Analyse harmonique et description invariante de formes à niveaux de gris

Hubert Fonga* Faouzi Ghorbel†

* Université d'Orléans, département de mathématiques, rue de Chartres B.P 6759 - 45067 Orléans cedex 2.
† Groupe de Recherche Images et Formes, Institut National des Télécommunications & Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication, Cité Scientifique, rue Guglielmo Marconi, Villeneuve d'Ascq 59650 cedex.

RÉSUMÉ

Une approche par la théorie de représentation des groupes du problème de reconnaissance de formes est présentée. Le concept de la transformée de Fourier est étendue à deux groupes. De ces transformées de Fourier, on extrait deux familles d'invariants dans les images à niveaux de gris : L'une invariante par rapport aux rotations et dilatations ou contractions, l'autre invariante par déplacements.

ABSTRACT

A group representation theoritic approach to pattern recognition is presented. the concept of Fourier transform is extend to two groups. From theses Fourier transforms, one extract two families of invariants under certain transformations in gray level images. The first family is invariant under rotations and dilatations, and the second under motions.

1 Introduction

Un des problèmes souvent rencontrés en analyse d'images est la classification d'objets dans une scène. Après isolation d'un objet de la scène, on veut le reconnaître ou le discriminer. Dans certains cas, l'information utile pour reconnaître l'objet est entièrement contenue dans les contours : c'est par exemple le cas d'images binaires contenant des objets dont les contours peuvent être décrits par des courbes simples fermées et différentiables. Il existe alors des grandeurs permettant de les reconnaître ou de les discriminer : ce sont les **descripteurs de Fourier** [pers 77]. Si on s'intéresse à l'information contenue dans la texture, cette méthode ne permet plus de discriminer les objets car deux objets peuvent avoir les mêmes contours et des textures différentes. L'approche présentée dans cette communication généralise la méthode des descripteurs de Fourier en reconnaissance de formes. Le problème est formulé en terme de recherche d'invariants par rapport à des transformations dans un groupe. si X est un espace topologique, une image est considérée comme une applicaion f définie sur X à valeurs positives et à support compact. Si G est un groupe qui agit sur X via une action Ω, si f et h sont des images sur X et g un élément de G tel que $f(x) = h(\Omega(g).x)$ $\forall x \in$ X, alors les grandeurs recherchées doivent être identiques pour f et h. Dans cette communication, nous nous limitons aux images planes à niveaux de gris. Nous présentons deux familles d'invariants. La première, obtenue à partir de la transformée de Fourier sur le groupe $\mathbb{R}_+^\star \times S_1$ (où S_1 désigne le groupe des rotations dans le plan) est invariante par rotations, dilatations ou contractions. La seconde, obtenue à partir de la transformée de Fourier sur le groupe des déplacement, est invariante par déplacements.

2 cas du groupe $G = \mathbb{R}_+^\star \times S_1$

G est le produit direct de $\mathbb{R}_+^\star$ par S_1. Un élément de G est noté (ρ, θ), où ρ est le facteur d'échelle et θ est l'angle de rotation.
X=G ; l'action Ω de G sur X est le produit dans G. $\Omega(\rho,\theta).(\rho', \theta') = (\rho\rho', \theta + \theta')$

2.1 Transformée de Fourier sur G

Soit f une image plane exprimée en coordonnées polaires ; sa transformée de Fourier par rapport à G que nous notons M_f est donnée par :

$$M_f(k,v) = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(\rho,\theta)e^{-\imath k\theta}\rho^{-\imath v}\frac{d\rho}{\rho}d\theta$$

$k \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{R}$.
cette intégrale est en général divergente. Pour remédier à ce problème, on pose

$$M_f(k, s = \sigma_0 + \imath v) = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(\rho,\theta)e^{-\imath k\theta}\rho^{\sigma_0+\imath v}\frac{d\rho}{\rho}d\theta$$

pour $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Cette intégrale converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et on a

$$f(\rho,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} M_f(k, \sigma_0 + \imath v)e^{\imath k\theta}\rho^{\sigma_0+\imath v}dv$$

