QUINZIEME COLLOQUE GRETSI - JUAN-LES-PINS - DU 18 AU 21 SEPTEMBRE 1995

Estimation du Propagateur au Quatrième Ordre.

A. Belouchrani, K.Abed-Meraim

Télécom Paris / CNRS URA 820 / GdR TdSI, 46 rue Barrault, 75634 PARIS
email: adel@sig.enst.fr

Résumé

Cet article introduit, dans le contexte de la localisation de sources, une nouvelle technique d'estimation du Propagateur à partir des statistiques d'ordre quatre. Le Propagateur est un opérateur linéaire qui dépend des paramètres de propagation et qui permet la détermination du sous-espace bruit sans aucune décomposition propre de la matrice interspectrale des signaux reçus. A la différence des techniques classiques d'estimation du Propagateur à partir des statistiques d'ordre deux, cette technique fournit un estimateur asymptotiquement non biaisé. Les performances asymptotiques de la méthode proposée ont été développées. Des simulations numériques illustrent la validité de la méthode dans des contextes difficiles.

Abstract

This contribution introduces, in the source localization context, a new estimation technique of the so-called Propagator operator from the fourth order statistics. The Propagator is a linear operator depending on the propagation parameters. It allows the *noise-subspace* determination without any eigendecomposition of the cross-spectral matrix of the received signals. In contrast to second order estimation methods of the Propagator operator, this method gives an asymptotically unbiased estimator. The performance of this method is assessed by deriving the asymptotic distribution of the DOA (i.e direction-of-arrivals) estimators. Several numerical simulations are presented to demonstrate the effectiveness of the method.

1 Introduction

Les techniques classiques de traitement d'antenne n'exploitent que les statistiques d'ordre deux des signaux reçus sur les capteurs d'une antenne. Cette restriction n'est justifiée que dans un contexte gaussien où les statistiques d'ordre deux décrivent complètement les propriétés statistiques des signaux reçus. Mais dans beaucoup de cas pratiques, notamment en communications numériques, les signaux reçus ne sont pas gaussiens et donc contiennent de l'information dans leurs moments d'ordres supérieurs à deux. C'est dans ce sens que les techniques de traitement d'antenne d'ordre supérieur furent développées [1, 2]. En particulier les techniques basées sur les cumulants d'ordre quatre, présentent l'avantage d'avoir une capacité de détection théorique accrue et d'être asymptotiquement insensibles aux bruits gaussiens, et de ce fait ne nécessitent ni la modélisation ni l'estimation de la covariance du bruit.

Dans cet article, on s'intéressera à une méthode haute résolution d'estimation des directions d'arrivée des signaux reçus sur les capteurs d'une antenne. Cette méthode utilise un opérateur linéaire appelé Propagateur [3, 4] qui ne dépend pas des amplitudes complexes des sources mais seulement des paramètres de propagation. Cet opérateur repose sur un partitionnement de la matrice des vecteurs directionnels des sources [5]. En absence du bruit, la matrice de covariance se partitionne de la même façon que la matrice des vecteurs directionnels des sources. Le Propagateur est alors estimé à partir de la matrice de covariance par un simple processus des moindres carrés. Notre principale contribution est de montrer comment on peut estimer le Propagateur à partir des statistiques d'ordre quatre.

2 Modèle des données

Considérons une antenne composée de m capteurs identiques, alignés et équidistants d'une distance d. Soient n ($n < m$) fronts d'onde plans à bande étroite autour de la fréquence f_0, incidents sur l'antenne et provenant de sources dans les directions $\{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$. Le signal reçu à l'instant t noté $\mathbf{x}(t)$ est un vecteur complexe $(m \times 1)$ qui s'écrit alors :

$$\mathbf{x}(t) = U\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}(\theta_i) s_i(t) + \mathbf{b}(t) \qquad (1)$$

où $\mathbf{s}(t)$ est un vecteur $(n \times 1)$ complexe dont la i-iéme composante $s_i(t)$ est l'enveloppe du signal analytique émis par la i-iéme source et $U = [\mathbf{u}(\theta_1), \cdots, \mathbf{u}(\theta_n)]$ est la matrice source de dimensions $(m \times n)$ constituée par des vecteurs sources $\mathbf{u}(\theta_i)$ définis à la fréquence centrale comme :

$$\mathbf{u}(\phi_i) = [1, e^{j\phi_i}, \cdots, e^{j(m-1)\phi_i}]^T, \qquad (2)$$

avec $\phi_i = \frac{2\pi f_0}{c} d \sin(\theta_i)$ et c étant la célérité de l'onde reçue, (le symbole ^{T} indique la transposée). $\mathbf{b}(t)$ est un vecteur complexe de bruits gaussiens non corrélés avec les sources. Les signaux et le bruit sont des processus stochastiques stationnaires supposés complexes circulaires, ce qui signifie que :

$$E[x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}, x^{j_1}, \cdots, x^{j_s}] = 0 \quad si \quad s \neq r \qquad (3)$$

où x_j (resp. x^j) représente la j-iéme composante de $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{x}^*$) (le symbole * indique la transposée conjuguée pour un vecteur).

