

Un Algorithme de Moindres Carrés Rapide Robuste pour Traitement Adaptatif d'Antenne avec Contraintes

L. S. Resende⁽¹⁾, J. M. T. Romano⁽¹⁾ et M. G. Bellanger⁽²⁾

(1) Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)/DECOM/FEE; BP 6101; 13083-970, Campinas-SP - BRESIL
leonardo@decom.fee.unicamp.br & romano@decom.fee.unicamp.br

(2) Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM)/Electronique et Communication; 292, Rue Saint-Martin; 75141, Paris Cedex 03 - FRANCE
belang@cnam.cnam.fr

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous proposons une approche robuste de l'algorithme de moindres carrés rapide multidimensionnel avec contraintes linéaires pour le traitement spatial. L'approche s'applique aux cas général d'antennes adaptatives avec des signaux à large bande. Des résultats de simulation illustrent les performances de la technique, en comparaison avec l'algorithme classique de Frost, basé sur le LMS.

I - INTRODUCTION

Le filtrage adaptatif transverse avec contraintes s'applique à plusieurs problèmes de traitement d'antenne. L'objectif est de trouver un ensemble de coefficients qui fournisse un signal de sortie ayant un meilleur rapport signal à bruit et à perturbation que ceux qui seraient observés à la sortie d'un seul capteur. Un critère largement utilisé est la minimisation de la puissance en sortie avec les coefficients satisfaisant un ensemble d'équations linéaires. Cette contrainte permet de contrôler quelques caractéristiques de la réponse spatiale et temporelle de l'antenne [1,2]. Parmi les applications de la technique, on peut citer le radar, le sonar et le traitement des signaux biomédicaux et géophysiques.

Dans ce contexte, Frost a proposé un algorithme en 1972 qui est simple, généralement efficace et robuste [3]. Toutefois, comme il utilise la méthode du gradient, il est sujet aux limitations classiques de cette technique: si les signaux d'entrée sont très corrélés, les performances en vitesse de convergence et précision peuvent se détériorer sensiblement. Dans ce cas, une technique de moindres carrés permet d'atteindre de bonnes performances indépendamment de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'autocorrelation du signal d'entrée [4,5].

En 1982, Cantoni a proposé un algorithme de moindres carrés hybride car il actualise les coefficients sans contraintes par la méthode des moindres carrés et utilise la procédure de Frost pour incorporer les contraintes [6].

Un algorithme rapide de moindres carrés pour le filtrage adaptatif transverse avec contraintes a été développé par les auteurs [7]. La première version de l'algorithme étant sensible aux erreurs d'arrondi, une approche pour le rendre robuste a été proposée dans [8]. Cet algorithme fournit une solution exacte et récursive, qui prend toujours en compte les contraintes. Le gain d'adaptation est obtenu à l'aide d'une procédure rapide, ce qui permet une réduction sensible de la complexité. Cependant, l'approche proposée dans [7,8] a des applications limitées au traitement adaptatif temporel, dans la mesure où elle a été dérivée pour le cas du filtrage à une seule dimension.

ABSTRACT

A robust approach to implement the multidimensional FLS algorithm for linearly-constrained adaptive spatial filtering is derived in this work. It can be directly applied in adaptive beamforming for broadband signals. Simulation result illustrates the performance of the proposed approach which is compared with the classical LMS based Frost algorithm.

Le but du présent article est d'étendre l'approche au cas multidimensionnel et, en conséquence, au traitement adaptatif d'antenne. Dans ce sens, nous allons appliquer le critère des moindres carrés à la sortie d'un filtre multicanal sujet à un ensemble de contraintes linéaires. Ce problème est connu comme le filtrage au minimum de variance (LCMV_ "Linearly-Constrained Minimum Variance"). Dans un premier pas, une solution récursive pour les coefficients est dérivée, en faisant usage des techniques rapides pour calculer le gain d'adaptation. En suite, l'algorithme robuste est obtenu par l'utilisation des contraintes à chaque itération dans la solution récursive.

Le présent travail est donc une généralisation des techniques proposées dans [7,8] pour le cas spatial-temporel. De plus, on établit une analogie entre l'algorithme proposé et celui de Frost. Des résultats comparatifs de simulation permettent d'évaluer les performances de la méthode appliquée au traitement adaptatif d'antenne.

