Compression d'images au moyen d'une modélisation par sinusoïdes exponentielles

Jan SKOWRONSKI

Laboratoire des Signaux et Systèmes,
CNRS-ESE, GDR-TDSI,
Plateau de Moulon
F-91192 Gif-sur-Yvette
skowronski@lss.supelec.fr

Ioannis DOLOGLOU

TU Delft
Dept. of Applied Physics
P0 Box 5046
NL-2600 GA Delft
dolo@si.tn.tudelft.nl

RÉSUMÉ

Une méthode de modélisation d'images par sinusoïdes exponentielles est présentée. La séparabilité du problème est soulignée par la décomposition en valeurs singulières de l'image ce qui entraîne que les paramètres peuvent être déterminés à partir de deux signaux multicanal. Un schéma de compression d'images est élaboré comme une application possible de la modélisation.

ABSTRACT

An image modeling method using exponential sinusoids is presented. Inspired by the separability of the problem, the singular value decomposition is applied to the image and by means of this, the problem is reduced to the modeling of two multichannel signals. As a possible application, a compression scheme for still images is presented.

1. INTRODUCTION

Dans cet article, nous présentons une méthode de modélisation d'images par une somme de sinusoïdes exponentielles

$$\mathbf{I} = \hat{\mathbf{I}} + \mathbf{I}_r = \mathbf{\Phi}\mathbf{A}\mathbf{\Psi}^T + \mathbf{I}_r, \qquad (1)$$

où $\mathbf{I}$ signifie l'image originale de dimensions $M \times N$ qui est décomposée en une image $\hat{\mathbf{I}}$, décrite par des sinusoïdes exponentielles, et une image résiduelle $\mathbf{I}_r$, l'erreur de la modélisation.

L'outil qui nous permet d'approximer l'image originale $\mathbf{I}$ par une somme de sinusoïdes exponentielles est l'algorithme de réduction du rang [1] [2]. Il consiste à approcher d'une manière itérative la matrice d'observation de $\mathbf{I}$ (de type Hankel) par une matrice d'observation de rang réduit (également de type Hankel), qui correspond au signal $\hat{\mathbf{I}}$ (partie 3).

Grâce à la décomposition en valeurs singulières (SVD), une représentation séparable de l'image $\hat{\mathbf{I}}$, qui reflète bien la séparabilité du problème d'estimation, est obtenue. La SVD nous permet ainsi de déterminer les paramètres $\mathbf{\Psi}$ ($\mathbf{\Phi}$) indépendamment à partir de deux signaux multicanal et nous employons dans ce but la Modélisation Exacte [3] [4] (partie 2). Comme une application possible, nous présentons dans la partie 4 un système de compression d'images fixes et nous discutons plus particulièrement le problème de la quantification des paramètres du modèle. Par rapport à des approches de codage plus classiques (codage par transformée [5], décomposition en ondelettes [6], etc.), cette approche permet une représentation adaptée du signal par un jeu de paramètres ($\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{\Phi}$).

2. MODÉLISATION DU SIGNAL

Dans cette partie nous décrivons une méthode pour déterminer les paramètres du modèle

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{A}\mathbf{\Psi}^T \qquad (2)$$

pour l'image $\hat{\mathbf{I}}$ de dimension $M \times N$. Nous nous interessons à l'estimation des sinusoïdes exponentielles horizontales $\psi_j \in \mathcal{C}$, $j = 1, \ldots, p$, et verticales $\phi_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, \ldots, q$, ainsi qu'à l'estimation de leurs amplitudes complexes $a_{ij} \in \mathcal{C}$. Avec ces définitions, les matrices $\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{A}$ s'écrivent

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \ldots & \phi_q \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 & \ldots & \phi_q^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \phi_1^M & \phi_2^M & \ldots & \phi_q^M \end{pmatrix} = [\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \ldots, \underline{\phi}_q] \qquad (3)$$

