

Filtrage de Wiener adaptatif appliqué à la restauration d'images

Isabelle SURIN¹, Luc FETY²

¹Thomson TTD Optronique, rue Guynemer, 78283 GUYANCOURT

²Laboratoire d'Electronique, CNAM, 292, rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03

RÉSUMÉ

Certains systèmes d'acquisition d'images présentent des imperfections qui conduisent à des images floues et bruitées. Les approches classiques considèrent implicitement l'image comme un signal stationnaire et conduisent à un traitement constant qui, s'il rehausse les contours, amplifie fortement le bruit. D'autres approches, plus performantes tentent d'adapter le traitement au contenu local de l'image. Mais leur complexité généralement élevée rend leur mise en oeuvre difficile. Nous proposons dans cet article un développement formel du filtre de Wiener dans le cas non-stationnaire qui conduit naturellement à une technique de restauration adaptative performante et simple à mettre en oeuvre.

1 Introduction

Les systèmes d'acquisition d'images présentent des imperfections, dues notamment à la taille importante des détecteurs et à leurs dispersions ainsi qu'à l'ouverture de l'optique, qui conduisent à des images floues (affaiblissement important des hautes fréquences spatiales) et bruitées.

De nombreux chercheurs se sont intéressés au problème posé par de telles images et ont proposé des techniques de restauration.

Les approches qui considèrent implicitement l'image comme un signal stationnaire, conduisent à un traitement constant qui, s'il rehausse les contours, amplifie fortement le bruit, particulièrement dans les zones homogènes de l'image (zones de basses fréquences) [LB91].

Les autres approches, pour la plupart empiriques, tentent d'adapter le traitement au contenu local de l'image et sont souvent plus performantes. Mais leur complexité est généralement telle que leur mise en oeuvre temps réel est difficilement envisageable [GLT93] [GK87].

Nous proposons dans cet article un développement formel du filtre de Wiener dans le cas non-stationnaire qui conduit naturellement à une technique de restauration **adaptative** performante et simple à mettre en oeuvre.

ABSTRACT

Some acquisition image systems contain imperfections which lead to blurred and noisy images. Classical approaches implicitly treat the image as a stationary signal and lead to a constant processing which restores the contours but increase the noise. Other more performant approaches try to adapt the processing to the local content of the image. But they are generally so complex that they are difficult to implement. In this article, we propose a formal development of the Wiener filter in the non-stationary case which naturally leads to an adaptive restoration method which is both performant and easy to implement.

2 Modèle

Soit $G(\nu, \mu)$ le spectre de l'image observée, et $F(\nu, \mu)$ celui de l'image de la scène inconnue. F et G sont liés par la relation :

$$G(\nu, \mu) = H(\nu, \mu) \cdot F(\nu, \mu) + B(\nu, \mu)$$

où H est le filtre de dégradation, et B le bruit additif.

Le filtre de dégradation est supposé spatialement constant et connu. Il modélise les dégradations causées par l'optique (tache de diffraction) et par la taille importante des détecteurs (intégration spatiale). La Figure 1 représente la réponse en fréquence typique d'un filtre de dégradation. Le

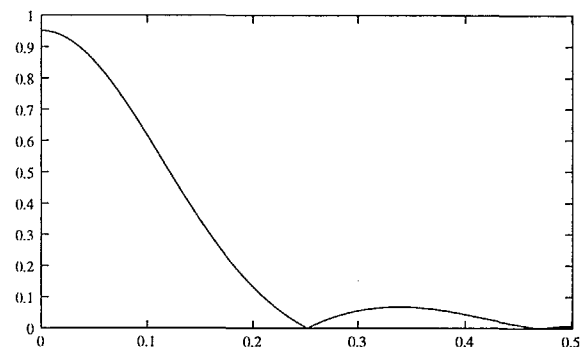


FIG. 1 - Réponse en fréquence du filtre de dégradation

bruit additif, engendré par le système d'acquisition peut être considéré comme gaussien, centré, spatialement blanc

3 Filtre de Wiener

Le filtre de Wiener est celui qui minimise le critère de l'erreur quadratique moyenne entre la scène et son estimée. Ce filtre apparaît comme un filtre inverse régularisé par le rapport signal à bruit :

$$K(\nu, \mu) = \frac{H^*(\nu, \mu)}{|H(\nu, \mu)|^2 + \frac{P_B(\nu, \mu)}{P_F(\nu, \mu)}}$$

D'autres méthodes de régularisation existent, mais elles sont difficiles à maîtriser car souvent empiriques.

