



## APPLICATION DE L'ALGORITHME QR RAPIDE SYSTOLIQUE A L'ANNULATION D'ECHO

*M. Terré<sup>1</sup>, M. Bellanger<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Thomson CSF / CNI, 160 Boulevard de Valmy, Parc d'activité Kléber, 92704 Colombes Cedex, France.

<sup>2</sup> Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue St-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France.

Cet article rappelle d'abord l'algorithme des moindres carrés basé sur la décomposition QR de la matrice des échantillons du signal. Il souligne les problèmes liés à l'utilisation de cet algorithme dans le cadre de l'annulation d'écho et s'intéresse en particulier au cas des passages de double parole. L'article présente une méthode pour traiter ce problème ainsi qu'une solution pour récupérer le filtre transversal correspondant aux paramètres de l'algorithme.

First, the fast least squares algorithm based on the QR decomposition technique is reviewed. Then, the problem of double talk in echo cancellation is dealt with. A modification of the algorithm is proposed, as well as means to derive the transversal filter corresponding to the parameters of the algorithm.

### 1. Introduction

Parmi les algorithmes de moindres carrés rapides, les approches QR [1] utilisent essentiellement des opérations de rotation et sont réputées pour leur très grande stabilité numérique. Cependant, leur emploi est parfois freiné par le caractère inhabituel de certaines variables qu'ils propagent ainsi que par la manière mixte qu'ils ont de mélanger les opérations de filtrage et de mise à jour des coefficients du filtre. Ces particularités sont dues au fait que ces algorithmes ne sont pas basés sur des erreurs a priori ou a posteriori mais sur des erreurs mixtes égales à la racine carrée de l'erreur a priori par l'erreur a posteriori. Cette particularité se rencontre également dans l'algorithme du treillis normalisé, ce qui explique les équivalences préalablement exposées entre ces deux approches [2].

Cet article va développer le cas de l'annulation d'écho et, plus précisément, s'intéresser aux passages de double parole pour lesquels il faut pouvoir continuer à filtrer un signal tout en bloquant l'adaptation des coefficients du filtre. Le mélange du filtrage et de l'adaptation rencontré dans les algorithmes QR ne peut alors pas convenir. Il va être montré de quelle manière il faut procéder pour pouvoir utiliser malgré tout un algorithme QR rapide dans ce type d'application. La récupération du filtre transversal est aussi un sujet d'intérêt dans de nombreux domaines. La manière la plus simple pour y parvenir consiste simplement à verrouiller l'adaptation des coefficients, à injecter un dirac à l'entrée du filtre et à lire la réponse impulsionnelle

en sortie. Encore une fois, le mélange de l'adaptation et du filtrage doit être résolu pour y parvenir.

L'article va rappeler un algorithme QR rapide normalisé [3]. Les variables propagées vont être détaillées. Le cas de l'annulation d'écho sera ensuite abordé et la modification à apporter à l'algorithme sera présentée. Enfin, la récupération du filtre transversal sera développée.

### 2. Equations de l'algorithme QR rapide systolique

Les équations de l'algorithme sont rappelées dans ce paragraphe. Le signal d'entrée, noté  $x(t)$ , est d'abord normalisé à travers la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_{b0}(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & -\sin \psi(t) \\ \sin \psi(t) & \cos \psi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \sqrt{E_{b0}(t-1)} \end{pmatrix} \quad (1.)$$

$\sin \psi(t)$  représente alors  $x(t)$  normalisé.

L'erreur de prédiction avant mixte (racine de l'erreur a priori par l'erreur a posteriori) normalisée  $e_{aqN}(t)$  est ensuite propagée à travers la relation :

$$\begin{pmatrix} e_{aqN}(t) \\ X_{qN}(t) \end{pmatrix} = Q_{\theta}(t-1) \begin{pmatrix} \sin \psi(t) \\ \cos \psi(t) X_{qN}(t-1) \end{pmatrix} \quad (2.)$$



Comme il a été précisé en introduction, cette relation permet aussi de mettre à jour le vecteur  $X_{qN}(t)$  des coefficients de prédiction de l'erreur avant mixte normalisée à partir des erreurs arrières mixtes normalisées  $\sin\theta_i(t-1)$ .

