

EXTENSION D'ALGORITHMES DE TYPE GRADIENT AU CAS DE L'ÉCHANTILLONNAGE NON PÉRIODIQUE

Sina MIRSAIDI - Jacques OKSMAN

École Supérieure d'Électricité - Service des mesures

Plateau de Moulon - 91192 GIF-SUR-YVETTE France

Tél. : (33-1) 69 85 12 12 - Fax : (33-1) 69 85 12 34

RÉSUMÉ

Nous présentons une nouvelle méthode d'identification paramétrique des signaux à échantillonnage non périodique. L'algorithme présenté est de type gradient. Il est fondé sur une modélisation auto-régressive (AR) du signal, suivie d'une prédiction utilisant le modèle obtenu.

Les résultats des simulations montrent une bonne performance de la méthode même pour une perte importante d'échantillons.

INTRODUCTION

Le traitement des signaux échantillonnés de façon non périodique apparaît très important à cause de ses nombreux domaines d'application [1]. Parmi ceux-ci, on peut citer par exemple la minimisation du nombre d'échantillons prélevés, la minimisation de la consommation électrique des systèmes électroniques qui ne consomment de l'énergie que lorsqu'ils sont actifs [2] ou la reconstruction des échantillons perdus en raison d'un mauvais fonctionnement du système.

On peut distinguer deux types de signaux à échantillonnage non périodique, en abrégé S.E.N.P. Dans le premier cas les instants d'échantillonnage sont quelconques, les écarts entre les échantillons peuvent prendre leurs valeurs dans un ensemble continu. De nombreuses études théoriques ont été effectuées sur ce type de signaux [3][4]. Dans le deuxième cas, en revanche, les instants d'arrivée des échantillons sont situés à des multiples d'une "période d'échantillonnage cachée". On se limitera dans ce travail à ce type d'échantillonnage, les instants d'arrivée des échantillons étant à part cela supposés aléatoires. Nous considérons également que chacun des échantillons a la même probabilité de disparition $q=1-p$ que les autres. Une autre hypothèse importante est celle d'indépendance entre les processus d'échantillonnage et d'amplitudes.

La possibilité d'utilisation des approches paramétriques pour les S.E.N.P a été étudiée par Robinson [5]. Jones [6] propose une méthode récursive d'analyse temporelle et fréquentielle des S.E.N.P, fondée sur la représentation d'état et le filtrage de Kalman. Cette méthode utilise un algorithme d'optimisation non

ABSTRACT

We present a new method of parametric identification of non periodically sampled signals. The presented algorithm is a Gradient type one. It is based on an Auto-Regressive (AR) modelisation of the signal and a posterior prediction using the estimated model.

Simulation results show the high performance of this method even in the cases where a large number of samples is lost.

linéaire qui nécessite d'observer le signal durant un temps suffisamment grand, et qui conduit donc à une grande complexité calculatoire.

Nous adoptons une approche paramétrique. Cette approche est essentiellement fondée sur la minimisation d'une erreur quadratique moyenne de prédiction par un algorithme du type gradient. Le signal est modélisé de façon auto-régressive (AR). Le suivi du modèle dans le temps est fondé sur le calcul du gradient de la fonction de coût aux instants d'arrivée des échantillons. Les valeurs des échantillons perdus sont estimées à partir de la dernière estimation des paramètres AR. L'algorithme obtenu pour la minimisation du critère de qualité du modèle, tout en étant plus complexe que dans le cas classique, a une formulation récurrente, ce qui facilite la mise en œuvre de la méthode.

1. PRÉDICTEUR LINÉAIRE

Soit $\{y_n\}$ le processus d'amplitudes du signal modélisé de façon auto_régressive.