4 Filtre de Wiener adaptatif

4.1 Principe

Le simple fait d'utiliser un filtre de Wiener différent dans les zones de contours et dans les zones uniformes améliore considérablement la restauration et met en évidence la nécessité de recourir à des techniques adaptatives. Lorsque le signal de scène n'est pas considéré comme stationnaire, l'approche de Wiener conduit naturellement à un traitement adapté au contenu local de l'image. Dans l'absolu, la mise en œuvre d'un filtre de Wiener adaptatif passe par l'estimation locale de la quantité $\frac{P_B(\nu, \mu)}{P_F(\nu, \mu)}$. Dans la mesure où la statistique du bruit est connue a priori, c'est $P_F(\nu, \mu)$ qui doit être estimé en remarquant que :

$$P_G(\nu, \mu) = |H(\nu, \mu)|^2 \cdot P_F(\nu, \mu) + P_B(\nu, \mu)$$

En profitant de cette expression et dans la mesure où $H(\nu, \mu) \neq 0 \quad \forall (\nu, \mu)^1$, le filtre de Wiener peut se mettre sous la forme d'un filtre inverse spatialement **constant** $H(\nu, \mu)^{-1}$ suivi d'un filtre **adaptatif** $H_A(\nu, \mu)$ dépendant du contenu local de l'image :

$$K(\nu, \mu) = H(\nu, \mu)^{-1} \cdot H_A(\nu, \mu)$$

avec $H_A(\nu, \mu) = \left(1 - \frac{P_B(\nu, \mu)}{P_G(\nu, \mu)}\right)$

L'expression de ce filtre adaptatif dans le domaine spatial est la suivante :

$$h_a(x, y) = \delta(x, y) - r_g^{-1}(x, y) * r_b(x, y)$$

où r_g^{-1} est une fonction discrète qui vérifie $r_g^{-1} * r_g = \delta(x, y)$, r_g étant la fonction d'autocorrélation locale de l'image observée. Conformément au modèle, la fonction de corrélation du bruit est définie de la façon suivante :

$$r_b(x, y) = \sigma_b^2 \cdot \delta(x, y) \quad \sigma_b^2 : \text{puissance du bruit}$$

le filtre adaptatif $h_a(x, y)$ peut alors s'exprimer sous forme vectorielle :

$$h_a = u - \sigma_b^2 \cdot R_g^{-1} \cdot u \quad \text{où} \quad u = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^T$$

1. Dans le cas contraire ($\exists (\nu, \mu) / H(\nu, \mu) = 0$), le filtre inverse peut être remplacé par un filtre de Wiener calculé en remplaçant la quantité $\frac{P_B(\nu, \mu)}{P_F(\nu, \mu)}$ par une quantité régularisante constante et très faible.



où R_g est la matrice d'autocorrélation associée à un vecteur signal contenant l'ensemble des pixels d'un voisinage situé autour du pixel en cours de restauration (masque de dimension $N_x N_y$). u est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles à l'exception d'une seule, égale à 1 et située à la même position que le pixel en cours de restauration dans le vecteur signal. La quantité $R_g^{-1} \cdot u$ apparaît, à un facteur $[u^T \cdot R_g^{-1} \cdot u]^{-1}$ près, comme un **filtre de blanchiment** basé sur un prédicteur linéaire. Il est d'ailleurs intéressant de reformuler le filtre adaptatif en faisant apparaître clairement ce prédicteur :

$$h_a = (1 - \sigma_b^2 \cdot [u^T \cdot R_g^{-1} \cdot u]) \cdot u + \sigma_b^2 \cdot [u^T \cdot R_g^{-1} \cdot u] \cdot h_p$$

h_p est un **filtre de prédiction linéaire au sens du maximum d'entropie** dont le but est de prédire le pixel en cours de restauration à partir de ses voisins.

$$h_p = - \frac{[I - u \cdot u^T] \cdot R_g^{-1} \cdot u}{u^T \cdot R_g^{-1} \cdot u}$$

Ce prédicteur varie avec le contenu local de l'image observée et la quantité $u^T \cdot R_g^{-1} \cdot u$ exprime sa qualité locale. En posant $\alpha = \sigma_b^2 \cdot [u^T \cdot R_g^{-1} \cdot u]$ il vient :

$$h_a = (1 - \alpha) \cdot u + \alpha \cdot h_p$$

et en définitive, on aboutit à la structure de traitement décrite par la Figure 2.