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \ldots & \psi_p \\ \psi_1^2 & \psi_2^2 & \ldots & \psi_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \psi_1^N & \psi_2^N & \ldots & \psi_p^N \end{pmatrix} = [\underline{\psi}_1, \underline{\psi}_2, \ldots, \underline{\psi}_p] \qquad (4)$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]. \qquad (5)$$

On peut faire un certain nombre de remarques concernant ce modèle. Les paramètres ψ_j (ϕ_i) ainsi que leurs complexes conjugés ψ_j^* (ϕ_i^*) forment la base. De plus, si l'on considère les images de base

$$\hat{\mathbf{I}}_b = [\underline{\phi}_i, \underline{\phi}_{i+1}] \begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_j^T \\ \underline{\psi}_{j+1}^T \end{bmatrix} \qquad (6)$$

avec $\underline{\phi}_{i+1} = \underline{\phi}_i^*$ et $\underline{\psi}_{j+1} = \underline{\psi}_j^*$, celles-ci sont réelles, et par conséquent

$$a_{i,j} = a_{i+1,j+1}^*, \qquad a_{i,j+1} = a_{i+1,j}^*. \qquad (7)$$

En ce qui concerne les paramètres réels, nous avons alors $\frac{p}{2}$ ($\frac{q}{2}$) facteurs exponentiels $\alpha_{\psi_j} = |\psi_j|$ ($\alpha_{\phi_i} = |\phi_i|$), $\frac{p}{2}$ ($\frac{q}{2}$) fréquences $\omega_{\psi_j} = \tan(\frac{\psi_j^I}{\psi_j^R})$ ($\omega_{\phi_i} = \tan(\frac{\phi_i^I}{\phi_i^R})$) et $\frac{pq}{2}$ amplitudes complexes, c.à.d., pq paramètres réels. On constate aussi que le modèle (2) est séparable et par conséquent les paramètres horizontaux et verticaux peuvent être déterminés indépendamment

$$\hat{\mathbf{I}} = (\mathbf{A}_v\mathbf{\Phi}^T)^T(\mathbf{A}_h\mathbf{\Psi}^T) \text{ et } \mathbf{A} = \mathbf{A}_v^T\mathbf{A}_h. \tag{8}$$

Avec la décomposition en valeurs singulières (SVD) [7], nous obtenons une autre décomposition séparable de $\hat{\mathbf{I}}$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = (\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T)^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T) = \mathbf{I}_v^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{I}_h \tag{9}$$

et on observe que les matrices $\mathbf{A}_h, \mathbf{\Psi}$ ($\mathbf{A}_v, \mathbf{\Phi}$) peuvent se calculer à partir de $\mathbf{I}_h$ ($\mathbf{I}_v$) (à une matrice de normalisation $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ près). Dans l'équation (9) $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ se composent des vecteurs singuliers de gauche et de droite, respectivement, et $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale, qui contient en ordre décroissant les valeurs singulières $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_o$, avec $o = \min(M, N)$. Bien sûr, les paramètres du modèle (2) peuvent être déterminer directement à partir de l'image $\hat{\mathbf{I}}$, mais le calcul à partir de $\mathbf{I}_h$ ($\mathbf{I}_v$) a l'avantage, que la complexité du problème peut être réduite, puisque les vecteurs singuliers, correspondants aux valeurs singulières petites, peuvent être négligés. De plus, la SVD fait appraître clairement la séparabilité du problème et le transforme en un problème multicanal [2].

Le calcul des paramètres se fait en deux étapes. D'abord, moyennant des méthodes d'analyse spectrales paramétriques [8] les sinusoïdes exponentielles ψ_j (ϕ_i) sont déterminées. Nous employons une méthode qui s'appelle la Modélisation Exacte [3] [4] pour faire ceci. Dans une deuxième étape, les amplitudes complexes sont calculées en employant la méthode de Prony.

L'estimation des paramètres horizontaux $\psi_j, j = 1, \ldots, p$, se fait alors à partir du signal multicanal $\mathbf{I}_h$ de dimension $k \times N$, c.à.d. composé de k canaux à N échantillons chacun. Le calcul des ϕ_i, $i = 1, \ldots, q$, à partir de $\mathbf{I}_v$ suit le même formalisme.

