UNE SOLUTION AU PROBLÈME DE FAUSSE CONVERGENCE DE L'ALGORITHME DE GODARD

A.L. Jousselme

Université Laval - Dpt Génie Electrique
Lab. Radiocommunications et T.S.
Sainte Foy, Quebec, Canada G1K7P4
e-mail annelaur@gel.ulaval.ca

J.M. Brossier

C.E.P.H.A.G. - E.N.S.I.E.G.
B.P. 46
38402 St Martin d'Heres, France
e-mail brossier@cephag.observ-gr.fr

RÉSUMÉ

RESUME

Nous reprenons ici une idée proposée par Chen et al. (workshop on HOS 91-Chamrousse) destinée à réduire les minima locaux de la fonction de coût de Godard. L'idée consiste à prendre en considération, au niveau de la fonctionnelle de coût, la décorrélation des données transmises. L'algorithme stochastique qui découle de l'utilisation de cette contrainte supplémentaire est ici établi. Ses performances sont étudiées complètement dans un cas d'école. Quelques simulations illustrent les résultats théoriques.

ABSTRACT

ABSTRACT

We use an idea suggested by Chen et al. (workshop on HOS91-Chamrousse). The aim is to reduce the influence of local minima in the Godard cost function using the whiteness of the emitted data sequence. The corresponding stochastic algorithm is given and its performances are studied in a very simple case. Some simulations are given in order to illustrate theoretical results.

1. INTRODUCTION

Lors de la transmission de données à travers un canal, celles-ci subissent différentes distorsions (interférences entre symboles, rotation de phase, problèmes de synchronisation,...) que des systèmes adéquats ont pour but de réduire afin de restaurer les données émises. Nous nous intéressons ici uniquement à l'une de ces distorsions : les interférences entre symboles. Chaque symbole émis est étiré par la distorsion du canal sur une durée plus grande que la durée symbole originale, causant de ce fait des interférences. Pour résoudre ce problème, on utilise un égaliseur, c'est-à-dire un filtre placé à la sortie du canal de transmission. Les coefficients de ce filtre sont pilotés par un algorithme adaptatif. Certains algorithmes travaillent directement sur la séquence émise et utilise celle-ci lors d'une période d'apprentissage pour faire converger les coefficients de l'égaliseur. La transmission proprement dite s'effectue seulement dans un deuxième temps. D'autres algorithmes d'égalisation, dit aveugles, sont à même de converger directement sur le flot des données reçues et peuvent se dispenser d'apprentissage.

Les algorithmes de Godard constituent une classe importante d'algorithmes d'égalisation aveugle pour les transmissions utilisant une modulation de deux porteuses en quadrature (QAM). On s'intéresse ici aux propriétés de l'un d'eux, l'algorithme CMA. La fonctionnelle de coût minimisée par cet algorithme présente en général des minima locaux pouvant conduire à de fausses convergences (ne permettant pas d'égaliser le canal). Notre objectif est d'analyser une méthode permettant de réduire l'influence de ces minima parasites.

Le paragraphe 2 rappelle la forme générale des algorithmes de Godard et la forme particulière utilisée dans la suite (CMA). Nous limitons l'étude au cas d'école suivant : égalisation d'un canal ne comportant qu'un seul pôle et modulation de phase à deux états (MDP2). Ce cas simple permet de mettre en évidence l'existence des minima locaux et de les calculer explicitement (position et amplitude).

Dans le paragraphe 3, on examine l'idée proposée par Chen et al. [3] visant à éliminer les minima parasites en prenant en compte la décorrélation des données transmises. Un algorithme adaptatif exploitant cette idée est obtenu et ses principales caractéristiques sont analysées. On vérifie ainsi que cette méthode permet, dans les meilleurs des cas, de supprimer les minima locaux ou du moins de réduire leur influence.

L'intérêt de cette analyse particulière est de révéler l'effet exact de la contrainte de décorrélation.

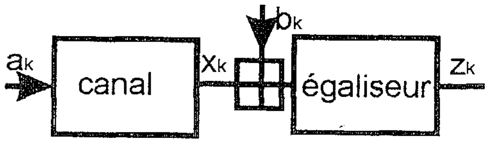

Figure 1: Schéma de communication simplifié

Même si ce résultat ne décrit pas vraiment les situations plus complexes susceptibles d'être rencontrées en pratique, il laisse néanmoins espérer un gain de performance important dans des situations plus générales.

