



Un Modèle de Partitionnement Optimal en Imagerie

Etienne BERTIN

Equipe Infodis - Laboratoire TIMC-IMAG, URA CNRS D 1618,
Institut Albert Bonniot, Domaine de la Merci, 38706 LA TRONCHE Cedex France,
Etienne.Bertin@imag.fr

RÉSUMÉ

L'utilisation des modèles géométriques associés aux champs aléatoires connaît un développement important en modélisation spatiale et en analyse d'image. Dans ce travail, analyse d'images, géométrie algorithmique et géométrie stochastique trouvent un point commun dans les modèles de partitionnement optimal. Le but est en effet d'associer à un modèle énergétique et géométrique, une image et d'en trouver le minimum. Cette méthode est donc une alternative aux approches classiques de type division et fusion.

1 Introduction

Les modèles géométriques de partitionnement fournissent un codage pour compresser, représenter, segmenter, quantifier, voir interpréter des images numériques [Ahu95, Brand92, Bert95, Marc92]. Ce codage peut être non-adapté (partitionnements réguliers) ou adapté (partitionnements irréguliers) aux données observées.

Dans \mathbb{R}^2 , il existe une infinité de partitionnements. Les nombreux dessins d'Esher en sont des exemples où les éléments de surface s'emboîtent à l'infini. Toutefois, ces partitionnements sont difficiles à exploiter du point de vue mathématique ou informatique.

Dans ce but, les partitionnements réguliers du plan (carré, triangulaire, hexagonal) sont sans doute plus appropriés. Toutefois, ils sont assez limités puisqu'ils ne permettent d'obtenir qu'un échantillonnage régulier des données.

Les partitionnements non réguliers permettent de réaliser un échantillonnage irrégulier des données et donc de rendre le partitionnement adaptatif (i.e. les éléments sont adaptés aux données à échantillonner). Le partitionnement le plus connu et le plus utilisé est sans doute le quadtree.

Je me suis toutefois focalisé sur les partitionnements irréguliers de Voronoï pour leur grande adaptabilité et leurs nombreuses propriétés géométriques [Aure91] (Fig. 1). De plus, leur étude peut être menée pour d'autres notions de proximité (distance euclidienne pondérée additivement et multiplicativement) et d'autres espaces (tores, sphères ou des surfaces plus générales) permettant de mieux adapter la géométrie du partitionnement à la géométrie des données.

ABSTRACT

Geometrical models and random fields have known an important development in spatial modelisation an image analysis. In this work, we present an algorithm for optimal image representation using computational and stochastic geometry. Such an approach may be seen as an alternative to the classical split and merge algorithm.

2 Diagrammes de Voronoï : Quelques Définitions

Si S est un ensemble de n points de \mathbb{R}^2 et p un point de S , alors l'ensemble des points m de \mathbb{R}^2 plus proches de p que de n'importe quel autre point de S définit la région de Voronoï notée $Vor_S(p)$ qui est un polygone convexe associé à p :

$$Vor_S(p) = \{m \in \mathbb{R}^2, d(m, p) \leq d(m, q), \forall q \in S\}.$$

L'ensemble de toutes les régions de Voronoï forme le diagramme de Voronoï qui est une partition de \mathbb{R}^2 .

$$VOR(S) = \cup_{p \in S} Vor_S(p).$$

Le graphe de Delaunay noté $DEL(S) = \langle S, E \rangle$, dual du diagramme de Voronoï, permet de coder de manière cohérente les relations d'adjacence entre les régions de Voronoï:

$$E = \{(p, q) \in S^2, Vor_S(p) \cap Vor_S(q) \neq \emptyset\}.$$

Ces relations permettent donc de définir une notion topologique de voisinage:

$$\forall p \in S, N_S(p) = \{q \in S \text{ tel que } (p, q) \in E\}.$$

Par la suite les polygones de Voronoï seront liés à des attributs associés à une image et le graphe de Delaunay gèrera les interactions (Fig 1).

