



POURSUITE DE NON STATIONNARITES  
PAR FILTRAGE MULTIREOLUTION ADAPTATIF

S. BEN JEBARA<sup>(1)</sup>, M. JAIDANE-SAIDANE<sup>(2)</sup>, M. BENIDIR<sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> L.S.Télécoms, ESPTT, Route de Raoued, Tunis, TUNISIE

<sup>(2)</sup> L.S.Télécoms, ENIT, Campus Universitaire, Le Belvédère, Tunis, TUNISIE

<sup>(3)</sup> Université de Paris-Sud, L2S-ESE, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, FRANCE

RÉSUMÉ

On propose dans cet article un schéma d'identification adaptative des systèmes non stationnaires. Ce schéma est fondé sur une "décomposition multirésolution" des signaux d'entrée et de sortie du système à identifier. Grâce à une approche de filtrage linéaire des opérateurs de décomposition en ondelettes, on établit que la méthode proposée permet d'améliorer la capacité de poursuite de non stationnarité par rapport au schéma d'identification classique. La non stationnarité considérée est modélisée par une promenade aléatoire.

ABSTRACT

In this paper, we propose an adaptive identification scheme for non stationary systems, based on an input/output multiresolution decomposition. Using a linear filtering approach for designing the discrete wavelet transform operators, we establish that the proposed scheme improves the performances of the non stationnarity tracking compared with the classical identification scheme. The considered non stationnarity is modelled by a random walk

1. INTRODUCTION

L'amélioration des performances des schémas d'identification adaptative, dans un contexte non stationnaire, concerne le plus souvent l'accélération de la convergence du transitoire. Seuls les problèmes de corrélation et de non stationnarité de l'entrée sont alors évoqués. Pour cela des schémas d'identification basés sur une orthogonalisation par codage en sous bandes, codage prédictif adaptatif ou plus récemment sur une transformation en ondelettes de l'entrée sont alors proposés [1][2][3][4][5][6]. Peu de schémas proposent une solution pour l'amélioration de la capacité de poursuite des algorithmes adaptatifs lorsque c'est le système qui est non stationnaire. Ceci est en particulier lié à la difficulté de l'analyse théorique correspondante (voir [7] pour les schémas classiques d'identification).

Nous utilisons ici, une structure de décomposition de signaux, dite Décomposition Multirésolution (DMR), qui considère comme dans [8], une approche à partir d'opérateurs de filtrage linéaire. C'est cet outil qui permettra une meilleure identification des systèmes non stationnaires. La DMR des signaux entrée-sortie du système, permet de décomposer le schéma d'identification en branches d'identification indépendantes permettant l'identification de chaque "sous système". On analysera alors les caractéristiques de chaque branche et on développera théoriquement les performances de chacune d'elle en terme de capacité de poursuite de non stationnarité du sous système. A partir des performances de chaque branche, on conclura alors sur les performances du schéma global, qui présente dans tous les cas de meilleures performances que le schéma d'identification classique. On

dégagera en particulier l'apport de la DMR pour améliorer les performances en fonction des caractéristiques des opérateurs de projection et du nombre d'étages de décomposition.

2. PRINCIPE D'IDENTIFICATION PAR FILTRAGE MULTIREOLUTION ADAPTATIF

2.1. Principe de la décomposition multirésolution

La décomposition multirésolution proposée (DMR) présentée sur la figure 1 consiste à décomposer un signal aléatoire discret  $x(k)$  en  $N$  signaux  $x_i(k)$ , selon  $x(k) = x_1(k) + x_2(k) + \dots + x_N(k)$ . Chaque signal  $x_i$  est obtenu par projection de  $x$  sur un sous espace  $W_i \subset L^2(\mathbb{R})$ . Les différents opérateurs de projection sont des filtres linéaires  $P_i$  obtenus selon :

$$P_i(z) = \begin{cases} T_1(z), & \text{si } i=0, \\ \prod_{j=0}^{i-1} T_2(z^{2^j}), & \text{si } i=N, \\ T_1(z^{2^i}) \prod_{j=0}^{i-1} T_2(z^{2^j}), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

où  $N$  correspond au nombre d'étages de décomposition et  $T_1(z) = \frac{1}{2}h'(z)h(z)$  (resp.  $T_2(z) = \frac{1}{2}g'(z)g(z)$ ) est le filtre passe haut (resp. passe bas) de la décomposition multirésolution proposée et  $h$  (resp.  $h'$ ) est le filtre passe haut d'analyse (resp. de reconstitution) tandis que  $g$  (resp.  $g'$ ) est le filtre passe bas d'analyse (resp. de reconstitution) de l'Analyse Multirésolution classique (AMR). La structure de décomposition proposée a l'avantage de pré-