On suppose qu'à un instant t_n quelconque une estimation des paramètres AR est disponible. On cherche à obtenir un prédicteur linéaire "optimal" sur k pas à partir des paramètres AR estimés et des échantillons disponibles. Le critère d'optimalité est l'erreur quadratique moyenne de prédiction, c'est à dire :

$$J = E\left\{\left(y_{t_n+kT} - \hat{y}_{t_n+kT}\right)^2\right\} \quad (1.1)$$

où y_{t_n+kT} et \hat{y}_{t_n+kT} représentent respectivement les valeurs du signal et de son estimation à l'instant t_{n+kT} , T étant la période d'échantillonnage cachée.



Dans le cadre d'une modélisation AR, il est bien connu [7] que \hat{y}_{i_n+kT} peut être calculé de façon réursive à partir des estimations des points précédents, $\hat{y}_{i_n+(k-1)T}$, $\hat{y}_{i_n+(k-2)T}$, ..., $\hat{y}_{i_n+(k-M)T}$ et des paramètres AR selon :

$$\hat{y}_{i_n+kT} = \sum_{i=1}^M \theta_i \hat{y}_{i_n+(k-i)T} \quad (1.2)$$

où M est l'ordre du modèle et $\theta_1, \dots, \theta_p$ sont les paramètres AR.

Nous utiliserons par la suite ce prédicteur itératif pour le développement de notre algorithme.

2. DÉVELOPPEMENT D'ALGORITHME

Le processus AR d'ordre M modélisant le signal est décrit par la relation suivante :

$$y_n = \sum_{i=1}^M \theta_i y_{n-i} + v_n \quad (2.1)$$

où v_n est un bruit blanc gaussien de variance σ_v .

Soit $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ l'ensemble des instants d'arrivée des échantillons et $\theta^T = [\theta_1, \dots, \theta_M]$ le vecteur des paramètres AR. Nous définissons également le vecteur $\mathbf{h}_{t_i}^T = [h_{t_i}, \dots, h_{t_i-M+1}]$ de la façon suivante :

$$h_{t_i-j} = \begin{cases} y_{t_i-j} & \text{si } y_{t_i-j} \text{ est disponible.} \\ \hat{y}_{t_i-j} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

On pourra alors obtenir l'erreur d'estimation à l'instant t_i :

$$e_{t_i} = y_{t_i} - \hat{y}_{t_i} = y_{t_i} - \theta^T \mathbf{h}_{t_i} \quad \text{pour } i=1, \dots, n \quad (2.3)$$

Afin d'aboutir à des expressions plus simples dans le développement de l'algorithme, nous considérons les grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{t_{n+1}}^T &= [y_{t_1}, \dots, y_{t_{n+1}}] \\ \mathbf{e}_{t_{n+1}}^T &= [e_{t_1}, \dots, e_{t_{n+1}}] \\ \mathbf{H}_{t_{n+1}}^T &= [\mathbf{h}_{t_1} \mid \dots \mid \mathbf{h}_{t_{n+1}}] \end{aligned} \quad (2.4.1-3)$$

La fonction de coût est choisie comme étant l'erreur quadratique moyenne d'estimation, soit :

$$J_{t_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \mathbf{e}_{t_{n+1}}^T \mathbf{e}_{t_{n+1}} \quad (2.5)$$

Il vient alors :

$$J_{t_{n+1}} = \frac{1}{n+1} (\mathbf{y}_{t_{n+1}}^T \mathbf{y}_{t_{n+1}} - \theta^T \mathbf{H}_{t_{n+1}}^T \mathbf{y}_{t_{n+1}} - \mathbf{y}_{t_{n+1}}^T \mathbf{H}_{t_{n+1}} \theta + \theta^T \mathbf{H}_{t_{n+1}}^T \mathbf{H}_{t_{n+1}} \theta)$$

On cherche à obtenir une relation réursive de mise à jour pour le vecteur θ de la forme :

$$\theta_{t_{n+1}} = \theta_{t_n} + \mu \mathbf{g}_{t_{n+1}} \quad (2.6)$$

où μ est le pas d'adaptation et $\mathbf{g}_{t_{n+1}}$ le vecteur du gradient qui devrait être obtenu en dérivant la fonction de coût par rapport au vecteur des paramètres θ . La matrice H contient des éléments

qui dépendent des paramètres θ ce qui rend les calculs plus complexes par rapport au cas de l'échantillonnage périodique. Afin d'éviter les détails de calcul on se contente dans cet article des équations récurrentes finales qui sont récapitulées dans la table 1.