3 La méthode du Propagateur

Dans cette méthode, les vecteurs directionnels des sources en bande étroite $\mathbf{u}(\theta_i)$ ainsi que la matrice source U sont partitionnés comme suit :

$$\mathbf{u}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{y}_i \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} V \\ Y \end{bmatrix}, \tag{4}$$

les vecteurs $\mathbf{x}_i$ et la matrice carrée X ayant un nombre de lignes égal au nombre n des sources. Les vecteurs directionnels $\mathbf{x}_i$ correspondant aux n premiers capteurs sont supposés linéairement indépendants. Le Propagateur P est alors l'opérateur linéaire de dimension $n \times (m-n)$ défini par

$$P^H = YV^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{y}_i = P^H \mathbf{v}_i, \; \forall i \tag{5}$$

De (5) et (4), on obtient

$$Q^H U = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad Q^H \mathbf{u}(\theta_i) = 0, \; \forall i \tag{6}$$

avec

$$Q^H = [P^H \quad -I] \tag{7}$$

I étant la matrice identité de dimension $(m-n)$ (le symbole ^{H} indique la transposée conjuguée pour une matrice). Les $(m-n)$ colonnes linéairement indépendantes de Q sont orthogonales aux vecteurs sources. Elles engendrent donc le sous-espace bruit. Une fois le sous-espace bruit déterminé à partir du Propagateur, les directions d'arrivée sont données comme les arguments des minima de la fonction de localisation suivante :

$$f(\theta) = \mathbf{u}(\theta)^* Q Q^H \mathbf{u}(\theta) = ||Q^H \mathbf{u}(\theta)||^2, \tag{8}$$

avec $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $||.||$ désignant la norme euclidienne.

En Absence de bruit, la définition (5) implique que l'on peut extraire le Propagateur directement de la matrice de covariance des signaux capteurs

$$R \triangleq E[\mathbf{x}\mathbf{x}^*] = U R_s U^H = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

suivant

$$R_2 = P^H R_1 \tag{10}$$

où R_s est la matrice de covariance des signaux sources, R, R_1 et R_2 sont des matrices de dimensions respectives $m \times m$, $n \times m$ et $(m-n) \times m$.

En présence de bruit, la relation (10) n'est plus vérifiée mais on peut procéder par les moindres carrés en cherchant l'estimée de P qui minimise la norme de Frobenius de $R_2 - P^H R_1$, on a alors

$$P^H = R_2 (R_1^H R_1)^{-1} R_1^H \tag{11}$$

L'estimateur du Propagateur fournit par la relation (11) n'est pas consistant, de plus pour des rapports signal à bruit faibles les performances de la méthode du Propagateur sont sérieusement affectées.

4 Estimation du Propagateur à partir des statistiques d'ordre 4

Statistiques d'ordre 4

Sous les l'hypothèses de circularité (3) et de non-gaussianité des signaux sources, les moments d'ordres deux et quatre sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_i^j &= E[x_i x^j] \\ \mu_{i\ l}^{j\ k} &= E[x_i x^j x^k x_l] \end{aligned}$$

les cumulants d'ordre quatre sont alors définis par :

$$\begin{aligned} Q_{i\ l}^{j\ k} &= Cum[x_i, x^j, x^k, x_l] \\ Q_{i\ l}^{j\ k} &= \mu_{i\ l}^{j\ k} - \mu_i^k \mu_l^j - \mu_i^j \mu_l^k \end{aligned}$$

L'ensemble des quantités à 4 indices $Q_{i\ l}^{j\ k}$ définissent un tenseur (2,2) [6]. Ce tenseur $\mathbf{Q}$ est appelé Quadricovariance des signaux capteurs [1]. De la même façon, on définie la Quadricovariance $\mathbf{K}$ des sources par :

$$K_{\alpha\ \delta}^{\beta\ \gamma} = Cum[s_\alpha, s^\beta, s^\gamma, s_\delta] \tag{12}$$