senter uniquement des opérateurs de filtrage (pas de décimation ni de suréchantillonnage) en gardant l'aspect de décomposition à différentes résolutions des signaux. En effet, elle permet de décomposer le contenu fréquentiel d'un signal de façon dyadique et pyramidale selon le même principe que l'AMR classique qui correspond à l'implantation de la Transformée en Ondelettes Discrète (TOD).

## 2.2. Application de la DMR à l'identification d'un système non stationnaire

Le schéma d'identification proposé (figure 2) introduit dans le schéma classique, une décomposition à différentes résolutions, à la fois de l'entrée et de la sortie du système. Le schéma proposé peut être alors décomposé en  $N$  "sous schémas" indépendants, permettant chacun l'identification d'un "sous système" issu du système à identifier.

Cette approche permet, grâce à une estimation de chaque composante  $y_i(k)$  d'affiner l'estimation de la sortie  $y(k)$  du système par rapport au schéma d'identification classique. Pour cela, chacune des entrées  $x_i(k)$ , filtrée par un filtre adaptatif  $\hat{F}_i(k)$  permet de générer  $\hat{y}_i(k)$  qui constitue une estimation de la sortie  $y_i(k)$ . C'est l'erreur  $e_i(k) = y_i(k) - \hat{y}_i(k)$  qui pilotera le filtre adaptatif correspondant. Nous considérons ici une adaptation de type gradient stochastique (LMS) destinée à minimiser en temps réel l'erreur quadratique moyenne d'estimation  $E[e_i(k)^2]$  pour une résolution  $i$  donnée. La sommation des erreurs partielles permet de reconstituer une erreur globale.

## 3. PERFORMANCES DES SOUS SCHEMAS

### 3.1. Contexte non stationnaire et critères de performances

Nous nous plaçons dans le contexte non stationnaire suivant : La réponse  $y(k)$  du système, à une entrée  $x(k)$  stationnaire est donnée par :  $y(k) = F(k)^T X(k) + n(k)$  où  $X(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-L_F+1)]^T$  est le vecteur observation du passé de l'entrée et  $n(k)$  est un bruit d'observation indépendant de  $\{x(k)\}$ . C'est l'évolution au cours du temps du vecteur paramètre  $F(k)$ , qui caractérise la non stationnarité du système. On la suppose ici de type promenade aléatoire :

$$F(k) = F(k-1) + \Omega(k) \quad (2)$$

où chaque composante  $\omega_i(k)$  de  $\Omega(k)$  est une séquence iid indépendante de  $\{x(k)\}$  et de  $\{n(k)\}$ .

Cette non stationnarité se caractérise par le nombre  $\delta$  dénommé degré de non stationnarité et défini en [7] par :

$$\delta = E \left\{ [\Omega(k)^T X(k)]^2 \right\} / P_n \quad (3)$$

où  $P_n$  représente la puissance du bruit d'observation.

La capacité de poursuite de non stationnarités d'un schéma d'adaptation se mesure par l'Erreur Quadratique Moyenne Résiduelle en régime permanent définie par :

$$EQMR = \frac{E \{e(n)^2\} - P_n}{P} \quad (4)$$

Dans le cadre de cette non stationnarité, on démontre dans [7] que dans le cas d'une entrée  $x$  iid et d'un bruit  $n$  iid et d'un filtre système de longueur  $L_f$  que, quelque soit le degré de non stationnarité, l'EQMR s'exprime par :

$$EQMR(\nu) = \frac{1}{2-\nu} \left[ \nu + \frac{L_F \delta}{\nu} \right] \quad (5)$$

ceci est obtenu quelque soit  $\nu = \mu L_F P_x$  le pas d'adaptation normalisé de l'algorithme LMS.

### 3.2. Analyse et performances d'un sous schéma d'identification adaptative

Dans tout ce qui suit, on considère une entrée  $x(k)$  et un bruit  $n(k)$  tous deux iid.

Chaque sous schéma d'identification se présente sous la forme d'un schéma d'identification classique ayant pour entrée  $x_i(k)$  et pour sortie  $y_i(k)$  bruitée par  $n_i(k)$ . C'est donc le sous système  $F_i(k) = P_i^{-1} F(k) P_i$  ( $P_i^{-1}$  est le filtre ayant pour fonction de transfert l'inverse de  $P_i$ ) que l'on identifie par  $\hat{F}_i(k)$ .