2.2 Invariants par dilatations et rotations

Soit f une image et $\sigma_0 > 0$ fixé : on pose

$$\begin{aligned} I_f(0,1) &= \mid M_f(1,1) \mid [M_f(0,1)]^{-1} \\ I_f(k,s) &= [M_f(k,s)][M_f(0,1)]^{-s+k}[M_f(1,1)]^{-k} \end{aligned}$$

avec $s = \sigma_0 + \imath v$.

Théorème 1 *Soit g une image ;*
$g(\rho,\theta) = f(\rho\rho\prime, \theta + \theta\prime)$ si et seulement si
$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad I_f(k, \sigma + \imath v) = I_g(k, \sigma + \imath v)$.

3 Cas du groupe des déplacements du plan

$G = S_1 \times_s \mathbb{R}^2$ produit semi-direct du sous-groupe des rotations S_1 et du sous-groupe des translations $\mathbb{R}^2$. Un élément de G est noté (θ, a, b) où θ désigne l'angle de rotation, et (a,b) le vecteur de translation.
X$= \mathbb{R}^2$; l'action Ω de G sur X est donnée par :

$$\Omega(\theta,a,b).(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta + a, x\sin\theta + y\cos\theta + b)$$

3.1 Transformée de Fourier sur G

Soit f une fonction de carré intégrable par rapport à la mesure de Haar sur G ; Sa transformée de Fourier que nous notons $\tilde{f}$ est définie par :

$$[\tilde{f}(\lambda)\psi](z) = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(\theta,x,y)\psi(\theta+z) \times [$$

$$\exp -\imath\lambda(x\cos(\theta+z) + y\sin(\theta+z))]d\theta dx dy$$

$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi \in L^2(S_1)$, $z \in S_1$.

Pour tout λ, $\tilde{f}(\lambda)$ est un endomorphisme de $L^2(S_1)$.

Soit f une fonction sur G ne dépendant pas du paramètre θ; en faisant le changement de variable $\theta\prime = z + \theta$, on a :

$$[\tilde{f}(\lambda)\psi](z) = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\psi(\theta\prime) \times [$$

$$\exp -\imath\lambda(x\cos(\theta\prime) + y\sin(\theta\prime))]d\theta\prime dx dy$$

Cette dernière expression ne dépend plus de z. $\tilde{f}(\lambda)$ est donc une forme linéaire sur $L^2(S_1)$. Ses composantes dans la base $B = \{\exp -\imath n\theta, n \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(S_1)$ sont donées par :

$$\tilde{f}_n(\lambda) = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-\imath\lambda(x\cos\theta + y\sin\theta)}e^{-\imath n\theta}d\theta dx dy$$

3.2 Invariants par déplacements

Soit f une image ; elle peut être considérée comme une fonction sur G ne dépendant pas de θ. On peut don calculer les $\tilde{f}_n(\lambda)$. Définissons sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction I_f par

$$I_f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mid \tilde{f}_n(\lambda) \mid^2$$

On montre facilement que si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ alors cette série converge pour tout λ.

Théorème 2 *Soient f et g deux images;*
si $g(x,y) = f((\theta,a,b)(x,y))$, alors

$$\forall\lambda > 0, \quad I_f(\lambda) = I_g(\lambda).$$

Nous appelons I_f le descripteur de Fourier généralisé de f. Ils peuvent être utilisés pour reconnaître ou discriminer les objets dans les images à niveaux de gris.

