

PROBLÈME MAL POSÉ ET RECONSTRUCTION BAYÉSIENNE EN TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE

THIERRY MARTIN, JÉRÔME IDIER

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS–ESE–UPS),
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex
martin@lss.supelec.fr, idier@lss.supelec.fr

RÉSUMÉ

La tomographie d'impédance électrique (TIÉ) des milieux conducteurs fermés est un problème inverse mal posé. La méthode des éléments finis (MÉF), utilisée pour résoudre le problème direct, modélise les observations comme une fonction non linéaire de la conductivité. Nous utilisons pour la reconstruction une formulation bayésienne de l'inversion. Un modèle markovien de douceur *a priori* permettant la restauration de discontinuités est introduit pour résoudre le problème par *maximum a posteriori* (MAP). Les résultats obtenus par minimisation de critère apportent une amélioration notable de la résolution.

ABSTRACT

Electrical impedance tomography (EIT) of closed conductive media is an ill-posed inverse problem. The choice of the finite elements method (FEM) to solve the direct problem induces the observation set to be a non linear function of the conductivity distribution. For the reconstruction, which is performed within a Bayesian framework, we opted for a Markovian smoothing a priori model, enabling however discontinuities restoration. The results obtained through the minimisation of the MAP criterion bring worthy resolution improvement.

1. INTRODUCTION

La tomographie d'impédance électrique consiste à injecter des courants dans un corps, à recueillir les tensions résultantes sur son pourtour, afin de pouvoir déterminer la distribution de conductivité de l'objet. Utile en contrôle non destructif, on trouve des applications de ce moyen d'investigation en imagerie biomédicale (pour des milieux finis) ainsi qu'en géophysique (milieux infinis). Nous nous intéressons ici à la reconstruction bidimensionnelle d'objets fermés, soumis à des courants continus. Notons Ω le domaine en question, $\bar{\Omega}$ son contour, I , V les distributions respectives du flux de courant et du potentiel électrique sur Ω et \bar{I} , \bar{V} les mêmes distributions sur $\bar{\Omega}$. Notons enfin σ la distribution de conductivité. Le problème direct correspond alors au calcul de V connaissant \bar{I} et σ , tandis que le problème inverse, que nous cherchons à résoudre, consiste à déterminer σ à partir de \bar{I} et \bar{V} . Dans le paragraphe 2, nous présentons brièvement la modélisation de la physique du problème et la méthode de résolution du problème direct que nous avons choisi. Le paragraphe 3 détaille la résolution du problème inverse à partir du problème direct à l'aide de la formulation bayésienne. Le paragraphe 4 expose les résultats obtenus.

2. RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT

Les équations de Maxwell permettent de modéliser le problème direct par une équation aux dérivées partielles de type Poisson : $\text{div}(\sigma \text{grad } V) = 0$. La première difficulté est qu'il n'existe pas, dans le cas général, de solution analytique pour la résoudre [14]. Barber et Brown [2] s'appuient sur la solution analytique obtenue dans le cas uniforme sur un domaine circulaire pour proposer un modèle linéarisé

du problème direct. Tasto et Schomberg [16] résolvent ce dernier par une méthode de différence finie reposant sur une linéarisation des équations aux dérivées partielles. Toutefois, les objets à reconstruire possèdent souvent simultanément un fort contraste et une forte extension spatiale à l'intérieur du domaine. C'est pourquoi l'utilisation de la linéarisation pour la résolution du problème direct constitue une sérieuse limitation pour la reconstruction.