2. ALGORITHMES DE GODARD

2.1. Cas général

On considère le schéma de communication simplifié décrit par la figure (1). Le problème de l'égalisation aveugle consiste à estimer les données émises a_k sans jamais connaître la séquence émise. Le critère utilisé ne doit ainsi dépendre que de la sortie z_k de l'égaliseur. Ainsi, dans le but de réduire le taux d'interférences entre symboles (ISI) sans utiliser la séquence des données émise, D. Godard [1] a défini une série de fonctions de coût. Ces fonctions de coût s'écrivent de la manière suivante

$$J_p(z_k) = \frac{1}{2p} E\left(|z_k|^p - R_p\right)^2$$

où la constante R_p s'écrit :

$$R_p = \frac{E\left(|a_k|^{2p}\right)}{E\left(|a_k|^p\right)}$$

p est un entier strictement positif. Nous nous limitons au cas $p = 2$ qui correspond à l'algorithme CMA (Constant Modulus Algorithm). Ce cas est de loin le plus utilisé.

2.2. Présentation du cas d'école

Le signal à transmettre que nous considérons est une suite de variables aléatoires binaires indépendantes

$$\{a_k\} = \pm 1 \text{ avec la même probabilité}$$

D'où

$$E(a_k) = E\left(a_k^3\right) = 0 \text{ et } E|a_k|^2 = E|a_k|^4 = 1$$

La fonction de transfert du canal de transmission est de la forme :

$$C\left(z^{-1}\right) = \frac{\beta}{1 - \alpha z^{-1}}$$

où β est une constante positive et α caractérise la dispersion du canal ($0 \leq \alpha \leq 1$). Le canal est bruité par un bruit additif gaussien réel, centré de variance σ^2. La sortie du canal bruité à l'instant k se met sous la forme :

$$x_k = b_k + \beta \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i a_{k-i}$$

On appelle

$$\Theta^T = (\theta_0, \theta_1)$$

le vecteur des coefficients de l'égaliseur à l'instant k et

$$X_k^T = (x_k, x_{k-1})$$

le vecteur contenant les deux dernières observations. Ainsi, la sortie de l'égaliseur s'écrit :

$$z_k = X_k^T \Theta$$

A l'égalisation parfaite, l'égaliseur doit être de la forme

$$\widetilde{\theta}\left(z^{-1}\right) = \pm\left(1 - \alpha z^{-1}\right)$$

Dans ce cas particulier, il est possible de calculer explicitement la fonction de coût de Godard et son expression est :

$$J_2(\Theta) = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{c} \left[\theta_0^4 + \theta_1^4\right] E\left(x_k^4\right) \\ +6\theta_0^2\theta_1^2 E\left(x_k^2 x_{k-1}^2\right) \\ +4\theta_0^3\theta_1 E\left(x_k^3 x_{k-1}\right) \\ +4\theta_0\theta_1^3 E\left(x_k x_{k-1}^3\right) \\ -2\left[\theta_0^2 + \theta_1^2\right] E\left(x_k^2\right) \\ +4\theta_0\theta_1 E\left(x_k x_{k-1}\right) + 1 \end{array}\right\}$$

où les moments de la sortie du canal s'expriment facilement en fonction de σ, α, β. La minimisation de la fonction de coût de Godard par un algorithme du gradient stochastique conduit à l'itération suivante :

