

DÉTECTION A DÉCISION PONDÉRÉE SUR CANAL SÉLECTIF EN FRÉQUENCE EN PRÉSENCE DE CODAGE DE CANAL

Christophe LAOT et Alain GLAVIEUX

**Département Signal et Communications
Télécom Bretagne - BP 832 - 29285 BREST cedex**

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Dans cet article nous montrons qu'il est possible de déterminer simplement la vraisemblance des décisions prises par un détecteur de symboles. Plusieurs approximations de cette vraisemblance sont proposées. En présence de codage de canal, nous montrons qu'il est possible d'exploiter cette vraisemblance produite par le détecteur de symboles pour améliorer de manière significative la qualité de la transmission.

In this paper we propose a method to evaluate the likelihood of the decision at the output of a maximum likelihood sequence detector. We suggest several simplifications for this algorithm in order to reduce its complexity. In presence of error correcting codes, we show that this likelihood delivered by the detector can be used to improve significantly the performance of the transmission system.

1. INTRODUCTION

L'effet de mémoire introduit par les canaux à trajets multiples, canal radio mobile ou canal acoustique sous-marin, peut être exploité en utilisant un détecteur selon le Maximum de Vraisemblance (MV). Si la transmission est codée par un code convolutif, l'utilisation d'un décodeur à entrées pondérées nécessite que le détecteur associe à chacune de ses décisions une mesure de fiabilité (détecteur à sortie pondérée). Cette fiabilité peut être obtenue en utilisant un détecteur selon le Maximum A Posteriori (MAP) [1] dont la complexité est malheureusement beaucoup plus importante, que celle du détecteur selon le Maximum de Vraisemblance (algorithme de Viterbi) [2].

Dans cet article plusieurs versions simplifiées de l'algorithme du MAP sont proposées. Ces versions, un peu plus complexes que l'algorithme de Viterbi, conduisent à des performances sur canal de Rayleigh sélectif en fréquence, très voisines de celles obtenues avec l'algorithme du MAP.

2. TRANSMISSION SUR CANAL A TRAJETS MULTIPLES

Considérons une transmission en modulation de phase à 2 états (MDP-2) avec codage sur un canal à trajets multiples. Le signal modulé $s(t)$, après filtrage d'émission est égal à :

$$s(t) = V \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k h_e(t - kT) \exp j(2\pi f_0 t + \varphi_0) \quad (1)$$

où f_0 est la fréquence de l'onde porteuse, φ_0 une phase à valeur dans $[0, 2\pi]$ et d_k sont les symboles de modulation que nous supposons mutuellement indépendants et prenant les valeurs $\{\pm 1\}$ avec la même probabilité. La quantité V représente une amplitude constante, T est l'inverse de la rapidité de modulation et $h_e(t)$ est une "porte" filtrée.

Après passage dans le canal, le signal reçu $R(t)$ est constitué de M termes correspondant respectivement aux M trajets de propagation.

$$R(t) = V \sum_{m=0}^{M-1} A_m(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k h_e(t - \tau_m - kT) \exp j\{2\pi f_0 t + \varphi_0\} + B(t) \quad (2)$$

où $A_m(t)$ sont des processus aléatoires gaussiens, de moyenne nulle, appelés dans la suite bruits multiplicatifs. Les quantités τ_m sont les retards respectifs des M trajets et $B(t)$ est un bruit complexe, blanc, centré, gaussien, de densité spectrale de puissance bilatérale égale à $2N_0$.

$$B(t) = [B_c(t) + jB_s(t)] \exp(j2\pi f_0 t + \varphi_0) \quad (3)$$

Après translation en bande de base, le signal $Z(t)$ en sortie du filtre de réception est échantillonné de manière synchrone avec le trajet le plus énergétique, que nous supposons être le trajet numéro i , $0 \leq i \leq (M-1)$.

En considérant que l'interférence entre symboles porte uniquement sur $L_1 + L_2$ symboles, les échantillons $Z_n \triangleq Z(\tau_i + nT)$ ont pour expression :

$$Z_n = \sum_{k=0}^{L_1+L_2} \Gamma_{k-L_2}(n) d_{n+L_2-k} + b_n \quad (4)$$

avec :

$$\Gamma_k(n) = V \exp j\theta_n \sum_{m=0}^{M-1} A_m(n) n_y(\tau_i - \tau_m + kT) \quad (5)$$

où $\theta_n \triangleq \theta(\tau_i + nT)$ est un terme de phase dû au décalage en fréquence Δf et au décalage en phase $\Delta\varphi$ existants entre les oscillateurs d'émission et de réception. $n_y(t)$ est une fonction satisfaisant le critère de Nyquist (cosinus surélevé par exemple). Les quantités $\Gamma_k(n)$, combinaisons linéaires des bruits multiplicatifs $A_m(t)$ échantillonnés aux instants $\tau_i + nT$, sont donc des quantités gaussiennes.