L'idée de base de cet algorithme ressemble à celle du LMS classique, la différence fondamentale résidant dans la fonction de coût choisie.

Le choix d'une erreur quadratique moyenne, à la place d'une erreur instantanée pour la fonction de coût, amoindrit de façon considérable la variance d'estimation des paramètres. Grâce à l'utilisation d'une information "globale" à chaque étape de réactualisation des paramètres, l'estimation du vecteur gradient devient plus fiable que dans le LMS. Ces avantages, surtout dans le cas de l'échantillonnage périodique, permettront le choix d'un pas d'adaptation plus important et donc une rapidité de convergence supérieure. Les résultats des simulations dans le cas d'un échantillonnage non périodique montrent que le choix d'un pas d'adaptation semblable à celle du LMS, c'est à dire :

$$0 < \mu < \frac{1}{M \times \text{puissance d'entrée}} \quad (2.7)$$

est largement suffisant pour la convergence de cet algorithme. Dans les cas où le taux de perte des échantillons est important (40% ou 50% par exemple), il est conseillé de respecter la condition (2.7).

3. RÉSULTATS

Nous considérons deux exemples d'application. La méthode d'échantillonnage est celle citée précédemment : la probabilité de perdre chaque échantillon est ($q = 1 - p$) et cette probabilité est identique pour tous les échantillons. La figure 1 montre un exemple de ce type d'échantillonnage. On constate bien que dans presque 65% des cas la règle de Shannon n'est pas respectée.

Exemple 1

Il s'agit de la reconstitution temporelle d'un signal AR d'ordre 2. La figure 2 montre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne d'estimation pour différentes valeurs de paramètre p . Chacun de ces courbe représente le résultat moyen de cent échantillonnages distincts.

Notons que la rapidité de convergence est presque identique dans tous les cas de figures. L'erreur résiduelle, en revanche, est d'autant plus importante que le taux moyen de perte des échantillons est élevé. La figure 3 montre les signaux initial et reconstitué. Pour avoir une idée de la variance d'estimation, l'exemple de reconstruction du même signal est donné dans la figure 4.

Exemple 2

Nous étudions dans cet exemple la performance de la reconstruction spectrale de cet algorithme. Le spectre initial est celui de la voyelle "i" prononcé par un homme. Le taux moyen de