II - L'APPROCHE LCMV PAR LE CRITÈRE DES MOINDRES CARRÉS

Le principe d'un filtre multicanal transverse LCMV, communément utilisé pour traiter des signaux à bande large dans les antennes adaptatives, est montré à la figure 1. Un filtre à N coefficients est introduit à la sortie de chacun des M capteurs. Tous les paramètres sont considérés comme réels.

Depuis que n échantillons du vecteur du signal d'entrée

$$\chi(i) = [x_1(i), x_2(i), \dots, x_M(i)]^t$$

deviennent disponibles, le vecteur de coefficients

$$\begin{matrix} \leftarrow & \text{M} & \rightarrow \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

$$\mathbf{h}(n) = [h_{1,1}(n), \dots, h_{M,1}(n), \dots, h_{1,N}(n), \dots, h_{M,N}(n)]^t$$

est calculé par la minimisation du critère des moindres carrés pondérés sur le signal en sortie e(i). L'optimisation est contrainte à un ensemble de K équations linéaires données par

$$\mathbf{C}'\mathbf{h}(n) = \mathbf{f}, \tag{1}$$



où \mathbf{C} est la matrice $MN \times K$ des contraintes et \mathbf{f} le vecteur des réponses à K éléments. Le signal en sortie est donné par

$$e(i) = \mathbf{h}'(n)\mathbf{x}(i),$$

avec

$$\mathbf{x}(i) = [\chi'(i), \chi'(i-1), \dots, \chi'(i+N-1)]'$$

La fonction à être minimisée est alors exprimée par

$$g(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} [\mathbf{h}'(n)\mathbf{x}(i)]^2 \quad (2)$$

où W ($0 < W \leq 1$) est le facteur de pondération ou d'oubli.

L'ensemble de coefficients qui minimise la fonction (2), sujet à la contrainte (1), est obtenu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange [4]. Le résultat est

$$\mathbf{h}(n) = \Gamma(n) [\mathbf{C}'\Gamma(n)]^{-1} \mathbf{f}, \quad (3)$$

où l'on a défini

$$\Gamma(n) = \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n)\mathbf{C}$$

et $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(n)$ est la matrice d'autocorrelation du signal d'entrée, donnée par

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} \mathbf{x}(i)\mathbf{x}'(i)$$

Le but d'un algorithme adaptatif est d'arriver à la solution optimale à l'aide d'une procédure récursive.

L'algorithme de Frost:

La technique CLMS ("Constrained Least Mean-Squares"), introduite par Frost, propose l'adaptation suivante pour les coefficients [3]:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{P}[\mathbf{h}(n) - \mu \mathbf{x}(n+1)e(n+1)] + \mathbf{m} \quad (4)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{m} sont exprimés par

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_{MN} - \mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}' \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = \mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f}$$

Le paramètre μ est le pas d'adaptation de sorte que le terme entre crochets en (4) corresponde à l'algorithme LMS classique pour le filtrage sans contraintes. La matrice \mathbf{P} travaille comme un opérateur qui projette ce terme sur un plan défini par $\mathbf{C}'\mathbf{h}(n) = 0$, appelé sous-espace contraint. En additionnant \mathbf{m} , le vecteur résultant $\mathbf{h}(n+1)$ est mis au plan des contraintes défini par (1). Le nombre de multiplications à chaque itération est $(MN)^2 + 2MN + 1$ et ne dépend pas du nombre de contraintes.

Il est intéressant d'observer que l'équation (4) pourrait être simplifiée avec l'annulation du facteur $\mathbf{f} - \mathbf{C}'\mathbf{h}(n)$, de sorte que:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mu \mathbf{P}\mathbf{x}(n+1)e(n+1) \quad (5)$$

L'expression (5) est un algorithme de projection du gradient où l'on a fait la supposition que $\mathbf{h}(n)$ satisfait les contraintes, ce que peut être faux dû aux erreurs de précision finie. La caractéristique fondamentale de l'algorithme de Frost est qu'il fournit une procédure de correction des erreurs d'arrondi à chaque itération. Cela évite les déviations des coefficients par rapport aux contraintes.