L'expression (4) de l'échantillon Z_n conduit à modéliser l'ensemble modulateur, canal de transmission et démodulateur par un canal discret équivalent. L'évolution au cours du temps de ce canal équivalent peut être représentée par un graphe en treillis dont les états S_n à l'instant $\tau_i + nT$ sont définis par :

$$S_n = (d_{n+L_2} \dots \dots d_{n-L_1+1}) \quad (6)$$

3. STRUCTURE DU DÉTECTEUR A SORTIE PONDÉRÉE

Considérons une observation Z_1^N constituée par N échantillons Z_n .

$$Z_1^N = (Z_1 \dots \dots Z_n \dots \dots Z_N) \quad (7)$$

A chaque symboles-déTECTÉ d_n , peut être associé une mesure de fiabilité sous forme du Logarithme du Rapport de Vraisemblance (LRV) du symbole d_n .

$$\Lambda(d_n) = \text{Log} \frac{\text{Pr}\{d_n = +1 / Z_1^N\}}{\text{Pr}\{d_n = -1 / Z_1^N\}} \quad (8)$$

En utilisant la règle de Bayes, la relation (8) peut encore se mettre sous la forme :

$$\Lambda(d_n) = \text{Log} \frac{\sum_{\mathbf{m} \in \{M_n^{+1}\}} p\{Z_1^N / \mathbf{d}_1^N = \mathbf{m}\}}{\sum_{\mathbf{m} \in \{M_n^{-1}\}} p\{Z_1^N / \mathbf{d}_1^N = \mathbf{m}\}} \quad (9)$$

où $\{M_n^j\}$ représente l'ensemble des réalisations possibles de la séquence $\mathbf{d}_1^N = (d_1 \dots d_n \dots d_N)$ avec $d_n = j$; $j \in \{\pm 1\}$ et $p\{Z_1^N / \mathbf{d}_1^N = \mathbf{m}\}$ est la densité de probabilité de Z_1^N sachant $\mathbf{d}_1^N = \mathbf{m}$.

En tenant compte du fait que les échantillons Z_n , $1 \leq n \leq N$ sont non corrélés, gaussiens, de moyenne $z_n(\mathbf{m})$ et de variance σ_b^2 conditionnellement à $\mathbf{d}_1^N = \mathbf{m}$ et pour $\Gamma_{k-L_2}(n)$, $0 \leq k \leq L_1 + L_2$ connus, la relation (9) devient :

$$\Lambda(d_n) = \text{Log} \frac{\sum_{\mathbf{m} \in \{M_n^{+1}\}} \prod_{k=1}^N \exp\left\{-\frac{|Z_k - z_k(\mathbf{m})|^2}{2\sigma_b^2}\right\}}{\sum_{\mathbf{m} \in \{M_n^{-1}\}} \prod_{k=1}^N \exp\left\{-\frac{|Z_k - z_k(\mathbf{m})|^2}{2\sigma_b^2}\right\}} \quad (10)$$

Dans la relation (10), le numérateur est égal à la somme des vraisemblances de tous les chemins du treillis correspondant à $d_n = 1$ et le dénominateur représente la même quantité pour $d_n = -1$.

En fait certains chemins sont très peu vraisemblables et leur contribution au numérateur ou au dénominateur de la relation (10) est négligeable. Pour simplifier cette relation, il est possible de ne conserver que les chemins les plus vraisemblables.

En considérant une observation de longueur $(n+x)$, le calcul du LRV d'un symbole nécessite de connaître d'abord l'état dans lequel se trouve le canal discret équivalent à l'instant $(n+x)T$. Cet état peut être trouvé en utilisant l'algorithme de Viterbi.

En effet, à l'instant $(n+L+x)T$ le chemin dont la métrique cumulée est la plus faible atteint un état S_{n+L+x} . En remontant ce chemin sur L branches où L doit être égal à plusieurs fois la mémoire du canal, on peut déterminer, avec une bonne fiabilité la valeur de l'état S_{n+x} atteint à l'instant $(n+x)T$.