3 Partitionnement d'Images par Polygones de Voronoï

Le but est de représenter une image à l'aide d'un modèle géométrique de partitionnement pour obtenir un codage par

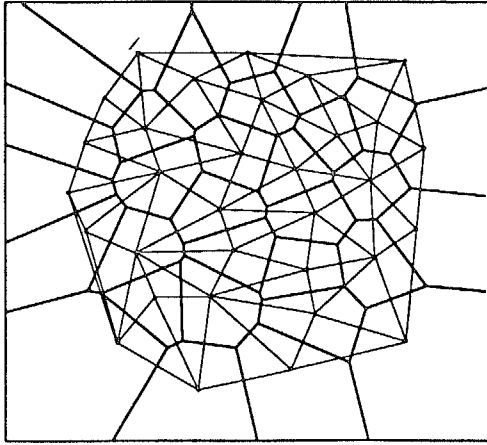


FIG. 1 - Partitions en polygones de Voronoï (traits gras) et partition en triangles de Delaunay (traits fins) dans \mathbb{R}^2 pour une trentaine de points.

des éléments de surface structurés dans un graphe. Mes travaux ont porté plus spécifiquement sur les partitionnements adaptatifs de Voronoï pour trois raisons essentielles :

- ils sont robustes à la translation et à la rotation (*grande stabilité*);
- ils permettent de retrouver le squelette ou l'exosquelette d'objets présents dans une image (*émergence de structures*);
- ils sont adaptés aux images vidéo (*grande flexibilité*).

En ce qui concerne la représentation d'images par polygones de Voronoï deux approches essentielles ont vu le jour.

3.1 Approche 1 : Processus de Poisson Homogène et Fusion

Une première approche due à Ahuja en 1985 utilise le processus de Poisson homogène d'intensité λ [Ahu85] pour générer aléatoirement un ensemble S de N points dans une image. Ces points vérifient donc les deux propriétés fondamentales suivantes :

- le nombre de points pour une région A de l'image suit une distribution de Poisson de paramètre λA ;
- les variables aléatoires correspondantes pour des régions disjointes sont indépendantes.

Une fois le diagramme de Voronoï calculé pour cet ensemble de points, on détermine pour chaque polygone de Voronoï son niveau de gris moyen. Finalement une étape de fusion est basée sur un critère de similarité permettant de définir des polygones inutiles. En effet, si un polygone $Vor_S(p)$ et tous ses voisins sont semblables, alors p est inutile et on supprime $Vor_S(p)$ du diagramme de Voronoï $VOR(S)$ (deux régions de Voronoï sont semblables si leurs niveaux de gris moyen sont similaires). Ce critère de similarité fait donc intervenir une notion de seuil de similarité α qui est à déterminer en fonction de l'image.

3.2 Approche 2 : Division et Fusion

Une autre approche due à Chassery en 1991 est basée sur l'approche division et fusion en 2D [Chas91] et en 3D [Bert93].

L'originalité est donc dans la phase de division qui fait intervenir un critère d'homogénéité associé aux polygones de Voronoï. Ce critère est lié à une mesure de statistique du second ordre (mesure de la variance des niveaux de gris au sein de chaque polygone) : $\sigma^2(Vor_S(p)) < \beta$ où β est un seuil (à déterminer) associé au critère d'homogénéité. Chaque région non-homogène est divisée, en parallèle (critère géométrique d'ajout de points) jusqu'à la convergence (toutes les régions sont homogènes). On peut donc considérer que c'est l'image qui guide la localisation des points.

La phase de fusion permet de supprimer les régions de Voronoï inutiles générées par l'étape de division. Cette étape est en fait identique à celle proposée par Ahuja dans son algorithme.

Le résultat final obtenu est un partitionnement composé de régions vérifiant deux règles permettant une bonne adéquation du partitionnement à l'image :

- Chaque polygone est homogène.
- Chaque polygone possède au moins un voisin qui ne lui est pas semblable.

Associés à l'approche division et fusion les diagrammes de Voronoï permettent de fournir un partitionnement adapté à l'image mais sans garantir un critère d'optimalité. C'est précisément sur ce point que porte cet article.

4 Partitionnement Optimal par Polygones de Voronoï

Dans cette section, on cherche à déterminer l'emplacement optimal de points dans une image (i.e. partitionnement optimal par des polygones de Voronoï). L'idée est de remplacer le processus de Poisson homogène d'intensité λ non-adapté à l'image par un processus ponctuel markovien plus général adapté à l'image par le biais d'une énergie (équation 1).