Ensuite, l'équation :

$$Q_{\alpha}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{qN}(t) \\ \sqrt{E_{aN}(t)} \end{pmatrix} \quad (3.)$$

permet de mettre à jour les termes  $\sin\alpha_i(t)$  qui sont les coefficients de prédiction de l'erreur arrière normalisée en fonction de l'erreur avant mixte normalisée.

Puis l'équation :

$$\begin{pmatrix} g_{N+1}(t) \\ G_N(t) \end{pmatrix} = Q_{\alpha}(t) \begin{pmatrix} G_N(t-1) \\ \gamma_N(t-1) \frac{e_{aqN}(t)}{\sqrt{E_{aN}(t)}} \end{pmatrix} \quad (4.)$$

permet de mettre à jour le vecteur  $G_N(t)$  d'erreurs normalisées arrières a posteriori.

L'équation :

$$\begin{pmatrix} \gamma_N(t) \\ G_N(t) \end{pmatrix} = Q_{\theta}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.)$$

permet ensuite de mettre à jour les erreurs arrières normalisées mixtes  $\sin\theta_i(t)$  et de propager les termes  $\gamma_i(t)$ , racines des ratios des erreurs a posteriori sur les erreurs a priori.

Enfin, le filtrage est réalisé à travers l'équation :

$$\begin{pmatrix} e_{qN}(t) \\ Y_{qN}(t) \end{pmatrix} = Q_{\theta}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ \sqrt{\lambda} Y_{qN}(t-1) \end{pmatrix} \quad (6.)$$

dans laquelle l'erreur de filtrage mixte  $e_{qN}(t)$  est propagée. Le vecteur  $Y_{qN}(t)$  des coefficients de prédiction de  $y(t)$  à partir de la base de prédiction arrière mixte normalisée est aussi propagé à travers cette équation.

L'erreur de filtrage a posteriori est enfin obtenue grâce à l'équation :

$$\varepsilon_N(t) = \gamma_N(t) e_{qN}(t) \quad (7.)$$

L'ensemble des équations (1-7) forme l'algorithme QR rapide systolique. L'algorithme complet est précisé table I.

### 3. Application à l'annulation d'écho

Dans le domaine de l'annulation d'écho il arrive fréquemment que le signal de référence  $y(t)$  ne soit plus fiable ou plus disponible. C'est en particulier le cas lors des passages de double parole [4][5]. Les algorithmes de moindres carrés

transverses font clairement apparaître une équation de filtrage du type :

$$\varepsilon(t) = y(t) - X_N^T(t) H_N(t) \quad (8.)$$

#### Initialisation pour $t = -1$

$$E_{b0}(-1) = 0.001$$

pour  $i = 0$  à  $N-1$

$$\cos\theta_{i+1}(-1) = 1, \sin\theta_{i+1}(-1) = 0$$

$$\cos\alpha_{i+1}(-1) = 1, \sin\alpha_{i+1}(-1) = 0$$

$$x_{q(i+1)}(-1) = 0, y_{q(i+1)}(-1) = 0, g_{i+1}(-1) = 0$$

$$\gamma_{i+1}(-1) = 1$$

#### Algorithme pour $t \geq 0$

$$\sqrt{E_{a0}(t)} = 1$$

$$\gamma_0(t) = 1$$

$$E_{b0}(t) = \lambda E_{b0}(t-1) + x^2(t)$$

$$\sin\psi(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{E_{b0}(t)}}, \cos\psi(t) = \sqrt{1 - \sin^2\psi(t)}$$

$$e_{aq_0}(t) = \sin\psi(t), g_1(t) = \sin\psi(t)$$

$$e_{q_0}(t) = y(t)$$

pour  $i = 0$  à  $N-1$

$$e_{aq(i+1)}(t) = \cos\theta_{i+1}(t-1) e_{aq_i}(t)$$

$$- \sin\theta_{i+1}(t-1) \cos\psi(t) x_{q(i+1)}(t-1)$$

$$x_{q(i+1)}(t) = \sin\theta_{i+1}(t-1) e_{aq_i}(t)$$

$$+ \cos\theta_{i+1}(t-1) \cos\psi(t) x_{q(i+1)}(t-1)$$

$$\sin\alpha_{i+1}(t) = \frac{x_{q(i+1)}(t)}{\sqrt{E_{ai}(t)}}, \cos\alpha_{i+1}(t) = \sqrt{1 - \sin^2\alpha_{i+1}(t)}$$