Procédures récursives de moindres carrés:

Considérons maintenant la solution optimale des moindres carrés donnée par l'équation (3). La matrice $\Gamma(n)$ peut être obtenue par la procédure récursive suivante:

$$\Gamma(n+1) = \frac{1}{W} [\Gamma(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)\Gamma(n)] \quad (6)$$

laquelle est dérivée de l'actualisation classique de la matrice d'autocorrelation inverse par la procédure récursive de moindres carrés (RLS) [4,5]. Le gain d'adaptation $\mathbf{g}(n+1)$ peut

être calculé par un algorithme de moindres carrés rapide (FLS) multidimensionnel afin de réduire la complexité des calculs.

En ce qui concerne la matrice $[\mathbf{C}'\Gamma(n)]^{-1}$, le lemme d'inversion de matrices classique peut être employé. La récurrence suivante est obtenue [7]:

$$[\mathbf{C}'\Gamma(n+1)]^{-1} = W \left\{ [\mathbf{C}'\Gamma(n)]^{-1} + \mathbf{I}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)\Gamma(n)[\mathbf{C}'\Gamma(n)]^{-1} \right\}, \quad (7)$$

où le vecteur $\mathbf{I}(n+1)$ à K éléments est défini par

$$\mathbf{I}(n+1) = \frac{[\mathbf{C}'\Gamma(n)]^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{g}(n+1)}{1 - \mathbf{x}'(n+1)\Gamma(n)[\mathbf{C}'\Gamma(n)]^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{g}(n+1)} \quad (8a)$$

ou encore, en remplaçant (7) dans (8a),

$$\mathbf{I}(n+1) = \frac{1}{W} [\mathbf{C}'\Gamma(n+1)]^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{g}(n+1) \quad (8b)$$

Finalement, la récursion des coefficients du filtre est obtenue en remplaçant les équations (6) et (7) dans (3) et en utilisant (8b), tel que:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mathbf{P}(n+1)\mathbf{g}(n+1)e(n+1), \quad (9)$$

où

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{I}_{MN} - \Gamma(n+1)[\mathbf{C}'\Gamma(n+1)]^{-1}\mathbf{C}'$$

Il est alors intéressant d'observer l'analogie entre (5) et (9). En fait, la matrice d'autocorrelation inverse est maintenant introduite dans le calcul de $\mathbf{P}(n+1)$, qui devient indexé par l'instant n . De même, le gain d'adaptation des moindres carrés est utilisé dans (9) au lieu du pas fixe dans (5). Ainsi, on peut voir l'algorithme représenté par l'expression (9) comme l'équivalent en moindres carrés de l'algorithme de projection du gradient. Toutefois, cet algorithme aussi présente les problèmes d'accumulation des erreurs d'arrondis et de déviations des contraintes, car la matrice des contraintes agit uniquement à l'initialisation de la procédure récursive. Comme il a été souligné par Frost, les contraintes doivent être introduites à chaque itération afin d'atteindre la robustesse nécessaire pour une opération continue, avec des longues séquences de données.

III - L'ALGORITHME ROBUSTE

Afin de tenir compte des contraintes à chaque itération, nous allons reconsidérer la solution optimale en (3). Cette équation peut être réécrite à l'instant $(n+1)$ comme:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f}, \quad (10)$$

où l'on a défini la matrice $\mathbf{Q}(n+1)$ $MN \times K$ par

$$\mathbf{Q}(n+1) = \Gamma(n+1)[\mathbf{C}'\Gamma(n+1)]^{-1} \quad (11)$$

Un algorithme robuste peut être alors dérivé si une procédure récursive est obtenue pour la matrice $\mathbf{Q}(n+1)$ et si celle-ci est aussi contrôlée numériquement.

En posant:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{C}'\mathbf{g}(n+1)$$

et

$$\mathbf{v}'(n+1) = \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{Q}(n),$$

la récursion suivante peut être obtenue pour la matrice $\mathbf{Q}(n+1)$, par la combinaison directe de (6) et (7):

$$\mathbf{Q}(n+1) = [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{v}'(n+1)] \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{u}(n+1)\mathbf{v}'(n+1)}{1 - \mathbf{v}'(n+1)\mathbf{u}(n+1)} \right]$$

D'après les équations (1) et (3), à l'absence d'accumulation des erreurs d'arrondi, l'égalité suivante se maintient:

$$C'Q(n+1) = I_K$$

Donc, si $Q'(n+1)$ dénote une matrice avec erreurs, un terme de correction peut être introduit, de sorte que la matrice correcte soit obtenue par:

$$Q(n+1) = Q'(n+1) + C[C'C]^{-1} [I_K - C'Q'(n+1)] \quad (12)$$

On peut observer que le dernier terme entre crochets s'annule en l'absence d'erreur. Enfin, l'algorithme complet est présenté dans le tableau I.