Supposons maintenant que l'on veuille calculer le LRV associé au symbole d_{n-L_1+1} . Pour cela considérons le treillis représenté

sur la figure 1 où Δ_{n+x} , Δ_n^c et Δ_n^s représentent respectivement les différences entre les métriques cumulées des chemins qui convergent vers les états S_{n+x} , S_n et \tilde{S}_n .

A chaque instant et en chaque noeud convergent deux chemins, le survivant (trait plein) déterminé en utilisant l'algorithme de Viterbi et le concurrent (trait pointillé).

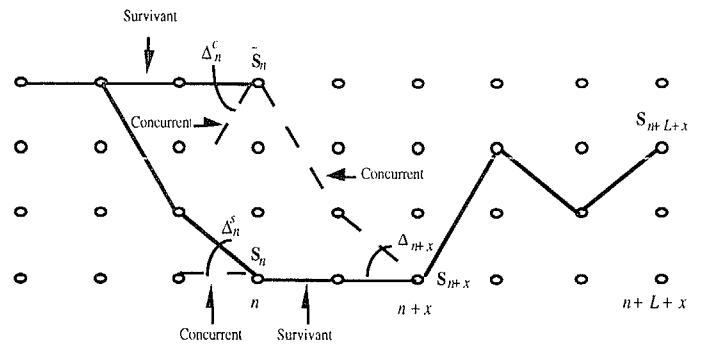


Figure 1 Recherche de l'état le plus vraisemblable à l'instant $(n+x)T$

L'expression (10) peut alors être approximée en prenant en compte seulement quatre chemins, le chemin survivant et son concurrent arrivant en S_{n+x} , le chemin survivant et son concurrent arrivant respectivement en \tilde{S}_n et S_n .

En supposant que le chemin survivant qui arrive en S_n correspond à $d_{n-L_1+1} = i$, $i = -1, 1$ et que le chemin survivant arrivant en \tilde{S}_n (qui est aussi le chemin concurrent arrivant en S_{n+x}) correspond à $d_{n-L_1+1} = j$; $j \in \{\pm 1\}$ alors une première expression approchée du LRV du symbole d_{n-L_1+1} est égal à :

$$\Lambda(d_{n-L_1+1}) \approx \log \frac{\exp\left\{-\frac{2M_{n+x}^s + (1-i)\Delta_n^s}{4\sigma_b^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{2M_{n+x}^s + (1+i)\Delta_n^s}{4\sigma_b^2}\right\}} + \frac{\exp\left\{-\frac{2M_{n+x}^c + (1-j)\Delta_n^c}{4\sigma_b^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{2M_{n+x}^c + (1+j)\Delta_n^c}{4\sigma_b^2}\right\}} \quad (11)$$

où M_{n+x}^s et M_{n+x}^c sont respectivement les métriques cumulées calculées en $(n+x)T$ du chemin survivant et de son concurrent.

En factorisant $\exp(-M_{n+x}^s / 2\sigma_b^2)$ au numérateur et au dénominateur de l'expression (11), nous obtenons finalement l'approximation dite "approximation 0" du LRV du symbole d_{n-L_1+1} .

- "Approximation 0"

$$\Lambda(d_{n-L_1+1}) \approx \log \frac{\exp\left(-\frac{(1-i)\Delta_n^s}{4\sigma_b^2}\right) + \exp\left(-\frac{2\Delta_{n+x} + (1-j)\Delta_n^c}{4\sigma_b^2}\right)}{\exp\left(-\frac{(1+i)\Delta_n^s}{4\sigma_b^2}\right) + \exp\left(-\frac{2\Delta_{n+x} + (1+j)\Delta_n^c}{4\sigma_b^2}\right)} \quad (12)$$

où :

$$\Delta_{n+x} = M_{n+x}^c - M_{n+x}^s \quad (13)$$

En fait la relation (12) si elle est beaucoup plus simple que l'expression (10) nécessite toutefois de connaître la variance σ_b^2 du bruit et de calculer les exponentielles de métriques.