$$\sqrt{E_{a(i+1)}}(t) = \cos\alpha_{i+1}(t) \sqrt{E_{ai}(t)}$$

$$g_{i+2}(t) = \cos\alpha_{i+1}(t) g_{i+1}(t-1)$$

$$- \sin\alpha_{i+1}(t) \gamma_{i+1}(t-1) \frac{e_{aq(i+1)}(t)}{\sqrt{E_{a(i+1)}}(t)}$$

$$\sin\theta_{i+1}(t) = \frac{g_{i+1}(t)}{\gamma_i(t)}, \cos\theta_{i+1}(t) = \sqrt{1 - \sin^2\theta_{i+1}(t)}$$

$$\gamma_{i+1}(t) = \gamma_i(t) \cos\theta_{i+1}(t)$$

$$e_{q(i+1)}(t) = \cos\theta_{i+1}(t) e_{q_i}(t)$$

$$- \sin\theta_{i+1}(t) \sqrt{\lambda} y_{q(i+1)}(t-1)$$

$$y_{q(i+1)}(t) = \sin\theta_{i+1}(t) e_{q_i}(t)$$

$$+ \cos\theta_{i+1}(t) \sqrt{\lambda} y_{q(i+1)}(t-1)$$

$$\varepsilon_N(t) = \gamma_N(t) e_{qN}(t)$$

Table I - Algorithme QR rapide systolique -



ainsi qu'une équation d'adaptation :

$$H_N(t) = H_N(t-1) + G_N(t)e_N(t) \quad (9.)$$

Avec de telles approches, il est aisé de bloquer l'adaptation du filtre, il suffit de ne pas effectuer l'équation (9.).

Pour l'algorithme QR rapide l'adaptation et le filtrage sont réalisés conjointement par l'équation (6.).

La solution proposée consiste à :

- 1) Estimer une valeur prédite:  $\hat{y}(t)$  de la valeur manquante :  $y(t)$ .
- 2) Adapter le vecteur filtre  $Y_{qN}(t)$  avec cette valeur prédite.

Pour prédire  $y(t)$  il suffit de calculer  $e_{qN}(t)$  avec 0 à la place de  $y(t)$  en utilisant la relation :

$$\begin{pmatrix} e_{qN}^*(t) \\ Y_{qN}^*(t) \end{pmatrix} = Q_{\theta}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\lambda} Y_{qN}(t-1) \end{pmatrix} \quad (10.)$$

Il vient alors :

$$\hat{y}(t) = -\frac{e_{qN}^*(t)}{\gamma_N(t)}$$

L'adaptation du vecteur filtre est alors réalisée grâce à la relation :

$$\begin{pmatrix} e_{qN}(t) \\ Y_{qN}(t) \end{pmatrix} = Q_{\theta}(t) \begin{pmatrix} \hat{y}(t) \\ \sqrt{\lambda} Y_{qN}(t-1) \end{pmatrix} \quad (11.)$$

Les équations de la procédure de traitement des passages de double parole sont résumées table II.

$e_{q0}(t) = 0$ <p>pour <math>i = 0</math> à <math>N-1</math></p> $e_{q(i+1)}^*(t) = \cos\theta_{i+1}(t)e_{qi}^*(t) - \sin\theta_{i+1}(t)\sqrt{\lambda}y_{q(i+1)}(t-1)$ $\hat{y}(t) = -\frac{e_{qN}^*(t)}{\gamma_N(t)}$ $e_{q0}(t) = \hat{y}(t)$ <p>pour <math>i = 0</math> à <math>N-1</math></p> $e_{q(i+1)}(t) = \cos\theta_{i+1}(t)e_{qi}(t) - \sin\theta_{i+1}(t)\sqrt{\lambda}y_{q(i+1)}(t-1)$ $y_{q(i+1)}(t) = \sin\theta_{i+1}(t)e_{qi}(t) + \cos\theta_{i+1}(t)\sqrt{\lambda}y_{q(i+1)}(t-1)$
--

Table II - Section de filtrage dans le cas de double parole -

#### 4. Résultats de simulations

Une simulation a été conduite avec un signal d'entrée  $x(t)$ , égal à un bruit blanc gaussien centré de variance unité et avec un signal de référence  $y(t)$ , égal au filtrage du bruit blanc  $x(t)$  par un filtre à réponse impulsionnelle finie :

$$y(t) = 0.8x(t) + 0.2x(t-1)$$

Après 10000 itérations et durant 30000 itérations une deuxième parole apparaît. Le principe de verrouillage de l'adaptation a été appliqué. La figure 1 ci dessous représente les coefficients du filtre estimés à partir des paramètres de l'algorithme rapide.