$$\Theta_k = \Theta_{k-1} - \mu_k z_k \left(z_k^2 - 1\right) X_k$$

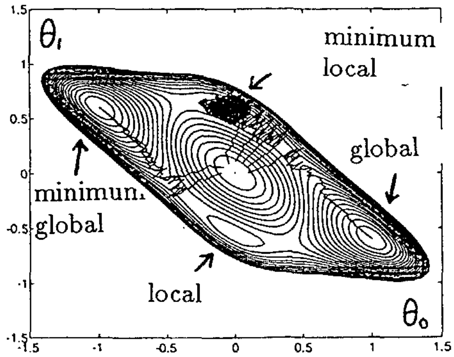

Figure 2: Coût et trajectoires de l'algorithme de Godard

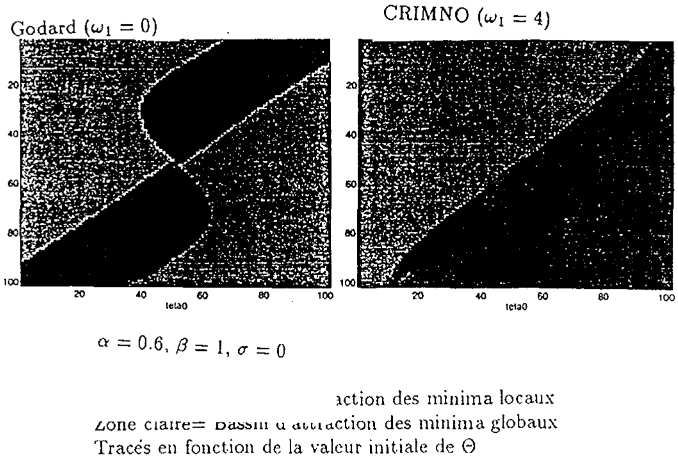

Figure 3: Bassins d'attraction pour Godard et CRIMNO

Θ_k représente les coefficients de l'égaliseur au temps k et μ_k est le pas de l'algorithme.

L'étude de J_2 démontre l'existence de minima locaux [2] dans lesquels l'algorithme peut s'égarer. La figure (2) représente $J_2(\theta_0, \theta_1)$ en courbes de niveaux avec quelques exemples de mauvaises convergences.

3. INTRODUCTION D'UNE CONTRAINTE SUPPLÉMENTAIRE

Comme dans tous les problèmes d'optimisation, on peut assez naturellement espérer réduire ou supprimer les minima locaux grâce à l'ajout d'une contrainte à la fonction de coût de Godard. Un algorithme fondé sur cette méthode (CRIMNO) a été proposé par Chen et al. [3]. Dans ce papier, les auteurs proposent de prendre en compte une contrainte de décorrélation des données en sortie de l'égaliseur. Ceci conduit à remplacer le coût classique de Godard par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} J_2'(\theta_0, \theta_1) &= \omega_0 E\left(|z_k|^2 - 1\right)^2 \\ &+ \omega_1 \left|E\left(z_k z_{k-1}^{(k)}\right)\right|^2 \\ &+ \cdots \\ &+ \omega_n \left|E\left(z_k z_{k-n}^{(k)}\right)\right|^2 \end{aligned}$$

Les poids ω_i traduisent l'importance accordée à chacun des termes du coût. $z_{k-n}^{(k)}$ est une estimation de z_{k-n} utilisant les observations jusqu'à l'instant k. Nous nous limitons à l'influence du premier terme supplémentaire en ω_1. Le gradient $\nabla_\theta\left\{J_2'(\theta_0, \theta_1)\right\}$ de J_2' a pour expression :

$$\begin{aligned} &\nabla_\theta\left\{J_2'(\theta_0, \theta_1)\right\} = \\ &2\omega_0 E\left\{\left(z_k^2 - 1\right) z_k X_k\right\} \\ &+\omega_1 E\left(z_k^{(k)} z_{k-1}^{(k)}\right) E\left\{\nabla_\theta\left(z_k^{(k)} z_{k-1}^{(k)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

Le passage à l'approximation stochastique ne peut pas s'effectuer en supprimant simultanément toutes les espérances dans (1) comme cela a été fait dans [3]. Pour obtenir un algorithme adaptatif correct, on supprime directement l'espérance dans le premier terme. Par contre, le second terme étant un produit d'espérances de termes statistiquement dépendants, on choisit d'estimer $E\left(z_k^{(k)} z_{k-1}^{(k)}\right)$ à l'aide d'un algorithme récursif et de remplacer $E\left\{\nabla_\Theta\left(z_k^{(k)} z_{k-1}^{(k)}\right)\right\}$ par sa valeur instantanée. L'algorithme ainsi obtenu s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned} \Theta_k &= \Theta_{k-1} - \mu_k \left\{2\omega_0 z_k \left(z_k^2 - 1\right) X_k \right. \\ &+ \left. \omega_1 y_k \left(z_{k-1}^{(k)} X_k + z_k^{(k)} X_{k-1}\right)\right\} \\ y_k &= y_{k-1} - \gamma_k \left(y_{k-1} - z_k^{(k)} z_{k-1}^{(k)}\right) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Dans nos simulations, les pas sont donnés par :