image 1

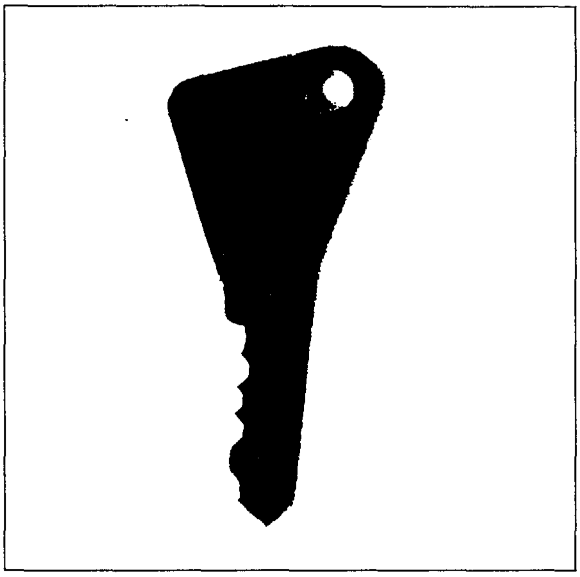

image 4

image 2

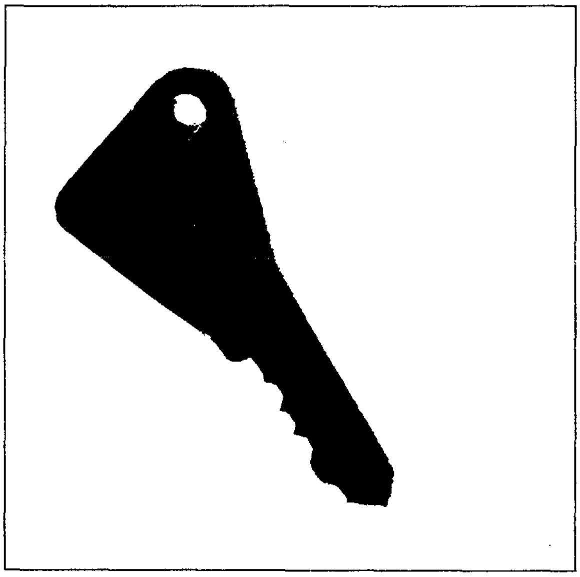

image 5

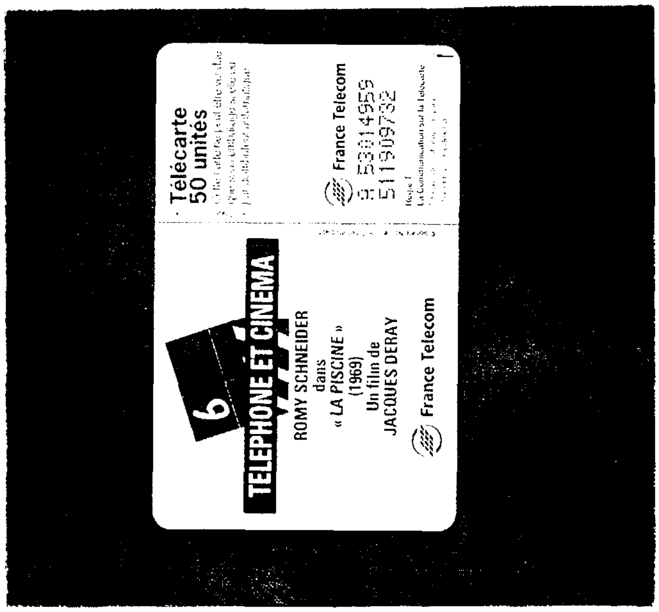

image 3

image 6

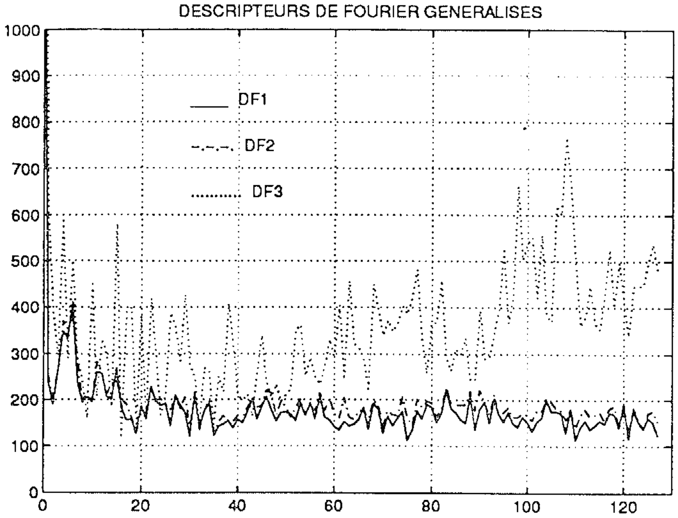

Figure 1: discrimination de texture

Df1, Df2 et Df3 sont respectivement les descripteurs de Fourier généralisés des images 1, 2 et 3. On observe l'invariance par déplacement et la discrimination de l'objet dans l'image 3. Remarquons que ces objets ont le même contour; ils diffèrent par leur texture.

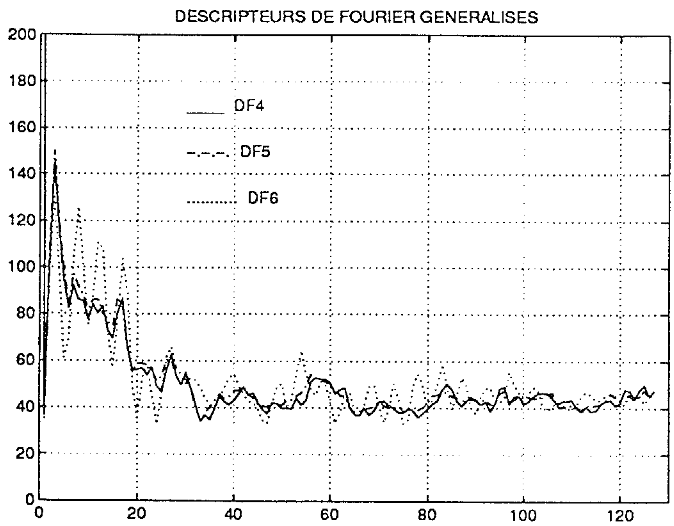

Figure 2: discrimination de contour

Df4, Df5 et Df6 sont respectivement les descripteurs de Fourier généralisés des images 4, 5 et 6.

Remarque:

- Tous les descripteurs ont été multipliés par la fonction $h(\lambda) = (\lambda - 1)^{2.5}$.

4 conclusion

Cette méthode de recherche d'invariants peut être appliquée à d'autres groupes de transformations. Dans le cas des groupes commutatifs, la méthode utilisée nous permet de construire des invariants complets (au sens qu'on peut reconstruire la forme à partir des