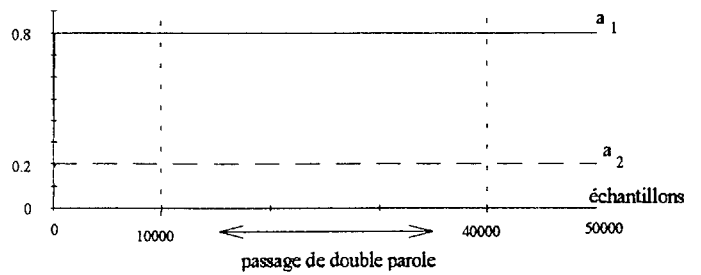


figure 1 - Evolution du filtre reconstruit pendant un passage de double parole -

La figure 2 ci-dessous représente le résidu d'écho :

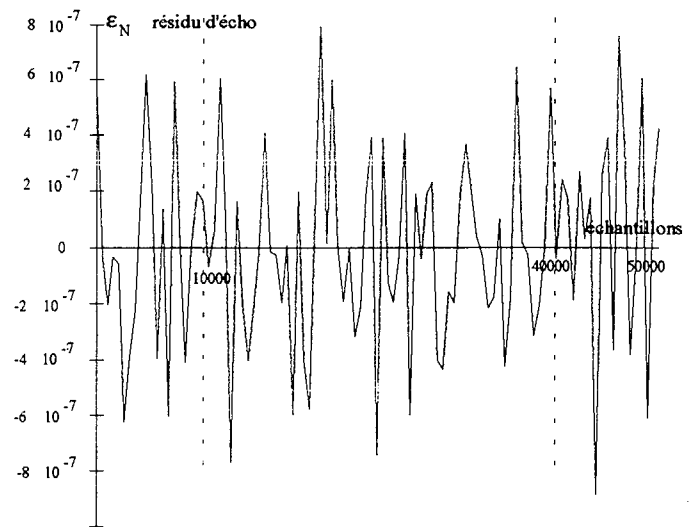


figure 2 - Evolution du résidu d'écho pendant un passage de double parole -

Aucune variation des coefficients du filtre transversal équivalent n'est observée entre les itérations 10000 et 30000. De même, aucune augmentation du résidu d'écho n'est observée pendant ce passage de double parole.

#### 5. Récupération du filtre transversal

Dans certaines applications, il est parfois important de pouvoir reconstituer les coefficients du filtre transversal utilisé. L'approche QR ne propageant pas explicitement ce filtre la solution la plus simple pour l'identifier consiste simplement à identifier sa réponse impulsionnelle.



Il faut donc injecter un dirac  $\delta(t)$  dans le filtre et bloquer l'adaptation. Il a été précisé dans le paragraphe 2 que les coefficients de prédiction étaient représentés par les vecteurs  $X_{qN}(t)$ ,  $Y_{qN}(t)$  et par les termes  $\sin \alpha_i(t)$ . Le verrouillage de l'adaptation consiste à ne pas mettre à jour ces quantités. Les équations permettant de récupérer le filtre transversal sont résumées table III.