4.1 Les Processus Ponctuels Markoviens

Soit K un compact de \mathbb{R}^2 muni de la tribu des boréliens. On définit l'espace exponentiel Ω sur K comme étant l'ensemble de toutes les réalisations possibles de N points dans K , $0 \leq N < \infty$ ($\Omega = \{S = \{p_1, \dots, p_N\} \in K^N, N \in \mathbb{N}\}$) où les points p_i sont liés par une relation de voisinage. Dans ce travail cette relation est donnée par le graphe de Delaunay. Finalement, un processus ponctuel sur K est une variable aléatoire X à valeur dans Ω .

Le processus ponctuel est markovien si sa densité de probabilité est de la forme suivante (théorème de Hammersley-Clifford) :

$$f(x_1, \dots, x_N) = \frac{e^{xp-U(x_1, \dots, x_N)}}{Z}$$

où U est une énergie qui ne charge que les cliques du graphe de Delaunay (localité) et Z est une constante de normalisation. Dans cet article, U est attachée à l'image par l'équation 1. On peut remarquer que le processus de Poisson est



un processus ponctuel markovien associé à l'énergie 1 dont on ne conserve que le premier terme.

Ripley et Kelly sont à l'origine des processus ponctuels markovien [Ripp77]. Dans leur article, ils proposent comme système de voisinage des interactions à portée fixe comme par exemple les boules de rayon ϵ ($q \in N_S(p) \Leftrightarrow q \in B(p, \epsilon)$).

En 1989, Baddeley et Møller ont élargi cette notion de voisinage au graphe de Delaunay (interactions à portée variable) et ont proposé un théorème équivalent au théorème de Hammersley et Clifford (équivalence entre processus ponctuels markoviens et processus de Gibbs). Leur résultat est vérifié sous deux conditions techniques de consistance qui sont remplies par le graphe de Delaunay [Badd89, Kend90].

Une différence notable avec les processus ponctuels sur réseau [Pres74, Guyo92] utilisés classiquement en imagerie est que Ω a la puissance du continu ce qui rend plus délicat la construction des espaces probabilisés. De plus (contrairement au cas où l'espace Ω est fini), l'existence et l'unicité de la mesure invariante de Gibbs ne sont assurées que sous certaines conditions techniques.

4.1.1 Partitionnement optimal d'une image

L'idée centrale de cet article est de considérer la partition optimale en polygones de Voronoï d'une image comme la réalisation d'un processus ponctuel markovien, généralisant ainsi l'idée d'Ahuja. La contribution de ce travail porte donc sur l'application de la théorie des processus ponctuels markoviens associés au système de voisinage $N_S(p)$, $p \in S$ provenant du graphe de Delaunay. Le but est d'avoir une partition en polygones de Voronoï d'énergie minimale pour une image donnée. L'énergie U est composée d'un premier terme d'attache aux données et d'un deuxième terme représentant le coût à payer pour l'introduction d'un point :

$$U(S) = \lambda N + \sum_{p \in S} \psi(Vor_S(p)) \quad (1)$$

où $\psi(Vor_S(p))$ est un critère associé à la région de Voronoï $Vor_S(p)$ (par exemple la variance $\sigma(Vor_S(p))$ des niveaux de gris de $Vor_S(p)$), N est le nombre de points du diagramme de Voronoï associé à la réalisation S du processus spatial markovien et λ est un paramètre strictement positif. Associée à l'approche dynamique incrémentale (insertion et suppression locales d'un polygone) pour la construction du diagramme de Voronoï [Bowy81], l'approche markovienne est extrêmement bien adaptée aux partitionnements de Voronoï en vu de résoudre ce problème d'optimalité. En effet, l'insertion (et la suppression) d'un point se fait localement aussi bien du point de vue de la géométrie algorithmique (Fig. 2) que du point de vue de la géométrie stochastique.

En effet, du point de vue de la géométrie algorithmique on peut montrer que l'espérance du nombre de voisins d'un point $p \in S$ du graphe de Delaunay $DEL(S)$ est 6. Ceci montre qu'on est en présence d'une très bonne notion de localité.