Nous souhaitons décrire chaque ligne l du signal $\mathbf{I}_h(l)$ par la somme des mêmes p sinusoïdes exponentielles

$$\mathbf{I}_h(l) = \sum_{j=1}^{p} a_j(l)\psi_j^n = \mathbf{a}(l)\mathbf{\Psi}^T, \quad n = 1, \ldots, N \,,\, l = 1, \ldots, k \tag{10}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_h &= \begin{pmatrix} a_1(1) & a_2(1) & \ldots & a_p(1) \\ a_1(2) & a_2(2) & \ldots & a_p(2) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_1(k) & a_2(k) & \ldots & a_p(k) \end{pmatrix} \\ &= [\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(2), \ldots, \mathbf{a}(k)]^T. \end{aligned} \tag{11}$$

c.à.d. chaque ligne doit être modélisée par le même modèle AR d'ordre p et nous avons pour chaque ligne

$$\mathbf{h}^T\mathbf{S}_l = \mathbf{e}_l, \qquad l = 1, \ldots, k \tag{12}$$

où $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \ldots, h_{p+1}]^T$ représente le vecteur des coefficients du modèle, $\mathbf{e}_l$ l'erreur de modélisation et $\mathbf{S}_l$ la matrice de Hankel d'ordre p de la ligne l de $\mathbf{I}_h$

$$\mathbf{S}_l = \begin{pmatrix} I_h(l,1) & I_h(l,2) & \ldots & I_h(l, N-p) \\ I_h(l,2) & I_h(l,3) & \ldots & I_h(l, N-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_h(l, p+1) & I_h(l, p+2) & \ldots & I_h(l, N) \end{pmatrix} \tag{13}$$

où $I_h(l, n)$ indique le $n^{\text{ième}}$ élement de la $l^{\text{ième}}$ ligne de $\mathbf{I}_h$. On peut rassembler les k équations matricielles

$$\mathbf{e}^T = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k] = \mathbf{h}^T[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_k] = \mathbf{h}^T\mathbf{S}, \tag{14}$$

où $\mathbf{S}$ est obtenue par concaténation des k matrices de chaque ligne, et la minimisation de l'erreur quadratique $\mathbf{e}^T\mathbf{e}$, sous contrainte de $\mathbf{h}^T\mathbf{h} = 1$, nous donne

$$e^2 = \mathbf{e}^T\mathbf{e} = \mathbf{h}^T\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{h} + \lambda(\mathbf{h}^T\mathbf{h} - 1). \tag{15}$$

Le vecteur propre $\mathbf{h}_{min}$ qui correspond à la valeur propre $\lambda_{min} = e_{min}^2$ la plus petite de la matrice de covariance $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ représente la solution et ces zéros donnent les ψ_j, $j = 1, \ldots, p$. Puisque λ_{min} n'est pas nulle en général, les estimées des ψ_j sont erronées, ce qui entraîne des distortions importantes dans la réconstruction selon (2), et il était montré dans [4] qu'il était plus avantageux d'employer la Modélisation Exacte pour déterminer les sinusoïdes exponentielles ψ_j.

Le principe de la Modélisation Exacte est de choisir l'ordre du modèle p_m suffisamment grand pour assurer que l'erreur de modélisation s'annule exactement. On trouve facilement

$$p_m \geq \frac{k}{k+1}N, \qquad p_m < N. \tag{16}$$

La deuxième contrainte est dûe au fait que l'ordre du modèle ne doit pas dépasser le nombre d'échantillons par ligne. Grâce à la décomposition en valeurs singulières ($k \leq N$) exactement, et, pratiquement, ($k \leq N-1$), ce qui entraîne que la Modélisation Exacte est possible. Le nombre de sinusoïdes exponentielles p_m est maintenant supérieur au nombre p souhaité de sinusoïdes exponentielles. Nous appliquons une première fois la méthode de Prony pour choisir parmi les p_m fonctions celles qui sont énergétiquement les plus importantes, ce qui nous donne les ψ_j, $j = 1, \ldots, p$. Puisque cette base est non-orthogonale, la méthode de Prony est appliquée une deuxième fois pour déterminer la matrice d'amplitudes $\mathbf{A}_h$. Notons que cette méthode de sélection des ψ_j, $j = 1, \ldots, p$, n'est pas optimale car