Tableau I: Algorithme de Moindres Carrés Rapide Robuste avec Contraintes.

1) Nouvelle entrée à l'instant $(n+1)$: $\chi(n+1)$
2) Calcul du gain d'adaptation: $g(n+1)$ (algorithme FLS multidimensionnel)
3) Actualisation de la matrice $Q(n+1)$: $u(n+1) = C'g(n+1)$ $v'(n+1) = x'(n+1)Q(n)$ $Q'(n+1) = [Q(n) - g(n+1)v'(n+1)]$ $\left[I_K + \frac{u(n+1)v'(n+1)}{1 - v'(n+1)u(n+1)} \right]$ $Q(n+1) = Q'(n+1) + C[C'C]^{-1} [I_K - C'Q'(n+1)]$
4) Calcul du signal en sortie: $e(n+1) = h'(n)x(n+1)$
5) Actualisation des coefficients: $h(n+1) = Q(n+1)f$

L'initialisation de l'algorithme doit être d'accord avec le critère des moindres carrés. L'algorithme rapide, pour le calcul de $g(n+1)$, est supposé avoir à l'instant $n=0$ toutes ses variables nulles, sauf l'énergie d'erreur de prédiction, donnée par une constante E_0 [5]. Cela correspond en fait à admettre la matrice d'autocorrelation initialisée par:

$$R_{xx}(0) = E_0 \text{diag}_{MN} [I_M, \text{diag}_M(W^{-1}), \dots, \text{diag}_M(W^{-N+1})]$$

Ainsi, pour la matrice Q il faut poser:

$$Q(0) = \Gamma(0)[C'\Gamma(0)]^{-1}$$

où

$$\Gamma(0) = R_{xx}^{-1}(0)C$$

Le nombre de multiplications nécessaires pour adapter les coefficients est $(MNK^2 + 4MNK + K^2 + K)$ plus K divisions. Le calcul du signal en sortie demande MN multiplications. En ce qui concerne la correction d'erreur, le terme $C[C'C]^{-1}$ peut être précalculé et le nombre de multiplications pour implanter (12) est de $2MNK^2$. Finalement, l'algorithme FLS dépense $(7M^2N + MN)$ multiplications pour fournir le gain d'adaptation.

Avec une seule contrainte, nous avons $K=1$ et l'algorithme devient beaucoup plus simple, de sorte que les opérations totalisent $(8MN+1)$ multiplications et une division, avec la correction d'erreur.

Il faut enfin observer que les vecteurs successifs $\chi(i)$ de données d'entrée ne possèdent pas la propriété de décalage, dû à la nature de la propagation et de l'échantillonnage spatiale. En conséquence, les algorithmes FLS ne peuvent pas être employés dans le cas du filtre purement spatial, appliqués aux

signaux à bande étroite, où les sorties des capteurs sont simplement pondérées et sommées. Dans ce cas, $g(n)$ est obtenu par la procédure RLS classique, avec une complexité proportionnelle à M^2 . Dans le cas général considéré dans ce travail, le vecteur $\chi(i)$ présente une propriété de décalage par bloc [5] et l'algorithme du tableau I est utilisé tel que présenté.

IV - RÉSULTATS DE SIMULATION

Pour illustrer les performances de l'algorithme proposé, nous considérons le cas d'un ensemble linéaire de cinq capteurs, dont les sorties sont appliquées à des filtres à six coefficients ($M=5, N=6$).

L'environnement est constitué d'une source désirée et de deux sources de perturbation, dont des caractéristiques et positions sont indiquées au tableau II. Un bruit blanc est aussi ajouté à chaque capteur de sorte à voir un rapport signal souhaité à bruit de 20 dB.

Tableau II: Sources de la simulation.

Sources	Puissance (dB)	Direction	Bande
Souhaité	0	30°	$0.1 \leq f \leq 0.125$
Perturbation 1	-20	30°	$0.2 \leq f \leq 0.225$
Perturbation 2	-20	60°	$0.1 \leq f \leq 0.125$

Quatre contraintes vectorielles ($K=4$), telles que posées dans [9], sont imposées aux coefficients de sorte que la réponse spatiale et temporelle soient cohérentes avec le signal souhaité.