On désignera par u_i^α (resp. $\bar{u}_\alpha^i$) la i-iéme composante du vecteur source associée à la direction θ_α, i.e. $\mathbf{u}(\theta_\alpha)$ (resp. $\mathbf{u}^*(\theta_\alpha)$). En utilisant ces conventions et grâce aux propriétés de multilinéarité et d'additivité des cumulants ainsi que la nullité des cumulants d'ordre supérieur à deux des variables gaussiennes, on obtient directement :

$$Q_{i\ l}^{j\ k} = u_i^\alpha \bar{u}_\beta^j \bar{u}_\gamma^k u_l^\delta K_{\alpha\ \delta}^{\beta\ \gamma} \tag{13}$$

où on a utilisé la convention d'Einstein qui consiste à sommer sur les même indices apparaissant en haut et en bas. La Quadricovariance contractée est une matrice C obtenue en sommant sur un indice de bas et un indice de haut des éléments de la Quadricovariance des signaux capteurs, selon :

$$c_i^j = \sum_{k=1}^{m} Cum[x_i, x^j, x^k, x_k] = Q_{i\ k}^{j\ k} \tag{14}$$

où les c_i^j sont les éléments de la matrice C. Cette sommation particulière sur les indices est appelée *contraction* dans la terminologie des tenseurs, d'où le nom donné à la matrice C. En substituant la Quadricovariance des signaux capteurs donnée par l'équation (13) dans l'expression précédente, il vient :

$$\begin{aligned} c_i^j &= u_i^\alpha \bar{u}_\beta^j \bar{u}_\gamma^k u_k^\delta K_{\alpha\ \delta}^{\beta\ \gamma} & (15) \\ &= u_i^\alpha (\bar{u}_\gamma^k u_k^\delta K_{\alpha\ \delta}^{\beta\ \gamma}) \bar{u}_\beta^j & (16) \end{aligned}$$

Cette expression peut être exprimée sous la forme du produit de trois matrices :

$$C = UZU^H \tag{17}$$

où Z est une matrice hermitienne de dimension $(n \times n)$ et d'éléments z_i^j définies par :

$$z_i^j = K_{i\ \delta}^{j\ \gamma} \bar{u}_\gamma^k u_k^\delta \tag{18}$$

Estimation du Propagateur

La Quadricovariance contractée a une structure similaire à celle qu'aurait la matrice de covariance en l'absence du bruit. la matrice Z joue le même rôle que la matrice de covariance des signaux sources, toutefois cette dernière dépend des directions d'arrivée des sources contrairement à la matrice de covariance.

A partir du partitionnement de la matrice source et de la définition du Propagateur, on montre que la Quadricovariance contractée vérifie le même partitionnement que la matrice sources. En effet, en utilisant le partitionnement (5) de U et la relation (17), on obtient aisément

$$C = \begin{bmatrix} VZV^H & VZV^H P \\ P^H VZV^H & P^H VZV^H P \end{bmatrix}, \tag{19}$$

En posant

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

où C_1 et C_2 sont des matrices de dimensions respectives $n \times m$ et $(m-n) \times m$. On a :

$$C_2 = P^H C_1,$$

ce qui définit parfaitement le Propagateur. En pratique on ne dispose que d'une estimée $\hat{C}$ de C qui est donnée par (voir [2]) :

$$\hat{C} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^*\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^* - \hat{R}^2 - \hat{R}\ \mathrm{Trace}(\hat{R}) \tag{20}$$

où $\hat{R}$ est la covariance empirique des signaux capteurs. Dans ce cas le meilleur estimateur de P est donné au sens des moindre carrées par

$$\hat{P}^H = \hat{C}_2(\hat{C}_1^H \hat{C}_1)^{-1}\hat{C}_1^H \tag{21}$$

avec $\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix}$.

Contrairement à l'estimation du Propagateur à partir des statistiques d'ordre deux présentée dans la section 3, la technique proposée fournit un estimateur consistant (i.e. l'estimateur $\hat{P}$ converge en probabilité vers sa valeur exacte P).