la base n'est pas orthogonale , mais elle donne cependant des résultats expérimentaux satifaisants en comparaison avec d'autres méthodes comme par exemple ACMP [9].
En ce qui concerne la complexité de la méthode, il faut surtout citer le calcul des zéros du polynôme $\mathbf{h}_{min}$ qui nécessite environ $15(p_m+1)^3$ opérations [7].

3. UN ALGORITHME DE RÉDUCTION DU RANG

Quand on effectue quelques expériences, on remarque, que la méthode de modélisation présentée précédemment donne de bons résultats, seulement si le nombre de sinusoïdes exponentielles contenues dans le signal est proche du nombre p à déterminer. Sinon, des artefacts apparaissent dans la représentation selon (2). Par conséquent, il est nécessaire de réduire le nombre de sinusoïdes exponentielles dans le signal avant de le modéliser. Pour cela, on se sert d'un algorithme de réduction du rang [1] [2]. Nous décrivons la procedure pour le signal multicanal $\mathbf{I}_h$, pour lequel une matrice d'observation $\mathbf{S}$ d'ordre p a été définie par les équations (13) et (14). Cette matrice correspond à la matrice de rang réduit $\hat{\mathbf{S}}(t=0)$ à l'itération $t=0$. Dans le but de réduire le rang de cette matrice, on la décompose en valeurs singulières

$$\hat{\mathbf{S}}(t-1)=\sum_{i=1}^{\bar{p}+1} d_i \mathbf{y}_i \mathbf{x}_i^t \tag{17}$$

et on met à zéro les $(\bar{p}+1-p)$ plus petites valeurs singulières, ce qui nous donne $\bar{\mathbf{S}}(t)$. Cette matrice n'est plus de type Hankel, mais exactement de rang réduit. On obtient la matrice de Hankel la plus proche de $\bar{\mathbf{S}}(t)$ par projection orthogonale sur l'espace des matrices de Hankel, ce qui nous donne $\hat{\mathbf{S}}(t)$. Puisque $\hat{\mathbf{S}}(t)$ n'est plus de rang réduit, il faut de nouveau effectuer une SVD. En itérant ce processus on s'approche de plus en plus d'une matrice de Hankel et de rang réduit [2].
La complexité de cet algorithme est donnée principalement par la SVD qui demande approximativement $7k(N-\bar{p})(\bar{p}+1)^2+\frac{11}{3}(\bar{p}+1)^3$ opérations [7].

4. APPLICATION À LA COMPRESSION D'IMAGES

Dans cette partie, nous traitons la compression d'images comme une possibilité d'exploiter la modèlisation par sinusoïdes exponentielles selon (2). Le problème majeur est la quantification des paramètres. Pour cela, normalisons les vecteurs de bases $\underline{\psi}_j$ ($\underline{\phi}_i$) tels que leurs normes

$$||\underline{\psi}_j||_2^2=\frac{1}{N}\underline{\psi}_j^{*T}\underline{\psi}_j=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|\psi_j|^{2n}, \quad j=1,\ldots,p \tag{18}$$

$$||\underline{\phi}_i||_2^2=\frac{1}{M}\underline{\phi}_i^{*T}\underline{\phi}_i=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}|\phi_i|^{2m}, \quad i=1,\ldots,q \tag{19}$$

soient égales à 1. Avec ceci les vecteurs de base deviennent

$$\tilde{\underline{\psi}}_j=\mathrm{diag}(||\underline{\psi}_j||_2)^{-1}\underline{\psi}_j, \qquad j=1,\ldots,p \tag{20}$$

$$\tilde{\underline{\phi}}_i=\mathrm{diag}(||\underline{\phi}_i||_2)^{-1}\underline{\phi}_i, \qquad i=1,\ldots,q \tag{21}$$