Lorsque le filtre système est constant ( $F(k) = F$ ), chacun des sous systèmes à identifier est encore  $F$ . Lorsque le filtre système évolue comme ici selon une promenade aléatoire, on peut écrire :

$$y_i(k) = F(k)^T X_i(k) + [\epsilon_i(k) + n_i(k)] \quad (6)$$

$$\text{avec } \epsilon_i(k) = \sum_{j=1}^{L_{P_i}-1} P_i(j) \sum_{l=0}^{j-1} \Omega(k-l)^T X(n-j)$$

Lorsque le nombre d'étage de décomposition est faible et lorsque  $\delta$  est petit, chaque sous schéma d'identification peut être approximé par un schéma d'identification classique ayant pour entrée  $x_i(k)$  corrélé, pour système à identifier  $F(k)$  bruité par  $n_i(k)$  corrélé aussi. Ce nouveau système se caractérise alors par le même degré de non stationnarité que le système original [11].

L'étude théorique complète d'un tel schéma ne peut être menée que pour les faibles pas d'adaptation. On a ainsi [10] :

$$EQMR_i(\nu_i) = \frac{1}{2} \left[ \nu_i + \frac{L_F \delta}{\nu_i} \right] \quad (7)$$

L'EQMR minimale  $\sqrt{L_F \delta}$  est obtenue alors pour  $\nu_i = \sqrt{L_F \delta}$ . Pour illustrer ces résultats, on considère un schéma d'identification par DMR à 1 étage (figure 3). On représente pour chacun des sous schéma, l'EQMR<sub>i</sub> en fonction de  $\nu_i$  ( $i = 0, 1$ ). La valeur critique de  $\nu_i$  qui conduit à la divergence de l'algorithme est toujours plus faible pour le sous schéma correspondant aux signaux détail (issus d'un filtrage passe haut, ici  $i = 0$ ). On constate que la courbe théorique (courbe en '-') est en accord avec les simulations pour de faibles degrés de non stationnarité et de faibles pas d'adaptation.

## 4. PERFORMANCES DU SCHEMA D'IDENTIFICATION PROPOSE

L'erreur globale est obtenue en faisant la somme des erreurs partielles. L'optimisation du schéma global est réalisée en



optimisant séparément chacun des sous schéma d'identification. En supposant nulle l'intercorrélation entre les erreurs partielles lorsque les différentes branches sont optimisées, l'EQMR minimale pour une décomposition à  $N$  étages s'écrit:

$$\begin{aligned} EQMR_{N\text{étages}}^{\min}(\nu_0^{\text{opt}}, \dots, \nu_N^{\text{opt}}) &= \sum_{i=0}^N \frac{P_{n_i}}{P_n} EQMR_i(\nu_i^{\text{opt}}) \\ &= \sqrt{L_F \delta} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{L_{P_i}-1} P_i(j)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

#### 4.1. Amélioration des performances pour un étage de décomposition

En utilisant les propriétés suivantes :

- $h(z) = z^{-(L_g-1)}g(-z^{-1})$ ,  $h'(z) = g(-z)$   
et  $g'(z) = z^{-(L_g-1)}g(z^{-1})$ .
- $\sum_{j=0}^{L_{P_i}-1} P_i(j)^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint P_i(z)P_i(z^{-1}) \frac{dz}{z}$
- $EQMR_{0\text{étage}}^{\min} = \sqrt{L_F \delta}$  (d'après l'équation 5 pour  $\delta$  faible et  $N = 0$  qui étage correspond au schéma d'identification classique).

on démontre que :

$$EQMR_{1\text{étage}}^{\min} = EQMR_{0\text{étage}}^{\min} - \frac{1}{2} \sqrt{L_F \delta} \sum_{j=0}^{L_{R_0}-1} R_0(j)^2 \quad (9)$$

où  $R_0(z) = g(z)g(-z)$  est le filtre passe bande issu du filtre ondelette passe bas  $g(z)$ .

Ce qui signifie alors que le schéma d'identification par DMR à 1 étage donne de meilleures performances que le schéma classique d'identification et que le terme d'amélioration des performances est égal à  $\sqrt{L_F \delta} \sum_{j=0}^{L_{R_0}-1} \frac{R_0(j)^2}{2}$ .

performances est égal à  $\sqrt{L_F \delta} \sum_{j=0}^{L_{R_0}-1} \frac{R_0(j)^2}{2}$ .