Du point de vue de la géométrie stochastique on obtient la variation d'énergie suivante lors de l'insertion d'un nouveau point ξ :

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(S \cup \xi) - U(S) = \\ &= \lambda(N + 1) + \sum_{p \in S \cup \xi} (\psi(Vor_{S \cup \xi}(p))) \\ &\quad - \lambda N - \sum_{p \in S} (\psi(Vor_S(p))) \end{aligned}$$

Du fait de la localité du graphe de Delaunay, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \lambda + \psi(Vor_{S \cup \xi}(\xi)) + \\ &\quad \sum_{p \in N_{S \cup \xi}(\xi)} (\psi(Vor_{S \cup \xi}(p)) - \psi(Vor_S(p))) \end{aligned}$$

Pour la suppression, le schéma est le suivant (ξ est maintenant le point supprimé) :

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(S - \xi) - U(S) = \\ &= \lambda(N - 1) + \sum_{p \in S - \xi} (\psi(Vor_{S - \xi}(p))) \\ &\quad - \lambda N - \sum_{p \in S} (\psi(Vor_S(p))) \end{aligned}$$

Le même argument permet d'arriver à la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\lambda + \\ &\quad \sum_{\substack{p \in N_S(\xi) \\ p \neq \xi}} (\psi(Vor_{S - \xi}(p)) - \psi(Vor_S(p))) \end{aligned}$$

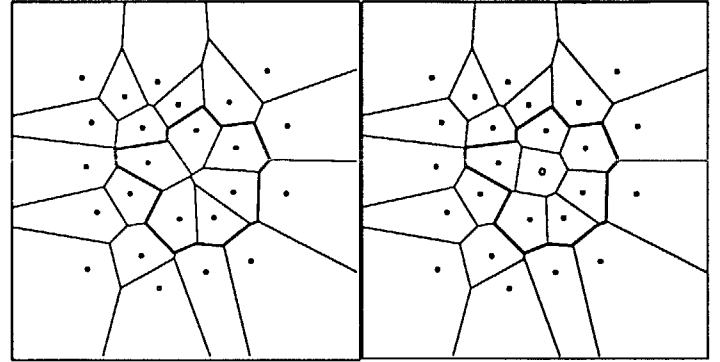


FIG. 2 - Ajout d'un point par modifications locales du diagramme (seuls les polygones voisins du polygone inséré sont modifiés)

Pour trouver la partition optimale (échantillonnage optimal) l'évolution du placement des points se fait selon un processus de naissance et de mort associé à la fonction d'énergie donnée par l'équation 1 dont la valeur tend à décroître selon le même principe que celui du recuit simulé [Moll94]. Des résultats de l'algorithme sont donnés (Fig. 3, Fig. 4 et Fig. 5). On peut voir sur ces figures que les points convergent de part et d'autre des contours pour minimiser le critère de variance utilisé (les contours se comportent comme attracteurs des points grâce au processus d'optimisation).

5 Conclusion

La grande richesse et le large domaine d'application de la géométrie stochastique m'ont permis de contribuer au problème de partitionnement optimal des images. D'autres applications sont envisageables dans de nombreux domaines et c'est sans doute une des grandes forces de la géométrie stochastique.

Les recherches devront s'orienter vers une amélioration de l'énergie donnée par l'équation 1 en utilisant des critères plus

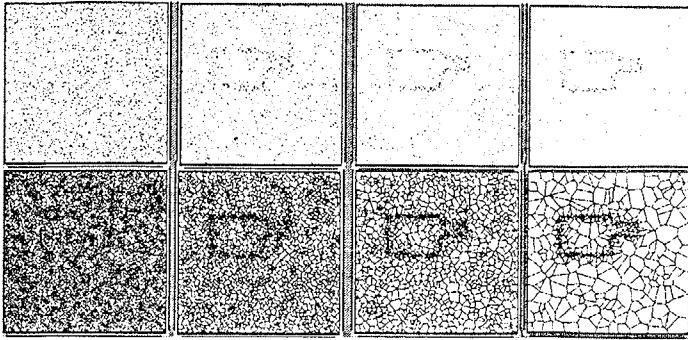


FIG. 3 - Le nombre de points est successivement : 5024, 2246, 1244 and 483.