Les résultats obtenus sont comparés avec l'algorithme de Frost et la solution optimale. Nous avons dans la figure 2 l'évolution de la puissance du signal en sortie pour 1000 itérations; il est à signaler la haute vitesse de convergence et la précision de l'algorithme proposé.

Après la convergence, nous avons considéré les valeurs obtenues des coefficients pour calculer les réponses en fréquence des filtres, montrées aux figures 3 et 4, pour les angles $\theta=30^\circ$ et $\theta=60^\circ$, respectivement. Il est vérifié que les encoches à la bande des perturbations sont plus accentuées et proches de l'optimum que ceux de l'algorithme de Frost.

Les réponses en angle des filtres sont montrées aux figures 5 et 6 pour les fréquences $f=0.1125$ et $f=0.2125$, respectivement. Également, l'algorithme de moindres carrés avec contraintes est plus précis en ce qui concerne l'annulation des composantes des perturbations.

Nous avons posé pour les algorithmes $\mu=0.0001$, $W=0.99$ et $E_0=0.1$.

V - CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons proposé un algorithme de moindres carrés rapide robuste pour traitement adaptatif d'antenne avec contraintes. L'approche est basée sur le calcul du gain d'adaptation $g(n)$ à l'aide d'un algorithme FLS multidimensionnel. Un terme de correction a été aussi introduit afin d'assurer la robustesse à l'accumulation des erreurs de précision finie, en évitant des déviations par rapport aux contraintes.

L'algorithme est exact au sens des moindres carrés, en prenant en compte les contraintes au cours de toute l'adaptation. Son extension d'application concerne tous les cas de filtrage avec contraintes: contraintes unique ou multiples et signaux unidimensionnel ou multidimensionnel.



RÉFÉRENCES

[1] **S. Haykin and A. Steinhardt**; "Adaptive Radar Detection and Estimation". John Wiley & Sons, Inc.; New York; 1992.
 [2] **B. D. Van Veen and K. M. Buckley**; "Beamforming: A Versatile Approach to Spatial Filtering". IEEE ASSP Magazine; vol. 5; pp. 4-24; Apr. 1988.
 [3] **O. L. Frost III**; "An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing". Proc. of the IEEE; vol. 60; no. 8; pp. 926-935; Aug. 1972.
 [4] **S. Haykin**; "Adaptive Filter Theory". 2nd edition; Prentice-Hall; New Jersey; 1991.
 [5] **M. G. Bellanger**; "Adaptive Digital Filters and Signal Analysis". Marcel Dekker, Inc.; New York and Basel; 1987.

[6] **A. Cantoni and L. C. Godara**; "Fast Algorithms for Time Domain Broadband Adaptive Array Processing". IEEE Trans. on Aerospace and Electric Systems; vol. AES-18; pp. 682-699; Sep. 1982.
 [7] **L. S. Resende, J. M. T. Romano et M. G. Bellanger**; "Un Algorithme de Moindres Carrés Rapide pour Filtrage Adaptatif avec Contraintes". 13^{ème} Colloque GRETSI; Juan les Pins/France; pages 537 à 540; Sept. 1991.
 [8] **L. S. Resende, J. M. T. Romano and M. G. Bellanger**; "A Robust FLS Algorithm for Linearly-Constrained Adaptive Filtering". Proc. ICASSP'94; Adelaide/Australia; vol. III; pp. 381-384; Apr. 1994.
 [9] **K. M. Buckley**; "Spatial/Spectral Filtering with Linearly Constrained Minimum Variance Beamformers". IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing; vol. ASSP-35; pp. 249-266; Mar. 1987.

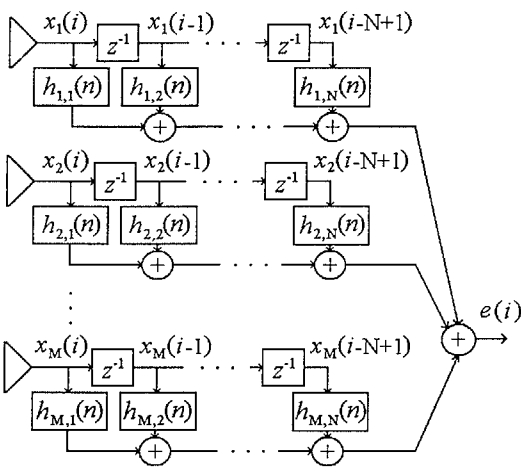


Figure 1: Filtre multicanal transverse LCMV.