et par conséquent, les amplitudes $\mathbf{A}$ s'écrivent

$$\tilde{\mathbf{A}}=\mathrm{diag}(||\underline{\phi}_i||_2)\mathbf{A}\mathrm{diag}(||\underline{\psi}_j||_2) \tag{22}$$

et peuvent plutôt être interprétées comme des énergies des images de bases (6). Ces énergies, c.à.d. la norme des $\mathbf{I}_b$ sont égales à

$$||\mathbf{I}_b||_2^2=\frac{1}{MN}\mathbf{I}_b^T\mathbf{I}_b=4[|\tilde{a}_{i,j}|+|\tilde{a}_{i,j+1}|]^2 \\ -8|\tilde{a}_{i,j}||\tilde{a}_{i,j+1}|[1-\frac{\frac{1}{N}\underline{\psi}_j^T\underline{\psi}_j}{||\underline{\psi}_j||_2^2}]. \tag{23}$$

et pour des raisons de simplicité nous faisons l'hypothèse que le dernier terme. qui n'est jamais positif, est négligeable et nous obtenons ainsi

$$||\mathbf{I}_b||_2=2[|\tilde{a}_{i,j}|+|\tilde{a}_{i,j+1}|]. \tag{24}$$

De même, l'interférence entre plusieurs images de base peut résulter en une image d'énergie plus faible que la somme des énergies, mais nous ne tenons pas compte de cet effet non plus. Moyennant ces hypothèses, les paramètres de $\tilde{\mathbf{A}}$ peuvent être quantifiés séparément et en priorité suivant leurs valeurs.
Le système de compression se décrit ainsi. D'abord, les fonctions de base sont ordonnées tel que dans la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ les valeurs importantes se trouvent en haut à gauche et que les valeurs les plus faibles figurent en bas à droite. Les paramètres ψ_j (ϕ_i) sont quantifiés uniformément. En ce qui concerne les amplitudes, par contre, on applique une méthode proche de la méthode 'Zero Tree' [10] dans le but d'exploiter la structure particulière de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$. Nous transformons la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ en un vecteur $\tilde{\mathbf{a}}$ en utilisant un balayage de $\tilde{\mathbf{A}}$ en zig-zag. Le vecteur $\tilde{\mathbf{a}}$ contient alors des valeurs importantes aux petits indices et des valeurs faibles aux grands indices. Avec un seuil initial T on crée une liste qui contient des éléments ± 1 pour représenter un coefficient important (positif ou négatif), 0 pour un coefficient plus petit que le seuil T et EOB pour indiquer des coefficients faibles jusqu'à la fin du vecteur $\tilde{\mathbf{a}}$. Dans une deuxième étape on augmente la résolution des coefficients significatifs, c.à.d. on classe leurs valeurs absolues dans les intervalles $[T,\frac{3}{2}T)$ et $[\frac{3}{2}T,2T)$, par une suite binaire. Ensuite, on recommence ce processus avec un seuil de demi-valeur. Après avoir atteinte

la résolution souhaitée, on dispose de deux suites, une sur quatre et l'autre sur deux niveaux, qui représentent une version quantifiée de $\tilde{\mathbf{a}}$. Ces suites sont codées par un codeur arithmétique adaptatif [10].
Un résultat expérimental peut être vu dans la figure 1, montrant l'image 'Lena' comprimée (a) par la Modélisation Exacte et (b) par la norme JPEG [5] avec un taux de compression de 30 par rapport à l'originale. On obsèrve que les résultats se compare bien en ce qui concerne leurs performances objectives. Par contre, en ce qui concerne la qualité visuelle, on peut constater, que contrairement à la norme JPEG aucun effet de bloc n'est visible. Ceci peut s'expliquer par le traitement global de l'image de rang réduit $\hat{\mathbf{I}}$.

5. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article une méthode de modélisation d'images par sinusoïdes exponentielles. Grâce à un algorithme de réduction du rang le nombre de paramètres décrivant l'image peut être réduit, ce qui entraîne d'une part des faibles dégradations, mais d'autres part une représentation plus compacte de l'image. Ceci a été démontré expérimentalement par l'application de la méthode à la compression d'images.