<p><b>Initialisation</b> <math>t = T</math>  pour <math>i = 1</math> à <math>N</math>  <math>\cos \theta_i(T) = 1</math>, <math>\sin \theta_i(T) = 0</math>  <math>g_{i+1}(T) = 0</math></p> <p><b>Algorithme pour</b> <math>t = T+1</math> à <math>T+N</math>  <math>x(t) = \delta(t-T-1)</math>  <math>y(t) = 0</math></p> $\sin \psi(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{E_{b0}(T)}}, \cos \psi(t) = \sqrt{1 - \sin^2 \psi(t)}$ $e_{aq_0}(t) = \sin \psi(t), g_1(t) = \sin \psi(t)$ $e_{q_0}(t) = y(t)$ <p>pour <math>i = 0</math> à <math>N-1</math>  <math display="block">e_{aq(i+1)}(t) = \cos \theta_{i+1}(t-1)e_{aq_i}(t) - \sin \theta_{i+1}(t-1)\cos \psi(t)x_{q(i+1)}(T)</math> <math display="block">g_{i+2}(t) = \cos \alpha_{i+1}(T)g_{i+1}(t-1) - \sin \alpha_{i+1}(T)\frac{e_{aq(i+1)}(t)}{\sqrt{E_{a(i+1)}(T)}}</math> <math display="block">\sin \theta_{i+1}(t) = g_{i+1}(t), \cos \theta_{i+1}(t) = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{i+1}(t)}</math> <math display="block">e_{q(i+1)}(t) = \cos \theta_{i+1}(t)e_{q_i}(t) - \sin \theta_{i+1}(t)\sqrt{\lambda}y_{q(i+1)}(T)</math> <math display="block">h_{t-T}(T) = e_{qN}(t)</math></p>
--

Table III - Récupération du filtre transversal -

## 6. Résultats de simulations

Une première simulation a été conduite avec les signaux suivants :

$$y(t) = v(t) + 0.9v(t-1) + 0.8v(t-2)$$

$$x(t) = v(t)$$

expressions dans lesquelles  $v(t)$  représente un bruit blanc gaussien centré de variance unité.

Au bout de 150 itérations, le facteur d'oubli étant choisi égal à 1, la procédure de reconstruction du filtre transversal d'ordre 3 a donné le filtre  $H_3(150)$  suivant :

$$H_3^T(150) = [0.995 \quad 0.896 \quad 0.795]$$

Une deuxième simulation correspondant à un cas de prédiction a été conduite avec les signaux suivants :

$$y(t) = \sin(2\pi 0.1t) + \cos(2\pi 0.345t)$$

$$x(t) = y(t-1)$$

Au bout de 150 itérations, le facteur d'oubli étant choisi égal à 1, la procédure de reconstruction du filtre transversal d'ordre 4 a donné le filtre  $H_4(150)$  suivant :

$$H_4^T(150) = [0.4863 \quad -0.1702 \quad 0.4862 \quad -0.9815]$$

L'extraction des zéros du polynôme :

$$1 - h_1(150)Z^{-1} - h_2(150)Z^{-2} - h_3(150)Z^{-3} - h_4(150)Z^{-4}$$

permet d'identifier les fréquences :

$$f_0 = 0.0998 \quad \text{et} \quad f_1 = 0.3454.$$

## 7. Conclusion

Si les algorithmes des moindres carrés rapides basés sur la décomposition QR sont reconnus pour leur grande stabilité numérique, leur emploi est parfois freiné par le caractère peu explicite de certaines variables qu'ils propagent. Cet article a tenté de préciser les significations de ces dernières et, fort de cet éclairage, a proposé une méthode pour traiter le problème des passages de double parole en annulation d'écho avec cet algorithme. Une solution pour récupérer le filtre transversal a aussi été présentée.

## 8. Bibliographie

- [1] S. Haykin, "Adaptive Filter Theory," 2nd Ed., Prentice Hall 1991.
- [2] P.A. Regalia and M.G. Bellanger, "On the duality between fast QR methods and lattice methods in least squares adaptive filtering," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol SP 39 n°4 pp 879-891, Apr. 1991.
- [3] M. Terré and M. G. Bellanger, "A systolic QRD based algorithm for adaptive filtering and its implementation," in *Proc. IEEE Int. Conf. Speech., Signal Processing*, Minneapolis, Apr. 1993.
- [4] M. L. Honig, "Echo Cancellation of Voiceband Data Signals Using Recursive Least Squares and Stochastic Gradient Algorithms," in *IEEE Trans on Communications*, Vol. COM-33, n°1, Jan1985.
- [5] T. Petillon, A. Gilloire and S. Theodoris, "The fast Newton transversal Filter: An Efficient Scheme for Acoustic Echo Cancellation in Mobile Radio," *IEEE trans on Signal Processing*, vol 42, N°3, pp 509-518, March 1994.