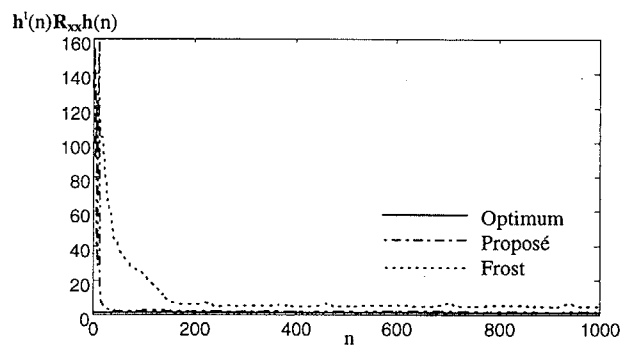


Figure 2: Évolution de la puissance du signal en sortie.

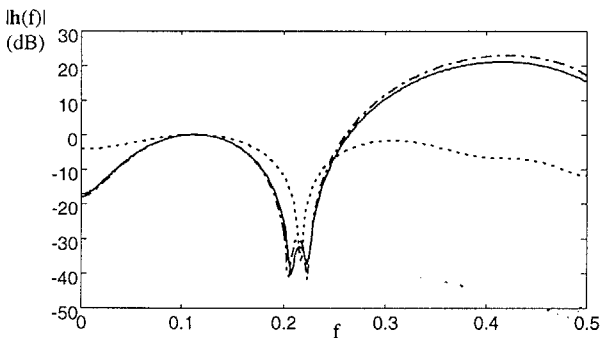


Figure 3: Réponse en fréquence ($\theta=30^\circ$).

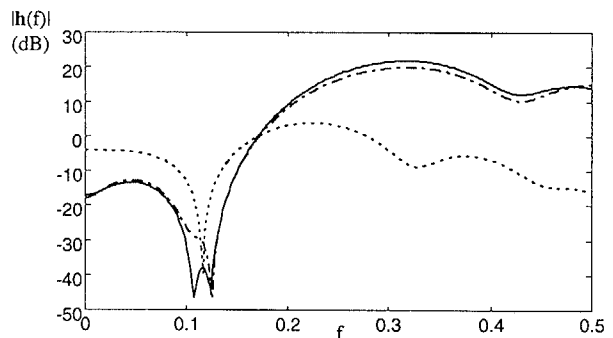


Figure 4: Réponse en fréquence ($\theta=60^\circ$).

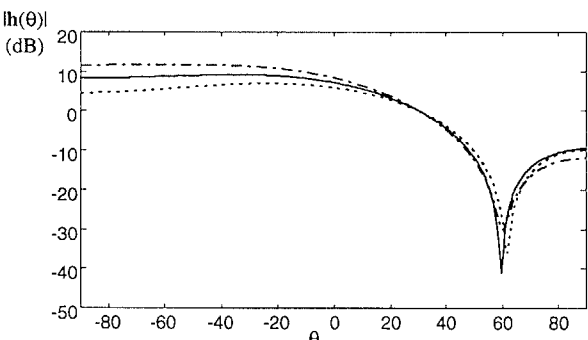


Figure 5: Réponse en angle ($f=0.1125$).

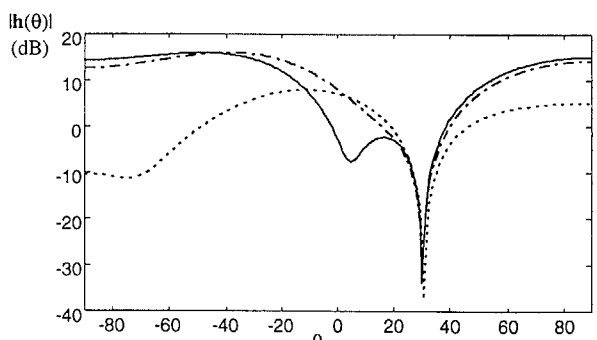


Figure 6: Réponse en angle ($f=0.2125$).