Si la quantité Δ_{n+x} est suffisamment grande pour que $\exp(-\Delta_{n+x}/2\sigma_b^2)$ puisse être négligé devant 1, alors l'expression du LRV associé au symbole d_{n-L_1+1} peut encore être simplifiée ("approximation 1")

- "Approximation 1"

si $j = i = \pm 1$

$$\begin{aligned} \Lambda(d_{n-L_1+1}) &\approx i \frac{\Delta_n^s}{2\sigma_b^2} && \text{si } \Delta_n^s < \Delta_{n+x} + \Delta_n^c \\ &\approx i \frac{\Delta_{n+x} + \Delta_n^c}{2\sigma_b^2} && \text{si } \Delta_n^s > \Delta_{n+x} + \Delta_n^c \end{aligned} \quad (14-a)$$

si $j = -i = \pm 1$

$$\begin{aligned} \Lambda(d_{n-L_1+1}) &\approx i \frac{\Delta_n^s}{2\sigma_b^2} && \text{si } \Delta_n^s < \Delta_{n+x} \\ &\approx i \frac{\Delta_{n+x}}{2\sigma_b^2} && \text{si } \Delta_n^s > \Delta_{n+x} \end{aligned} \quad (14-b)$$

Enfin, en ne mémorisant que les différences de métrique sur le chemin survivant, une dernière approximation du LRV d'un symbole ("approximation 2") peut être obtenue :

- "Approximation 2"

si $i = \pm 1 ; \forall j \in \{\pm 1\}$

$$\begin{aligned} \Lambda(d_{n-L_1+1}) &\approx i \frac{\Delta_n^s}{2\sigma_b^2} && \text{si } \Delta_n^s < \Delta_{n+x} \\ &\approx i \frac{\Delta_{n+x}}{2\sigma_b^2} && \text{si } \Delta_n^s > \Delta_{n+x} \end{aligned} \quad (15)$$

Le LRV sous la forme (14-a) et (14-b) ou (15) dépend toujours de la variance σ_b^2 du bruit mais, à un coefficient de proportionnalité près on peut s'affranchir de σ_b^2 .

La valeur approchée du LRV du symbole d_{n-L_1+1} a été obtenue conditionnellement à la connaissance de l'état \mathbf{S}_{n+x} . En se déplaçant dans le treillis, le LRV du symbole d_{n-L_1+1} peut être déterminé conditionnellement à la connaissance des états \mathbf{S}_{n+x+i} , $i = 0, 1, \dots, L$. En tenant compte du fait que les états \mathbf{S}_{n+x+i} , $i = 0, 1, \dots, L$ sont connus avec la même fiabilité et que les relations (12), (14-a), (14-b) et (15) ne sont qu'une approximation du LRV d'un symbole, nous prendrons comme meilleure estimation du LRV du symbole d_{n-L_1+1} :

$$\Lambda(d_{n-L_1+1}) = \min\left\{\Lambda(d_{n-L_1+1}) / \mathbf{S}_{n+x+i}; i = 0, 1, \dots, L\right\} \quad (16)$$

5. PERFORMANCES EN PRÉSENCE DE CANAL DE RAYLEIGH

Pour évaluer les performances en présence de codage, nous avons utilisé un code de type convolutif de rendement $R = 1/2$, de longueur de contrainte $K = 7$ et de polynômes générateurs 133, 171 (en octal).

En sortie du décodeur selon le MAP ou de ces trois approximations, les erreurs de transmission, dues à la présence d'évanouissements sur le canal (canal de Rayleigh) sont généralement groupées (paquets d'erreurs). C'est la raison pour laquelle, il est nécessaire d'introduire une fonction d'entrelacement après le codeur et une fonction de désentrelacement avant le décodeur.

Dans les simulations nous avons utilisé un entrelaceur matriciel (n, n), les symboles étant écrits ligne par ligne et lus colonne par colonne. La dimension de la matrice est fonction de la durée des évanouissements, elle doit être d'autant plus grande que le produit $f_d T$ est petit où f_d est la fréquence Doppler maximale de la transmission. Dans les simulations nous nous sommes limités à des matrices (64x64) et nous avons vérifié qu'elles permettaient de bien disperser les erreurs en sortie du décodeur selon le MAP si le produit $f_d T$ était supérieur ou égal à $5 \cdot 10^{-3}$.

Sur la figure 2, nous avons tracé le taux d'erreur en fonction du rapport E_b / N_0 en présence de codage, pour un canal de Rayleigh à trois trajets ($f_d T = 0.007$, $\tau_m = mT$, $P_m = 1/3$, $m = 0, 1, 2$). Le décodeur selon le MAP conduit aux meilleurs performances suivi par les approximations 0, 1 et 2. On notera qu'à 10^{-3} de taux d'erreur, la dégradation du rapport E_b / N_0 n'est que de 0,25 dB pour l'approximation 2 (la plus simple à mettre en oeuvre) par rapport au décodeur selon le MAP.