5 Performances asymptotiques

Dans ce paragraphe, nous nous contentons de donner brièvement la démarche suivie pour l'analyse de performance et les résultats obtenus. Notre analyse de performance statistique est basée sur le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit S_T une séquence de matrices hermitiennes $m \times m$ estimant une statistique S donnée. Et soit $x_T = f(S_T)$ un estimateur, défini sur un voisinage U de S, du paramètre $x = f(S)$ ($x \in \mathbb{R}^k$). On suppose que :*

1. *La statistique S_T est asymptotiquement normale :*

$$\sqrt{T}(S_T - S) \rightarrow_{\mathrm{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma) \qquad \Sigma = (\Sigma_{ik}^{jl})_{1\le i,k\le m \quad 1\le j,l\le n}$$

2. *La fonction f est localement continue et différentiable au point S de différentielle $Df = [Df_1, \cdots, Df_k]$.*

Alors la séquence d'estimateurs x_T est asymptotiquement normale :

$$\sqrt{T}(x_T - x) \rightarrow_{\mathrm{L}} \mathcal{N}(0, \Delta) \qquad \Delta = Df * \Sigma * Df^T$$

$$\Delta_{ij} = Df_i(S)_\alpha^\beta \Sigma_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} Df_j(S)_\gamma^\delta \tag{22}$$

où f_i est la i-ième composante de f: $x_i = f_i(S)$.

La normalité asymptotique de la statistique utilisée, en l'occurrence ici la quadricovariance contractée C, est un résultat classique voir [6]. L'expression de sa covariance asymptotique Σ est donnée dans [7]. Ainsi pour vérifier toutes les conditions du théorème, nous avons montré la différentiabilité locale de la fonction reliant l'estimateur DOA à la statistique. L'expression exacte de la différentielle est donnée par:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial C} = A^H D_i Q Q^H + Q Q^H D_i A \tag{23}$$

où

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{-1}{2u'(\theta_i)^* Q Q^H u(\theta_i)}(u'(\theta_i)u(\theta_i)^* + u(\theta_i)u'(\theta_i)^*) \\ u'(\theta_i) &= \frac{\partial u(\theta_i)}{\partial \theta} \\ A &= \begin{bmatrix} -(C_1 C_1^H)^{-1} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'expression de la covariance asymptotique des DOA s'obtient finalement en remplaçant dans l'équation (22) l'expression de la covariance asymptotique Σ de la statistique C donnée dans [7] et celle de la différentielle donnée par l'équation (23) [1].

6 Simulations

On se place dans le cas d'une antenne à cinq capteurs équidistant d' une demi longueur d'onde. Le bruit additif est gaussien. On présente sur la figure 1 la localisation de trois sources qui sont situées à $\theta_1 = -15^o$, $\theta_2 = 0^o$ et $\theta_3 = 15^o$, pour un nombre d'échantillons T=512 et un rapport signal à bruit (RSB) de 0 dB. Dans ce cas, la méthode d'ordre quatre permet de localiser les 3 sources alors que la méthode d'ordre deux ne permet de localiser que 2 sources avec un biais très important. La figure 2 présente le cas de 2 sources situées à $\theta_1 = -8^o$ et $\theta_2 = 8^o$, pour un RSB=-2 dB. La méthode d'ordre deux ne permet pas la localisation des deux sources alors que la méthode proposée permet de localiser parfaitement les directions d'arrivée des sources. Sur la figure 3, on présente la validation expérimentale des performances asymptotiques que nous avons réalisé dans cet article, la variance de θ_1 est tracée en fonction du RSB pour $\theta_1 = -8^o$, $\theta_2 = 8^o$, 5 capteurs et 1000 échantillons. La variance empirique est estimée sur 500 réalisations. Cette figure montre une bonne correspondance entre les valeurs empiriques et les valeurs théoriques de la variance des DOA.

[1] Nous omettons ici de donner cette expression, vu la limitation de place et la complexité de la formule.

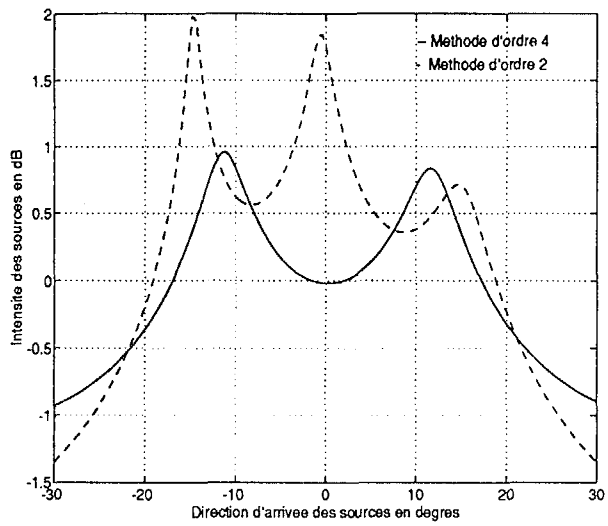

Figure 1. Localisation de trois sources : $\theta_1 = -15^o$, $\theta_2 = 0^o$, $\theta_3 = 15^o$, T=512 et RSB=0 dB