DESCRIPTION FORMELLE DE L'ALGORITHME

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{t_{n+1}} = \hat{\theta}_n + \mu g_{t_{n+1}} \\ g_{t_{n+1}} = \frac{\partial J_{1,t_{n+1}}}{\partial \theta} + \frac{\partial J_{2,t_{n+1}}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \theta} = h_{i-1} + \left[\frac{\partial h_{i-1}}{\partial \theta} \quad \dots \quad \frac{\partial h_{i-M}}{\partial \theta} \right] \theta \\ \sigma_{v_{t_{n+1}}}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} |e_i|^2 = \frac{n}{n+1} \sigma_{v_n}^2 + \frac{1}{n+1} e_{t_{n+1}}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial J_{1,t_{n+1}}}{\partial \theta} = q_{t_{n+1}} + p_{t_{n+1}} \\ q_{t_{n+1}} = \frac{n}{n+1} q_{t_n} + \frac{1}{n+1} h_{t_{n+1}} y_{t_{n+1}} \\ \left(p_{t_{n+1}} \right)_i = f_{i,t_{n+1}} \hat{\theta}_{t_n} \\ f_{i,t_{n+1}} = \frac{n}{n+1} f_{i,t_n} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial h_{t_{n+1}}}{\partial \theta_i} \quad i=1, \dots, M \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial J_{2,t_{n+1}}}{\partial \theta} = u_{t_{n+1}} + v_{t_{n+1}} \\ u_{t_{n+1}} = B_{t_{n+1}} \hat{\theta}_{t_n} \\ B_{t_{n+1}} = \frac{n}{n+1} B_{t_n} + \frac{1}{n+1} h_{t_{n+1}} h_{t_{n+1}}^T \\ \left(v_{t_{n+1}} \right)_i = \hat{\theta}_{t_n}^T K_{i,t_{n+1}} \hat{\theta}_{t_n} \\ K_{i,t_{n+1}} = K_{i,1,t_{n+1}} + K_{i,1,t_{n+1}}^T \\ K_{i,1,t_{n+1}} = \frac{n}{n+1} K_{i,1,t_n} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial h_{t_{n+1}}}{\partial \theta_i} h_{t_{n+1}}^T \quad i=1, \dots, M \end{cases}$$

$K_{i,t_{n+1}}$, $K_{i,1,t_{n+1}}$, $f_{i,t_{n+1}}$, $J_{1,t_{n+1}}$, $J_{2,t_{n+1}}$ sont des termes intermédiaires et les vecteurs $p_{t_{n+1}}$ et $q_{t_{n+1}}$ ont les définitions suivantes :

$$p_{t_{n+1}} \triangleq \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} y_{t_{n+1}}^T \frac{\partial H_{t_{n+1}}}{\partial \theta_1} \hat{\theta}_{t_n} \\ \vdots \\ y_{t_{n+1}}^T \frac{\partial H_{t_{n+1}}}{\partial \theta_i} \hat{\theta}_{t_n} \\ \vdots \\ y_{t_{n+1}}^T \frac{\partial H_{t_{n+1}}}{\partial \theta_M} \hat{\theta}_{t_n} \end{bmatrix}$$

$$v_{t_{n+1}} \triangleq \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{t_n}^T \frac{\partial H_{t_{n+1}}^T}{\partial \theta_1} H_{t_{n+1}} \hat{\theta}_{t_n} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{t_n}^T \frac{\partial H_{t_{n+1}}^T}{\partial \theta_i} H_{t_{n+1}} \hat{\theta}_{t_n} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{t_n}^T \frac{\partial H_{t_{n+1}}^T}{\partial \theta_M} H_{t_{n+1}} \hat{\theta}_{t_n} \end{bmatrix}$$

Table 1.

perte des échantillons est de 45% et l'ordre du modèle AR est $M = 20$.

La figure 5 montre le résultat de cette simulation. Nous constatons une bonne reconstruction des zones les plus informatives du spectre. Un bruit résiduel d'estimation est également observé. Ceci est évidemment causé par le manque d'information.

CONCLUSION

Les résultats des simulations montrent de bonnes performances de reconstitution spectrale et temporelle pour l'algorithme présenté.

Le traitement adaptatif des signaux à échantillonnage non périodique nécessite une robustesse importante. Le choix des algorithmes de type gradient apparaît alors judicieux. La rapidité et la qualité d'estimation sont améliorées grâce au choix d'une fonction de coût plus exigeante que l'erreur instantanée.

Il faut enfin noter que cette méthode peut être appliquée pour minimiser le nombre de points de mesure d'un signal, ce qui correspond souvent à la minimisation de la consommation d'une électronique intégrée, ou encore dans les techniques de compression d'information en vue de transferts.

Remerciements

Nous tenons tout particulièrement à remercier Gilles Fleury pour l'aide qu'il a fournie lors de ces travaux.