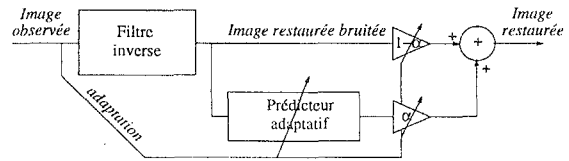


FIG. 2 - Structure de traitement adaptative

En résumé, il apparaît donc que le filtre de Wiener adaptatif peut se décomposer en un filtre inverse suivi d'un filtre spatialement adaptatif.

Le filtre inverse restaure parfaitement l'image de scène mais amplifie le bruit dans les zones fréquentielles où l'affaiblissement du signal causé par la caméra est important. Le filtre adaptatif module cette première correction en apportant une atténuation dans les zones spatio-fréquentielles où le niveau du signal utile est inférieur à celui du bruit.

4.2 Filtre inverse

Il s'agit d'un filtre qui présente une réponse en fréquence qui est exactement l'inverse de celle qui caractérise la dégradation. Cependant, pour plusieurs raisons, il est nécessaire de moduler cette définition :

- La dégradation peut présenter des atténuations très importantes à certaines fréquences (zéros). C'est le cas de celle présentée figure 1. Dans ces conditions, le filtre inverse exact présente un gain très important pour les fréquences en question. Il peut même ne pas être défini dans le cas de vrais zéros.

- Les zones spatio-fréquentielles à faible rapport signal à bruit ($\frac{P_B(\nu, \mu)}{P_F(\nu, \mu)} \gg |H(\nu, \mu)|^2$) ne devront pas être restaurées à terme (en accord avec le filtrage de Wiener). Inutile



donc de chercher à les restaurer temporairement avec un vrai filtre inverse.

- La réponse en fréquence du filtre inverse peut présenter des variations importantes et brutales et de ce fait nécessiter un large support spatial pour être mise en œuvre. C'est le cas notamment si la dégradation, modélisée par un filtre à réponse impulsionnelle finie, fait apparaître des "zéros" (racine de la fonction de transfert polynomiale) proche du cercle unité. Lors de l'inversion, ces zéros deviennent des pôles "résonnants" et conduisent à une réponse impulsionnelle très longue.

En considérant ces arguments en défaveur du filtre inverse, et étant donné que cette étape dans la restauration doit être la même pour toutes les régions de l'image, il apparaît raisonnable de rechercher un filtre adapté au meilleur rapport signal à bruit présent dans l'image. C'est ainsi qu'on aboutit à un filtre de Wiener calculé avec la fonction minorante des quantités $\frac{P_B(\nu, \mu)}{P_F(\nu, \mu)}$ attendues dans les images à traiter.

$$K_I(\nu, \mu) = \frac{H^*(\nu, \mu)}{|H(\nu, \mu)|^2 + \text{Min}\left(\frac{P_B(\nu, \mu)}{P_F(\nu, \mu)}\right)}$$

Généralement, la puissance spectrale du bruit est constante et connue. Dès lors, c'est la fonction majorante de la puissance spectrale des signaux de scène qu'il est nécessaire d'évaluer pour calculer ce filtre de Wiener particulier. Or, en absence d'information a priori, toutes les configurations spectrales du signal de scène sont équiprobables, et la fonction majorante est constante en fréquence. Elle peut être calculée en majorant la puissance moyenne du signal de scène elle-même estimée par la puissance moyenne du signal observé.

La figure 3 présente les réponses en fréquence du filtre inverse exact ainsi que celle du filtre de Wiener que nous retenons (K_I). La quantité $\text{Min}\left(\frac{P_B(\nu, \mu)}{P_F(\nu, \mu)}\right)$ a été supposée constante et égale à 10^{-3} (rapport signal à bruit de 30dB).

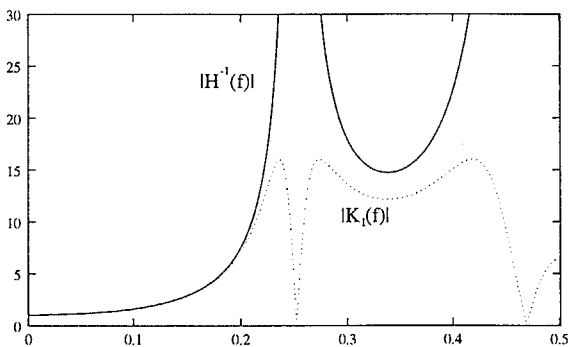


FIG. 3 - Filtres "inverses"

4.3 Filtre adaptatif

Ce filtre varie pour chacun des pixels à restaurer. Soit le pixel (i, j) , le filtre s'écrit $h_a = u - \sigma_b^2 \cdot R_g(i, j)^{-1} \cdot u$ où $R_g(i, j)$ est la matrice de corrélation associée au vecteur contenant l'ensemble des pixels de l'image dégradée appartenant au voisinage $N \times N$ centré sur (i, j) .