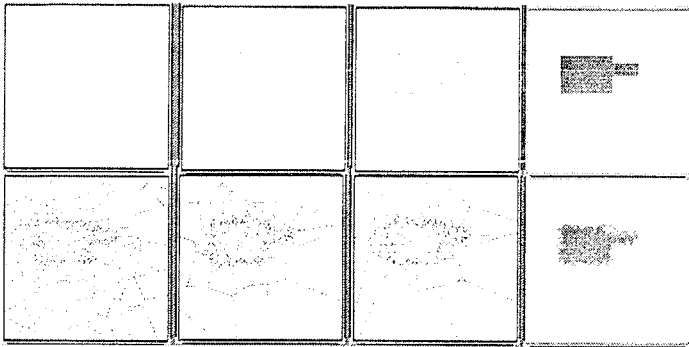


FIG. 4 - Le nombre de points est successivement : 361, 215, 145. La dernière colonne illustre l'image originale et l'image de la partition de Voronoï.

sophistiqués que la variance et en utilisant un potentiel gé-
rant les interactions de paire (troisième terme du potentiel
suivant) :

$$U(S) = \lambda N + \sum_{p \in S} \psi(\text{Vors}(p)) \\ + \sum_{(p,q) \in E} \phi(\text{Vors}(p), \text{Vors}(q))$$

On prendra alors soin de remarquer que le processus ne sera
markovien qu'à l'ordre 2, c'est à dire en faisant intervenir les
voisins des voisins. On peut toutefois remarquer que l'expres-
sion 1 tient déjà compte indirectement des voisins puisque la
forme des polygones dépend du voisinage. C'est sans doute

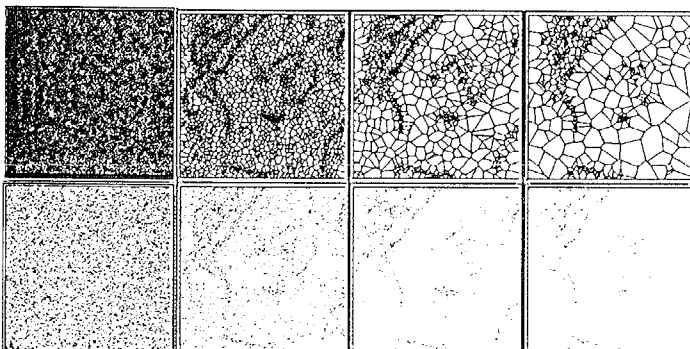


FIG. 5 - Processus du recuit simulé (naissance et mort). En
bas et de gauche à droite le nombre de points est successi-
vement : 5024, 2246, 1244 et 483. En haut, illustration des
diagrammes de Voronoï correspondants.

une des grandes force des diagrammes de Voronoï associés
aux processus ponctuels markoviens.

Références

- [Ahuja85] N. Ahuja, B. An, and B. Schachter. Image representation using Voronoi tessellation. *Computer Vision, Graphics, and Image processing*, 29:286-295, 1985.
- [Aure91] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 33(3):345-405, 1991.
- [Badd89] A. Baddeley and J. Møller. Nearest-Neighbour Markov Point Processes and Random Sets. *International Statistical Review*, 57(2):89-121, 1989.
- [Bert93] E. Bertin, F. Parazza, and J.-M. Chassery. Segmentation and measurement based on Voronoi diagram: Application to confocal microscopy. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 17(3):175-182, 1993.
- [Bert95] E. Bertin, H. Bishof, and P. Bertolino. Voronoi pyramid controlled by Hopfield neural networks. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, accepted, 1995.
- [Bowyer81] A. Bowyer. Computing Dirichlet tessellation. *Computer Journal*, 24(2):162-166, 1981.
- [Brand92] J. W. Brandt and V. R. Algazi. Continuous skeleton computation by Voronoi diagram. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 55(3):329-338, 1992.
- [Chas91] J.-M. Chassery and M. Melkemi. Diagramme de Voronoï appliqué la segmentation d'images et à la détection d'événements en imagerie multi-source. *Traitement du Signal*, 8:155-164, 1991.
- [Guyon92] X. Guyon. *Champs aléatoire sur un réseau*. Masson, Paris, 1992.
- [Kend90] W.S. Kendall. A spatial Markov property for nearest-neighbour Markov point process. *J. Applied Probability*, 28:767-778, 1990.
- [Marc92] R. Marceau and Y. Usson. Methods for the study of cellular sociology: Voronoi diagrams and parametrization of the spatial relationships. *J. Theor. Biol.*, 154:359-369, 1992.
- [Moll94] J. Møller. Markov Chain Monte Carlo and Spatial Point Process. Technical Report 293, Department of theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus, 1994.
- [Pres74] C.J. Preston. *Gibbs States on Countable Sets*. Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics 68, 1974.
- [Ripp77] B.D. Ripley and F.P. Kelly. Markov point processes. *J. Lond. Math. Soc.*, 15:188-192, 1977.