Références

- [1] O. Bensaoud, J. Oksman "Reconstruction en temps réel de signaux à échantillonnage non périodique," *Traitement du signal*, vol. 11, no. 3, pp. 283-293, 1994.
- [2] J. Oksman "Adaptive sampling processing," *Esprit project 9011, Slopsys WP5*. 1994.
- [3] E. A. Parzen "Times series analysis of irregularly observed data," *Lect. Notes. Statist.*, 25, 1984.
- [4] E. Masry "Alias-free sampling : an alternative conceptualization and its applications," *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-24, pp. 317-324, 1978.
- [5] P. M. Robinson "Estimation of a time series model from unequally spaced," *Stochastic processes and their applications*, 6, pp. 9-24, 1977.
- [6] R. H. Jones "Fitting a continuous time auto regression to discrete data," *Applied times series analysis III*, (ed. D. F. Findely) New York : Academic Press, pp. 651-683, 1981.
- [7] G. C. Goodwin, K. S. Sin *Adaptive filtering, prediction and control*, Prentice-Hall, 1984.

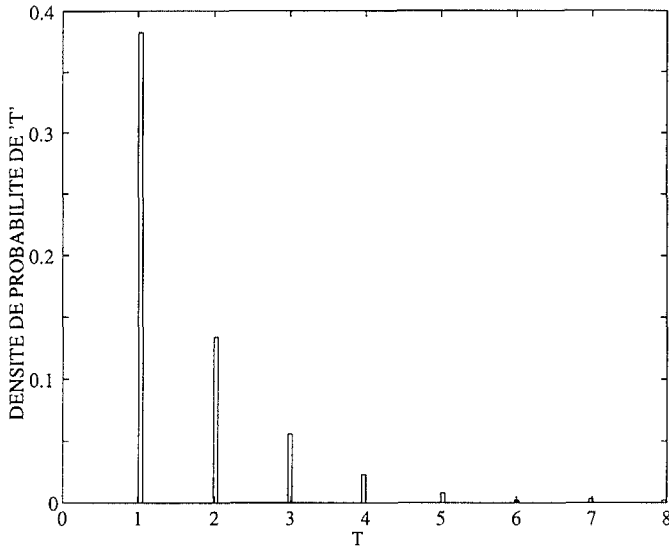


Fig. 1. Distribution des intervalles de temps entre les échantillons ($p = 0.6$).

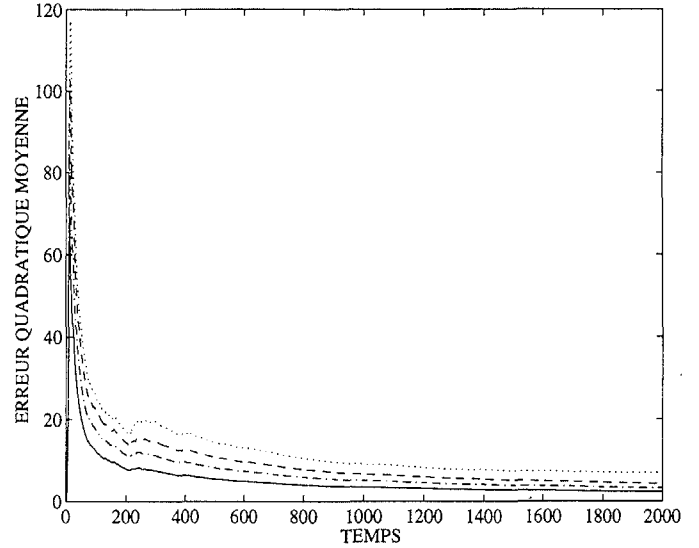


Fig. 2. L'erreur quadratique moyenne d'estimation, pour une probabilité $p = 1$: —, $p = 0.8$: - - -, $p = 0.7$: - · - · -, $p = 0.6$: ····