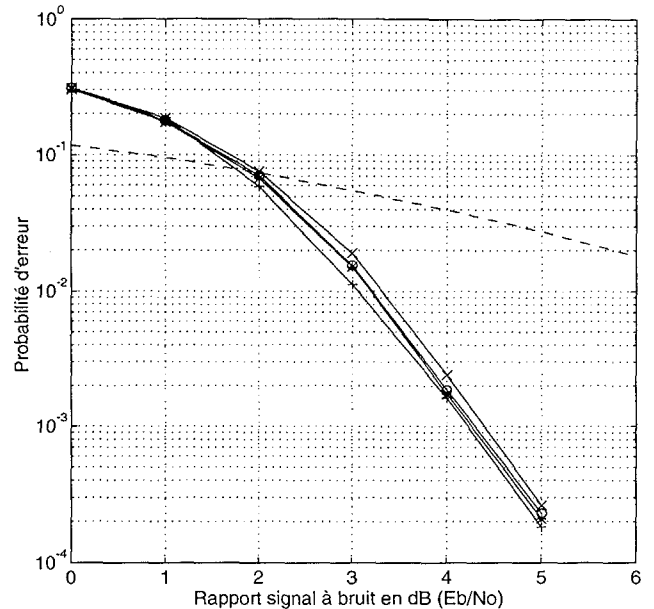


Figure 2 Taux d'erreur binaire en fonction du rapport E_b / N_0 en présence de codage et pour un canal de Rayleigh à 3 trajets (entrelacement 64x64),
+ : MAP, O : Approximation 0, * : Approximation 1, x : Approximation 2

Sur la figure 3, nous avons tracé le taux d'erreur en fonction du rapport E_b / N_0 pour un canal de Rayleigh à trois trajets ($f_d T = 0.007$, $\tau_m = mT$, $P_m = 1/3$, $m = 0, 1, 2$) avec



décodage de canal à entrée ferme et à entrée pondérée, avec ou sans entrelacement (64x64). Le décodeur utilise l'approximation "0" de l'algorithme selon le MAP. L'introduction d'un entrelaceur permet, à 10^{-4} de taux d'erreur d'obtenir un gain de 2.7dB sur le rapport signal à bruit avec un décodeur à entrée ferme et de 2.3 dB, avec un décodeur à entrée pondérée. Avec entrelacement (64x64), l'utilisation d'un décodeur de canal à entrée pondérée conduit à un gain de 3 dB sur le rapport signal à bruit par rapport à un décodeur à entrée ferme, pour un taux d'erreur de 10^{-4} . On voit donc l'intérêt qu'il y a à travailler avec un décodeur de canal à entrée pondérée c'est-à-dire à disposer d'un détecteur capable de fournir la vraisemblance de ses décisions.

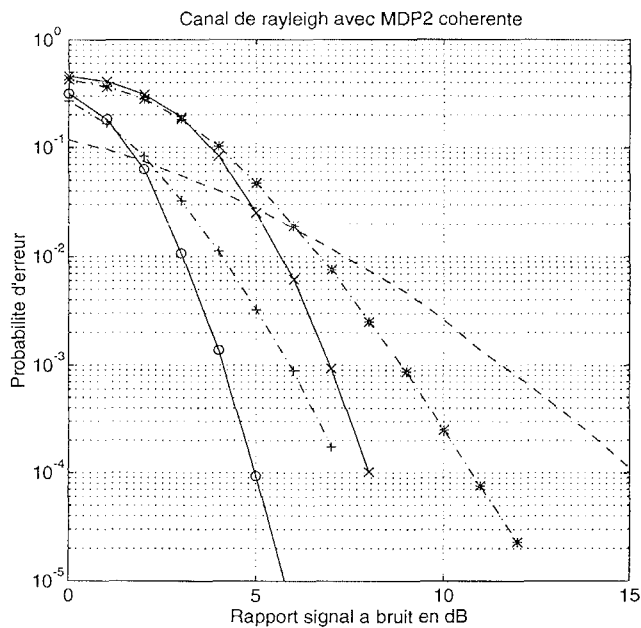


Figure 3 Taux d'erreur binaire en fonction du rapport E_b / N_0 en présence de codage pour un canal de Rayleigh à 3 trajets (entrelacement 64x64),
 - - : sans codage, * : décodage à entrée ferme sans entrelacement, + : décodeur à entrée pondérée sans entrelacement, x : décodeur à entrée ferme avec entrelacement, O : décodeur à entrée pondérée avec entrelacement

