infty} |w_i| \leq \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{\infty} i \, (i+1) \, |h_i|.$$

Ceci reste fini pourvu que $d^2 H(z)/dz^2$ soit BIBO stable.

On peut, bien entendu, itérer cet argument pour des pôles de multiplicité 3, 4, ..., M, ce qui donne l'énoncé ci-dessus.

Conclusion

Nous avons montré que l'algorithme de Steiglitz et McBride admet au moins un point stationnaire dans le cas sous modélisé, lorsque l'entrée est un bruit blanc et que la fonction de transfert du système à identifier satisfait certaines conditions de régularité. L'intérêt à affirmer cette existence de point stationnaire prend toute son importance d'un résultat précédent [4] montrant qu'une borne *a priori* simple s'applique à tout point stationnaire de cet algorithme. Notre analyse ne permet pas, malheureusement, de conclure que l'ensemble des points stationnaires admet toujours un point d'attracteur pour la version *temps réel* [2] ou *temps différé* [3] de cet algorithme.

L'extension de notre résultat au cas d'entrées corrélées n'est pas triviale. Pour ce cas, on pourra arriver à une équation de type (1), mais la matrice $\boldsymbol{R}(\cdot)$ ne sera plus de structure proche de Toeplitz. Alors le vecteur de coefficient $\boldsymbol{a}_{k+1}$ ne correspondra plus nécessairement à un polynôme à phase minimale. Par conséquent, le théorème de point fixe ne s'appliquera plus, ce qui ne démentira pas pour autant l'existence de point stationnaire pour ce cas.

Appendice

La matrice $\boldsymbol{R}$ peut se mettre sous la forme $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S}^t \boldsymbol{S}$, avec

$$\boldsymbol{S} \triangleq \Gamma_H \left[\boldsymbol{c} \;\; \mathcal{Z}\boldsymbol{c} \;\; \cdots \;\; \mathcal{Z}^M \boldsymbol{c}\right]. \tag{2}$$

D'après le théorème de Kronecker (e.g., [8]), $\mathrm{rang}(\Gamma_H) = \deg H(z)$, avec $\deg H(z) > M$ si l'on se place dans le cas sous modélisé. On va montré que $\boldsymbol{S}$ est de rang plein, égal à $M+1$, et par conséquent, que $\boldsymbol{R}$ est définie positive.

Notons par $\boldsymbol{s}$ la première colonne de $\boldsymbol{S}$, i.e.,

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Comme Γ_H est une matrice de Hankel doublement infini, elle vérifie ,par définition,

$$\Gamma_H \, \mathcal{Z} = \mathcal{Z}^t \, \Gamma_H .$$

De même, S étant le produit d'une matrice de Hankel avec une matrice de Toeplitz, elle est une matrice de Hankel :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \Gamma_H \left[\boldsymbol{c} \;\; \mathcal{Z}\boldsymbol{c} \;\; \cdots \;\; \mathcal{Z}^M \boldsymbol{c}\right] \\ &= \left[\boldsymbol{s} \;\; \mathcal{Z}^t \boldsymbol{s} \;\; \cdots \;\; (\mathcal{Z}^t)^M \boldsymbol{s}\right] \\ &= \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{M+1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{M+2} \\ s_3 & s_4 & \cdots & s_{M+3} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \end{bmatrix} \qquad [\infty \times (M+1)] \end{aligned} \tag{3}$$

Définissons la matrice $C(\mathcal{Z})$ comme :

$$C(\mathcal{Z}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \mathcal{Z}^k = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & c_0 & 0 & \ddots \\ c_2 & c_1 & c_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

La forme $C(\mathcal{Z})$ donne une matrice de convolution. Si, de la même manière, on définie la matrice de convolution $A(\mathcal{Z}) = \sum_{k=0}^{M} a_k \, \mathcal{Z}^k$ (avec $a_0 = 1$), on aura, d'après la relation $C(z)\,A(z) = 1$,

$$C(\mathcal{Z})\,A(\mathcal{Z}) = \boldsymbol{I}_\infty .$$

Donc $C(\mathcal{Z})$ est inversible à droite si $A(z)$ est à phase minimale.

Notons par Γ_S, la matrice de Hankel doublement infini définie par :

$$\Gamma_S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots \\ s_3 & s_4 & s_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \end{bmatrix} = \Gamma_H \, C(\mathcal{Z}),$$

Les $M+1$ premières colonnes de cette matrice coïncident avec les colonnes de $\boldsymbol{S}$. Comme $C(\mathcal{Z})$ est inversible on a

$$rang(\Gamma_S) = rang(\Gamma_H) \quad (= \deg H(z))$$

ce qui est plus grand que M, car par hypothèse $\deg H(z) > M$. Comme Γ_S est une matrice de Hankel, ses $M+1$ colonnes doivent être indépendantes, donc $\mathrm{rang}(S) = M+1$.

Références

[1] K. Steiglitz and L. E. McBride, "A technique for the identification of linear systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-10, pp. 461–464, Oct. 1965.

[2] H. Fan and W. K. Jenkins, "A new adaptive IIR filter," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 33, pp. 939–947, 1986.

[3] P. Stoica and T. Söderström, "The Steiglitz-McBride identification algorithm revisted—Convergence analysis and accuracy aspects," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 26, pp. 712–717, June 1981.

[4] P. A. Regalia and M. Mboup, "Undermodelled adaptive filtering: An a priori error bound for the Steiglitz-McBride method," *IEEE Trans. Circuits and Systems II* (to appear).

[5] P. A. Regalia, *Adaptive IIR Filtering in Signal Processing and Control*, Marcel Dekker, New York, 1995.

[6] C. T. Mullis and R. A. Roberts, "The use of second-order information in the approximation of discrete-time linear systems," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 24, pp. 226–238, June 1976.

[7] M. Mboup and M. Bonnet, "On the adequateness of IIR adaptive filtering for acoustic echo cancellation," *Proc. EUSIPCO-92*, Brussels, Belgium, August 1992, pp. 111-114.

[8] C. K. Chui and G. Chen, *Signal Processing and Systems Theory*, Springer, New York, 1992.

[9] T. L. Saaty and J. Bram, *Nonlinear Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1964. p. 45.