#### 4.2. Amélioration des performances en fonction du nombre d'étages de décomposition

Ce résultat peut être généralisé pour un nombre d'étages quelconque.

Soient  $P_i(z)$  ( $i = 0, \dots, N$ ), les filtres relatifs à une décomposition à  $N$  étages et soient  $P'_i(z)$  ( $i = 0, \dots, N+1$ ), les filtres relatifs à une décomposition à  $N+1$  étages. D'après les propriétés précédemment utilisées, on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{L_{P'_i}-1} P'_i(j)^2 = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{L_{P_k}-1} P_k(j)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{L_{R_N}-1} R_N(j)^2 \quad (10)$$

avec  $R_N(z) = R_0(z^{2^N})P_N(z)$

Ce qui permet d'écrire, lorsqu'on passe d'une décomposition à  $N$  étages vers une décomposition à  $N+1$  étages que :

$$EQMR_{N+1\text{étages}}^{\min} = EQMR_{N\text{étages}}^{\min} - \frac{1}{2} \sqrt{L_F \delta} \sum_{j=0}^{L_{R_N}-1} R_N(j)^2 \quad (11)$$

On peut alors conclure que pour la non stationnarité considérée (promenade aléatoire et faible degré de non stationnarité), le schéma d'identification par DMR proposé donne de meilleures performances que le schéma d'identification classique et que l'on améliore les performances à mesure que le nombre d'étages de décomposition augmente.

Ceci est illustré dans la figure 4, les simulations comparatives sont présentées de la manière suivante: pour un nombre d'étages de décomposition donné, on fixe le pas d'adaptation optimal relatif aux signaux détails et on représente l'EQMR du schéma global en fonction du pas d'adaptation relatif au signal utile (issu de l'opérateur  $P_N$  passe bas).

Cette conclusion démontrée pour  $\delta$  faible est illustrée pour une grande plage de variations de  $\delta$  sur la figure 5.

La borne limite de l'EQMR obtenue avec le schéma d'identification par DMR dépend à la fois du nombre d'étages de décomposition et des propriétés spectrales des opérateurs de la décomposition.

## 5. CONCLUSION

A partir de l'idée de base selon laquelle l'analyse multirésolution s'adapte bien pour le traitement de la non stationnarité d'un signal, nous avons proposé un schéma original d'identification adaptative d'un système non stationnaire basé sur la décomposition multirésolution des signaux entrée et sortie du système. Pour de faibles degrés de non stationnarité et de faibles pas d'adaptation, l'approche linéaire de la décomposition a permis de montrer la supériorité de ce schéma sur le schéma classique dans le cas de l'identification d'un système non stationnaire de type promenade aléatoire. La capacité de poursuite du schéma proposé augmente avec le nombre d'étages de décomposition.

## 6. RÉFÉRENCES

- [1] J. Shynk, "Frequency Domain and Multirate Adaptive Filtering", IEEE on Signal Processing Magazine", January 1992.
- [2] C. Van den Branden Lambrecht, M. Karrakchou, "Subband Adaptive Filtering: The Mutual Wavelet Packets Approach", ICASSP 93, pp. 316-319.
- [3] A. Gilloire, M. Vetterli, "Adaptive Filtering in Subbands With Critical Sampling: Analysis, Experiments, and Applications to Echo Cancellation", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol-40, N° 8, pp. 1862-1875.
- [4] N. Erdol, F. Basbug, "Performance of Wavelet Transform Based Adaptive Filters", ICASSP 93, pp. III 500-503.
- [5] S. Hosur, A.H. Tewfik, "Wavelet Transform Domain LMS Algorithms", ICASSP 93, pp. 500-503.
- [6] M. de Courville, P. Duhamel, "Adaptive Filtering in Subbands Using a Weighted Criterion", ICASSP 95, pp. 985-988.
- [7] O. Macchi, "LMS Adaptive Processing with Applications in Transmission", Wiley. 1994.