Pour terminer cet article nous présentons quelques résultats obtenus en remplaçant la modulation de phase à 2 états (MDP-2) par une modulation de phase à 4 états (MDP-4). Avec une modulation MDP-4, le décodeur selon le MAP se complique un peu puisque les symboles de modulation $d_n = a_n + jb_n$ sont complexes et que le nombre d'états du canal discret équivalent est désormais de la forme $4^{L_1+L_2}$ (au lieu de $2^{L_1+L_2}$ avec la modulation MDP-2).

En chaque état S_n du treillis converge maintenant quatre branches et, en suivant une démarche analogue à celle utilisée précédemment, il est encore possible d'approximer le LRV associé aux symboles a_n et b_n .

En considérant une approximation du type 1, nous avons tracé sur la figure 4 pour un canal de Rayleigh à 3 trajets ($f_d T = 0.1$, $\tau_m = mT$, $P_m = 1/3$, $m = 0, 1, 2$) avec codage et entrelacement (64x64), le taux d'erreur binaire en fonction du rapport signal à bruit (E_b / N_0) pour une modulation MDP-4 et MDP-2.

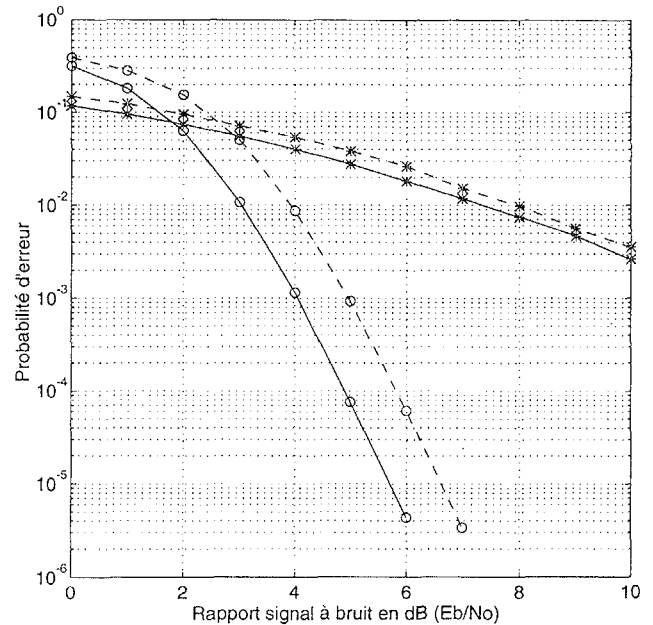


Figure 4 Taux d'erreur binaire en fonction du rapport E_b / N_0 en présence de codage pour un canal de Rayleigh à 3 trajets (entrelacement 64x64)
 - - - MDP-4 ; — MDP-2 ; * Non codé ; O : codé et approximation 1

On peut constater que les performances de la modulation MDP-2 sont un peu meilleures que celles de la modulation MDP-4 alors que ces deux modulations conduisent à des performances identiques sur un canal de Rayleigh non sélectif en fréquence. Ceci provient du fait qu'en présence de sélectivité en fréquence, il existe pour la modulation MDP-4 de la diaphonie entre les voies en phase et en quadrature du signal modulé et que, l'approximation 1 est probablement un peu moins fiable avec une modulation MDP-4 qu'avec une modulation MDP-2.

6. CONCLUSIONS

En présence de codage de canal de type convolutif, nous avons vu que l'utilisation d'un détecteur à sortie pondérée permettait d'améliorer de manière significative le gain de codage par rapport à l'utilisation d'un détecteur à sortie binaire (décision ferme). La pondération à la sortie d'un détecteur nécessitant d'utiliser l'algorithme du Maximum A Posteriori (MAP), complexe à mettre en oeuvre, nous avons proposé trois simplifications de cet algorithme. En utilisant ces différentes approximations dans une transmission sur canal de Rayleigh sélectif en fréquence, nous avons montré qu'elles n'apportaient qu'une faible dégradation des performances par rapport à l'algorithme du MAP.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jeinek and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 248-287, March 1974.
- [2] - G. D. Forney, Jr., "The Viterbi algorithm," *IEEE Proceeding*, vol. 68, pp. 268-278, March 1973.