invariants [Gour 89, Crim 82]). C'est ce que signifie l'équivalence dans le théorème 1. Quand le groupe n'est pas commutatif, la recherche d'invariants complets devient moins aisée. C'est l'une de nos préoccupations actuelles. Nous nous intéressons aussi à l'extension de cette méthode aux images tridimensionnelles.

Références

[Crim 82] . T.R Crimmins. A complete set of Fourier descriptors for two-dimensional shapes. IEEE Trans. Syst. Man Cybernet. Nov/dec 1982, Vol 12.

[Gaut 91] . J.P Gauthier & al. *Motions and pattern analysis: harmonic analysis on motion groups and their homogeneous spaces.* IEEE Trans. Syst. Man Cybernet. 1991, Vol 21.

[Ghor 94] . F. Ghorbel. *A complete invariant description for gray-level images by the harmonic analysis approach.* Pattern Recognition Letters. 1994, Vol 15 , PP 1043-1051.

[Gour 89] . F.Gourd *Une méthode d'invariantsde l'analyse harmonique en reconnaissance de formes* Traitement du signal, vol 2, 1989.

[pers 77] . E. Persoon & K. Fu *Shape discrimination using Fourier descriptors.* IEEE Trans. Syst. Man Cybernet. March 1977, Vol 7.