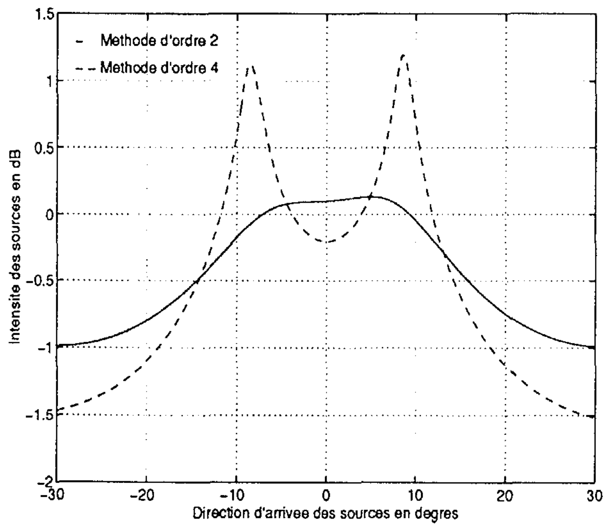

Figure 2. Localisation de deux sources : $\theta_1 = -8^o$, $\theta_2 = 8^o$, T=512 et RSB=-2 dB

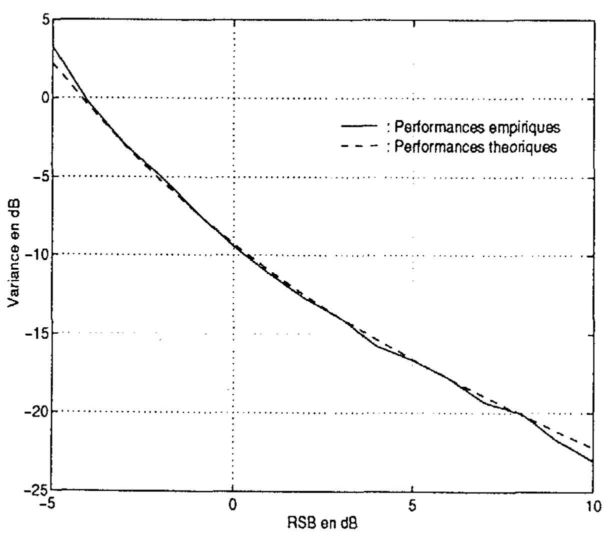

Figure 3. Variance de θ_1 en fonction du RSB : $\theta_1 = -8^o$ et $\theta_2 = 8^o$, T=1000 et 500 réalisations.

Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une technique nouvelle d'estimation du Propagateur à partir des statistiques d'ordre quatre. Contrairement à l'estimation du Propagateur à partir des statistiques d'ordre deux, la technique proposée fournit un estimateur consistant et asymptotiquement insensible au bruit gaussien. Ceci a été illustré par des simulations numériques montrant l'efficacité de la méthode proposée par rapport à celle d'ordre deux dans des contextes difficiles (faible RSB). Une analyse asymptotique des performances de la technique proposée a été présentée.

References

[1] J.-F. Cardoso, "Higher-order narrow band array processing," in *Proc. Int. Workshop on Higher-Order Stat., Chamrousse, France*, pp. 121–130, 1991.

[2] J.-F. Cardoso and E. Moulines, "Second-order versus fourth-order MUSIC algorithms. an asymptotical statistical performance analysis," in *Proc. Int. Workshop on Higher-Order Stat., Chamrousse, France*, pp. 121–130, 1991.

[3] J. Munier, "L'identification de fronts d'ondes corrélés et distordus," *Traitement du Signal*, vol. 4, no. 4, 1987.

[4] S. Marcos and M. Benidir, "Source bearing estimation and sensor positionning with the propagateur method," in *Proc. SPIE*, pp. 312–323, 1990.

[5] S. Marcos and J. Munier, "Source localization using a distorted antenna," in *Proc. ICASSP*, pp. 2756–2759, 1989.

[6] P. McCullagh, *Tensor Methods in Statistics*. Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, 1987.

[7] J.-F. Cardoso and E. Moulines, "Asymptotic performance analysis of direction-finding algorithms based on fourth-order cumulants.," *IEEE Tr. on SP*, vol. 43, pp. 214–224, Jan. 1995.