$$\mu_k = \mu \text{ et } \gamma_k = \frac{1}{k-1}$$

La figure (3) représente les bassins d'attraction associés aux quatre minima (deux locaux, deux globaux) pour l'algorithme de Godard et pour 2. On note alors que, dans le cas où seule la fonctionnelle de Godard est minimisée, le rôle des deux minima locaux n'est pas

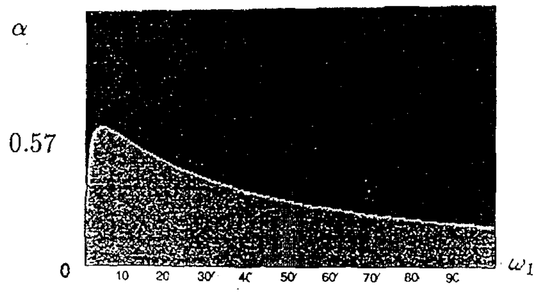

Figure 4: Zone d'élimination des minima locaux (en clair)

négligeable.Cependant, grace à la contrainte supplémentaire introduite dans l'algorithme CRIMNO et utilisée par l'algorithme (2), les bassins d'attraction de ces minima parasites sont réduits ou supprimés totalement selon la valeur de α. En effet, il est possible de supprimer ces minima locaux en choisissant judicieusement le poids ω_1. La figure (4) représente le domaine du plan (α, ω_1) dans lequel les minima locaux disparaissent (zone claire) et indique de ce fait la valeur pertinente de ω_1 pour un α donné. Pour $\alpha > 0.576$, il suffit de choisir $\omega_1 = 5$ pour éliminer les minima locaux, alors que pour $\alpha < 0.576$, les minima parasites ne peuvent pas disparaitre. Ces résultats ont été obtenu analytiquement, mais les calculs sont trop longs et fastidieux pour être détaillés ici.

4. CONCLUSION

Grace à l'étude d'un cas simple, nous avons montré qu'une utilisation adéquate du critère CRIMNO conduit à un algorithme permettant de réduire les problèmes liés à l'existence de minima locaux. Une étude précise de l'amélioration ainsi apportée a pu être menée à bien pour un modèle simple de canal : fonction de transfert comportant un seul pole α. En résumé, les résultats obtenus sont les suivants :

- Pour un canal fortement dispersif, $0.576 < \alpha < 1$, les minima locaux peuvent être complètement éliminés en choisissant correctement la pondération de la contrainte de décorrélation des données.

- Lorsque le canal est peu dispersif, $0 < \alpha < 0.576$, les minima locaux existent toujours mais s'avèrent moins dangereux (moins attractifs). De plus, un canal peu dispersif correspond justement au cas pour lequel un dispositif d'égalisation est le moins utile.

L'idée de CRIMNO peut ainsi être intéressante, elle demanderait à être testée dans des cas réalistes. Hormi le fait que les minima locaux sont atténués voire éliminés, un autre avantage du coût CRIMNO est que la vitesse de convergence de l'algorithme modifié est plus rapide que celle d'un simple algorithme de Godard.

5. REFERENCES

[1] D.N. Godard, Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems, IEEE trans. on com., vol 28, 11, pp.1867-1876, Nov. 1980.

[2] Zhi Ding, C. Richard Johnson, Convergence of Godard Blind Equalizers in Data Communication Systems, IEEE trans. on com., vol 39, 9, pp. 1313-1327, Sept. 1991.

[3] Y. Chen, C.L. Nikias, J.G. Proakis, CRIMNO : Criterion with Memory Nonlinearity for Blind Equalization, International Signal Processing Workshop on Higher Order Statistics, pp. 87-90, Chamrousse July 1991.