6. RÉFÉRENCES

[1] J. Cadzow, "Signal enhancement - a composite property mapping algorithm," *IEEE Tr. on ASSP*, vol. 36, pp. 49–62, Jan. 1988.

[2] I. Dologlou, J. Pesquet, and G. Carayannis, "Analyse multidimensionnelle à l'aide d'un nouveau modèle multicanal et d'un algorithme de projections successives. applications à l'analyse d'images," in $14^{ème}$ *Colloque GRETSI*, Sept. 1993.

[3] I. Dologlou and G. Carayannis, "Lpc/svd analysis of signals with zero modeling error," *Signal Processing*, vol. 23, pp. 293–298, 1991.

[4] J. Skowronski and I. Dologlou, "Two dimensional zero error modeling for image compression," in 3^{rd} *International Workshop on SVD and Signal Processing*, Leuven, Belgium, Aug. 1994.

[5] G. Wallace, "The jpeg still picture compression standard," *Comm. of the ACM*, vol. 34, no. 4, 1991.

[6] M. Vetterli and J. Kovacevic, *Wavelets and Subband Coding*. Englewood Cliffs, New Jersey 07632: Prentice-Hall, Inc., 1995.

[7] G. Golub and C. Van Loan, *Matrix Computation*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1983.

[8] D. Johnson and D. Dudgeon, *Array Signal Processing*. Englewood Cliffs, New Jersey 07632: Prentice-Hall, Inc., 1993.

[9] F. Vanpoucke, M. Moonen, and Y. Berthoumieu, "An efficient subspace algorithm for 2d harmonic retrieval," in *ICASSP-94*, April 1994.

[10] J. Shapiro, "Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients," *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 41, pp. 3445–3462, Dec. 1993.

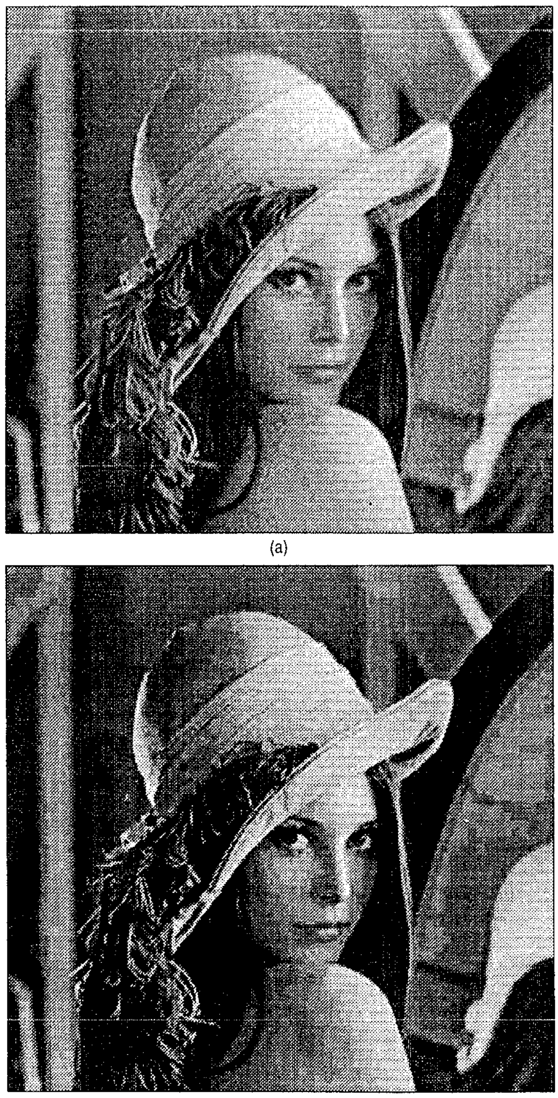

FIG. 1 - *Lena codée (a) par la Modélisation Exacte (RSB crête : 30.2 dB, Taux de compression : 31.3), (b) par JPEG (RSB crête : 29.5 dB, Taux de compression : 30)*