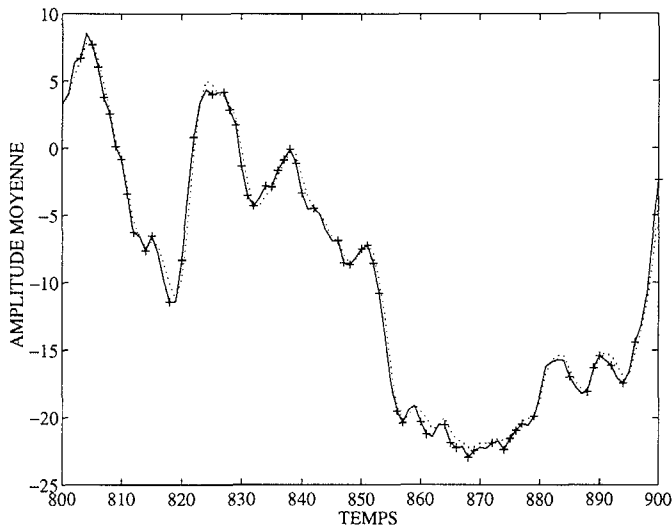


Fig. 3. Performance moyenne de la reconstruction temporelle d'un signal AR(2) pour 100 réalisations.

Signal initial : ———→ signal reconstruit : ····· ++ : échantillons reçus.

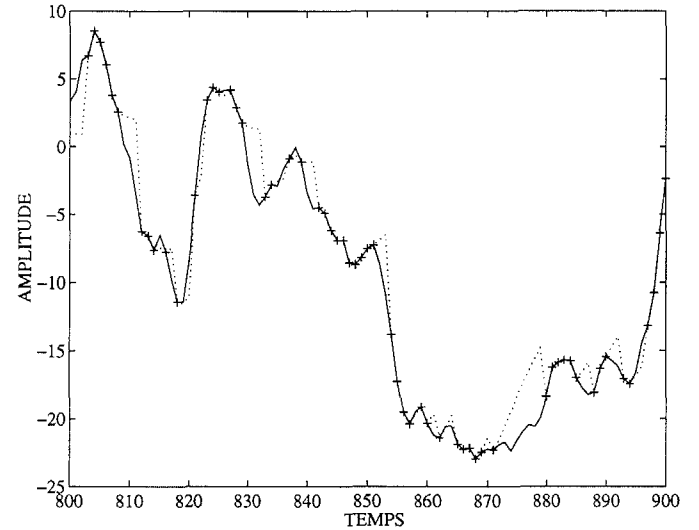


Fig. 4. Reconstruction temporelle d'un signal AR(2) avec une seule réalisation.

signal initial : ———→ signal reconstruit : ····· ++ : échantillons reçus.

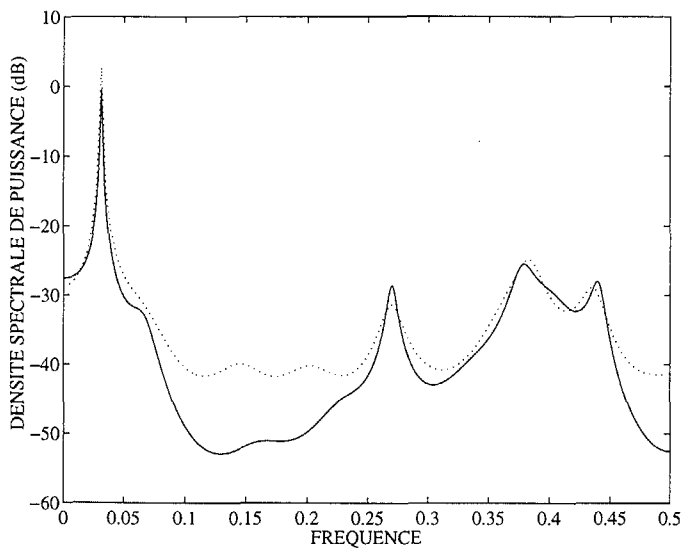


Fig. 5. Estimation spectrale. Spectre initial : ———→ spectre estimé : ·····