- [8] S. Wada, "A Linear Operator Approach for Designing Multirate Filter Banks", EUSIPCO-94, pp. 327-330.
- [9] M. Turki, O. Macchi, M. Jaidane, "Non Stationnarités Markoviennes Rapides et Filtrage Adaptatif", 14ème Colloque GRETSI, Juan les Pins, 13-16 Septembre 1993.
- [10] F. Michaut "Méthodes adaptatives pour le signal", Collection Traitement du Signal, Hermès 1992.
- [11] S. Ben Jebara, "Identification Adaptative d'un Système Non Stationnaire par Décomposition Multirésolution", Rapport interne L.S.Télécoms, avril 1995.

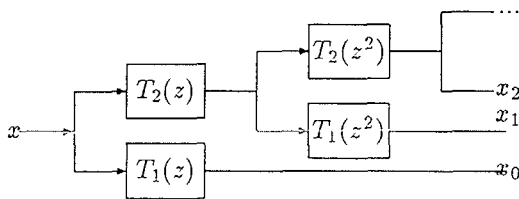


FIG. 1 - Schéma de DMR pyramidale et dyadique

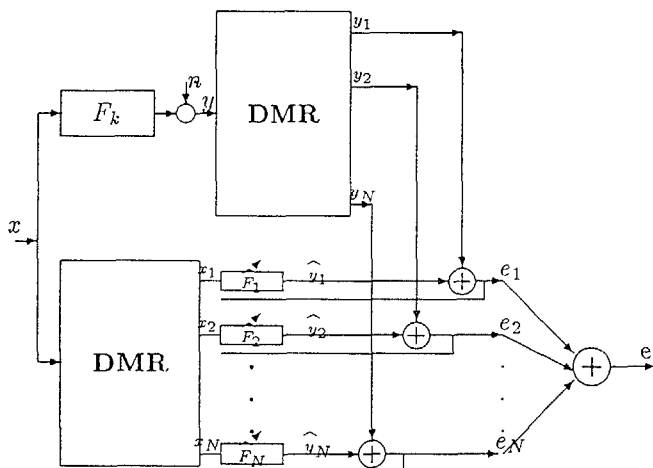


FIG. 2 - Schéma d'identification par DMR

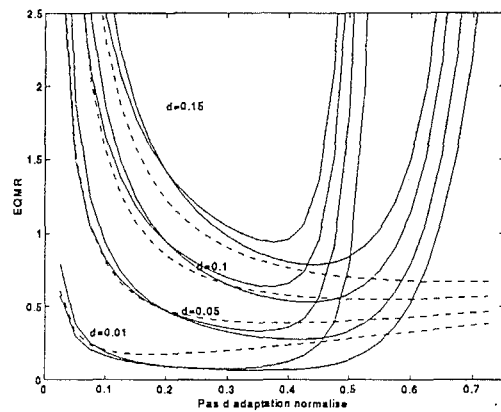


FIG. 3 - Evolution de l'EQMR partielle relative à chaque sous schéma en fonction du pas d'adaptation pour différents  $\delta$  (qu'on note ici 'd').

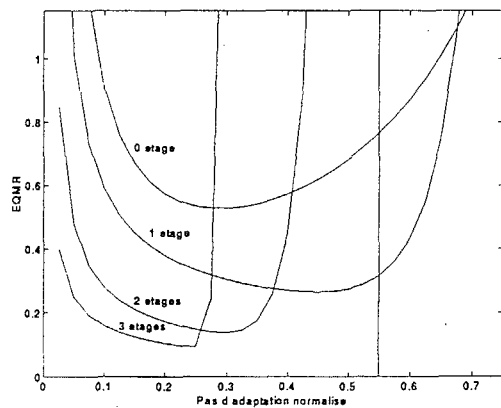


FIG. 4 - Influence du pas d'adaptation sur les performances du schéma d'identification classique et par DMR pour différents étages de décomposition ( $\delta = 0.05$ )

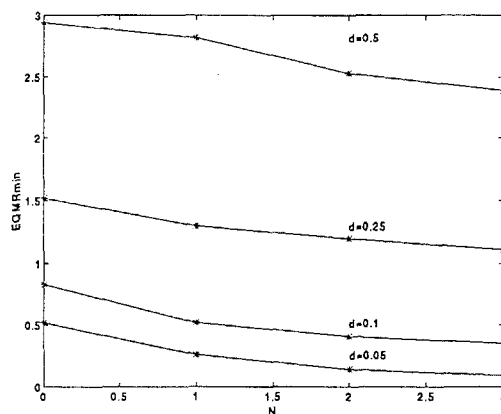


FIG. 5 - Evolution de l'EQMR globale minimale en fonction du nombre d'étages de décomposition N pour différents degrés de non stationnarités