Pour déterminer cette matrice, exprimons les pixels du

voisinage en fonction du pixel central :

$$g(x, y) = g(i, j) + d(x, y)$$

avec $d(x, y) = g(x, y) - g(i, j)$.

Le vecteur signal associé au voisinage peut alors s'écrire :

$$g(i, j) \cdot v + \Delta(i, j)$$

où $v = [1 \dots 1 \dots 1]^T$ et $\Delta(i, j) = [\dots d(x, y) \dots]^T$

La matrice de corrélation $R_g(i, j)$ est définie comme l'espérance mathématique du carré du vecteur signal :

$$R_g(i, j) = E\{g(i, j)^2\} \cdot v \cdot v^T + v \cdot E\{g(i, j) \cdot \Delta(i, j)\}^T + E\{\Delta(i, j) \cdot g(i, j)\} \cdot v^T + E\{\Delta(i, j) \cdot \Delta(i, j)^T\}$$

$g(i, j)$ peut être considéré, au bruit près, comme un signal déterministe constant et le terme $E\{g(i, j)^2\} \cdot v \cdot v^T$ peut être approché par la quantité $g(i, j)^2 \cdot v \cdot v^T$. Les autres termes sont des statistiques d'ordre deux qui ne peuvent être estimées ni de façon statistique (ne disposant que d'une seule réalisation), ni par moyennage spatial sans supposer le signal stationnaire et perdre le caractère adaptatif du filtre. Une solution consiste à se baser sur un modèle simple pour l'image dégradée en considérant les variations d'amplitude d'un pixel à un autre comme des phénomènes aléatoires indépendants, centrés et de puissance au moins égale au maximum entre leur amplitude au carré et la puissance de bruit :

$$\tilde{d}(x, y)^2 = \text{Max}(d(x, y)^2, \sigma_b^2)$$

Dès lors, les termes $E\{g(i, j) \cdot \Delta(i, j)\}$ deviennent nuls et le terme $E\{\Delta(i, j) \cdot \Delta(i, j)^T\}$ est une matrice diagonale $\tilde{D}(i, j)$ constituée des termes $\tilde{d}(x, y)^2$.

$R_g(i, j)$ s'écrit alors :

$$R_g(i, j) = g(i, j)^2 \cdot v \cdot v^T + \tilde{D}(i, j)$$

En utilisant le lemme d'inversion matricielle, il vient :

$$R_g(i, j)^{-1} = \tilde{D}(i, j)^{-1} - \frac{\tilde{D}(i, j)^{-1} \cdot v \cdot v^T \cdot \tilde{D}(i, j)^{-1}}{\frac{1}{g(i, j)^2} + v^T \cdot \tilde{D}(i, j)^{-1} \cdot v}$$

L'expression initiale du filtre adaptatif devient alors :

$$h_a = u - \sigma_b^2 \cdot \tilde{D}(i, j)^{-1} \cdot u + \frac{\sigma_b^2 v^T \cdot \tilde{D}(i, j)^{-1} \cdot u}{\frac{1}{g(i, j)^2} + v^T \cdot \tilde{D}(i, j)^{-1} \cdot v} \cdot D(i, j)^{-1} \cdot v$$

En remarquant que $\tilde{D}(i, j)^{-1} \cdot u = \frac{1}{\sigma_b^2} u$, et en tenant compte de la valeur de v , il vient :

$$h_a = \frac{1}{\frac{1}{g(i, j)^2} + \sum \frac{1}{\tilde{d}^2(x, y)}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{d}^2(i - \frac{N}{2}, j - \frac{N}{2})} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_b^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tilde{d}^2(i + \frac{N}{2}, j + \frac{N}{2})} \end{bmatrix}$$

Remarque : pour normaliser le filtre de façon à conserver la valeur du continu, il suffit de supprimer le terme $\frac{1}{g(i, j)^2}$.

5 Simulations

Nous présentons dans ce paragraphe une des simulations que nous avons réalisées. Dans cet exemple, c'est le filtre H représenté sur la figure 1 qui modélise la dégradation. À l'image floue s'ajoute un bruit blanc gaussien centré, dont la variance est choisie telle que le rapport

$$\frac{\text{Puissance de l'image floue}}{\text{Puissance du bruit}}$$

soit égal à 10^4 . L'image dégradée ainsi obtenue est représentée sur la figure 4.

La figure 5 correspond à cette image restaurée par le premier filtre, constant, qui inverse la dégradation H . Il apparaît clairement que les contours sont plus nets mais que le bruit est amplifié et texturé, ce qui est principalement perceptible dans les régions uniformes (par exemple dans le ciel ou sur le bâtiment en bas à gauche de l'image).

Cette image est ensuite filtrée par le filtre spatialement adaptatif (h_a) pour donner l'image illustrée par la figure 6. En observant cette figure, on peut noter que le bruit est atténué dans les zones où la variation du contenu local de l'image est faible.

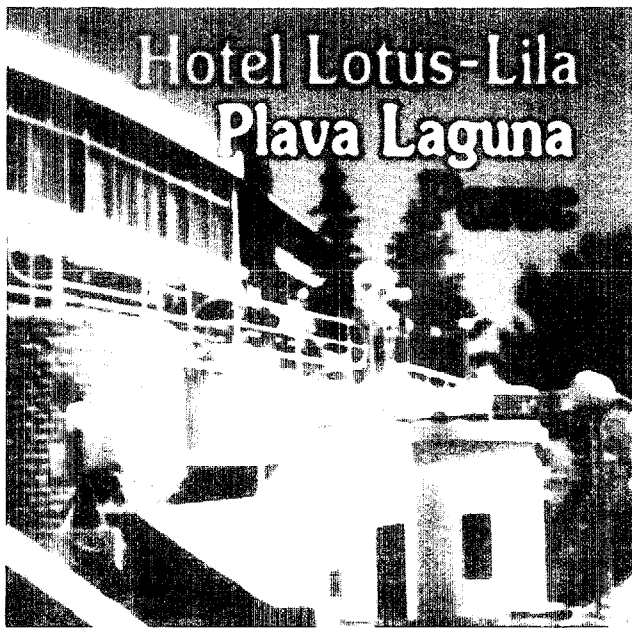


FIG. 4 - Image dégradée

6 Conclusion

Nous proposons dans cet article un filtre de Wiener adaptatif qui se décompose en un filtre inverse suivi d'un filtre adaptatif relativement facile à mettre en œuvre. L'ensemble permet d'effectuer un filtrage de Wiener dont les caractéristiques sont adaptées au contenu local de l'image et dont les performances sont comparables à celles obtenues avec des méthodes beaucoup plus complexes.

Références

- [GK87] R.A. Gonsalves and H.M. Kao. Entropy-based algorithm for reducing artifacts in image restoration. In *Optical Engineering*, pages 617 – 622, 1987.
- [GLT93] Y.P. Guo, H.P. Lee, and C.L. Teo. An adaptative iterative approach for image restoration. In *SPIE vol 2298*, pages 176 – 185, 1993.
- [LB91] R. Lagendijk and J. Biemond. *Iterative Identification and Restoration of Images*. Kluwer Academic Publishers, 1991.



FIG. 5 - Image restaurée par le filtre constant

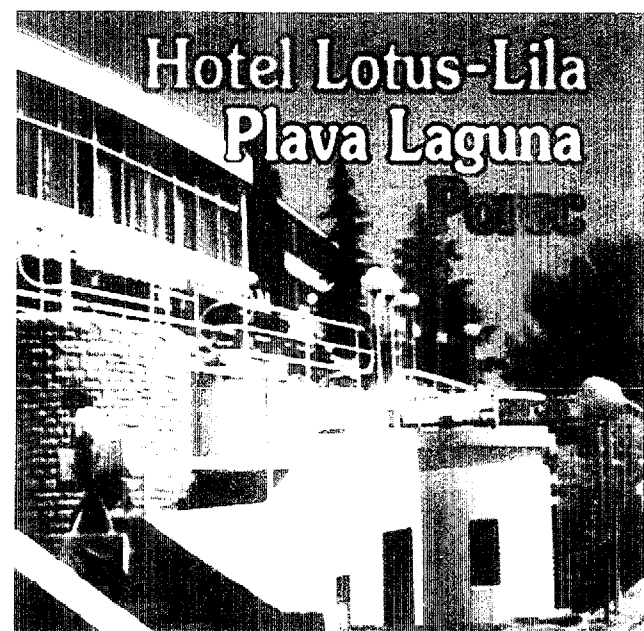


FIG. 6 - Image restaurée finale