Une solution est apportée grâce à une autre formulation, équivalente, de la physique du problème, appelée formulation variationnelle, qui revient, pour le problème direct, à résoudre en V l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } V|^2 dx + \int_{\bar{\Omega}} V \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} ds = 0. \quad (1)$$

Plus adaptée à l'analyse que la formulation aux dérivées partielles, cette équation a permis [15, 1] de montrer que, d'une part, le problème direct est bien posé et que, d'autre part, le problème inverse admet une solution, que celle-ci est unique mais qu'elle est instable : le problème inverse est donc mal posé. En discrétisant cette formulation, ce qui revient à scinder le domaine, disons en P mailles correspondant à N nœuds sur Ω , dont \bar{N} sur la frontière $\bar{\Omega}$, on peut simuler [10, 9, 11] le problème direct : c'est la méthode des éléments finis. Dès lors, le calcul du problème direct restreint à la frontière, *i.e.* le calcul des tensions observées sur $\bar{\Omega}$ en fonction des courants imposés s'écrit :

$$\bar{v} = PA(\sigma)^{-1} P^T D\bar{t}, \quad (2)$$

où \bar{v} et \bar{t} sont les vecteurs de taille \bar{N} correspondant à la discrétisation de \bar{V} et \bar{I} ; σ , de taille P , est le vecteur des conductivités. A est la matrice de « rigidité » du problème,



donnée par

$$a_{ij} = \sum_{p \in e(i) \cap e(j)} \sigma_p \theta(i, j, p), \quad (3)$$

où $e(i)$ désigne l'ensemble des mailles adjacentes au nœud i , et $\theta(i, j, p)$ dépend des caractéristiques géométriques du maillage sur le domaine Ω . \mathbf{A} est une matrice creuse (elle contient plus de 98% de zéros en pratique), définie positive et de taille $(N - 1) \times (N - 1)$. \mathbf{P} est un opérateur $\bar{N} \times (N - 1)$ de projection sur la frontière et \mathbf{D} est un opérateur de différence, tel que :

$$(\mathbf{D}\bar{v})_n = \bar{v}_{n+1} - \bar{v}_{n-1} \text{ modulo } \bar{N}, \quad (4)$$

i.e. la différence des flux de courant entre les deux points de la frontière adjacents au point d'indice n . La matrice \mathbf{A} dépend linéairement de σ ; le calcul du problème direct par la MÉF est donc une fonction non linéaire de la conductivité.

En fait, la discrétisation par la MÉF conduit à une approximation par des fonctions: le flux de courant et la tension sont approchés par des fonctions d'ordre 1 (linéaires par morceaux) dont \bar{v} et \bar{v} contiennent les valeurs aux nœuds du domaine, tandis que la conductivité est approchée par une fonction d'ordre 0 (constante par morceaux) dont σ contient les valeurs par maille. Il faut souligner que l'approximation par la MÉF est bien plus fine, en pratique, qu'une approximation linéaire car la méthode converge rapidement lorsque la taille des éléments diminue (convergence en $O(r^2)$ où r est le diamètre d'une maille [6]), tandis que le coût de calcul, qui réside essentiellement dans l'inversion de la matrice $\mathbf{A}(\sigma)$, est fortement réduit par l'utilisation d'algorithmes d'inversion de matrices creuses.

3. FORMULATION DE L'INVERSION

Lors du calcul du problème direct par la MÉF, la donnée de \bar{v} permet, σ étant connu, de déterminer \bar{v} . Ces quantités sont respectivement de taille \bar{N} , P et \bar{N} . En remarquant que $\bar{N} < N < P$, on s'aperçoit que, pour l'inversion, un seul jeu d'observations est insuffisant si l'on tient à avoir au moins autant de données que d'inconnues. La première manière de remédier au problème, qu'ont utilisée tous les auteurs, est de fournir plusieurs jeux de données indépendantes, soit K observations avec $K > P/\bar{N}$. La seconde manière consiste à introduire une information *a priori* de façon à régulariser la solution. En 90, Kohn et McKenney, tout en s'appuyant sur la MÉF pour le problème direct, utilisent une méthode itérative de type point fixe pour la reconstruction. Cette méthode, ainsi que la plupart des méthodes proposées en TIÉ jusqu'alors, est extrêmement sensible au bruit et n'utilise pas de régularisation. En 91, Hua *et al.* [9] mettent en œuvre, pour la reconstruction, la minimisation d'un critère mesurant la distance entre les observations et la simulation par MÉF du problème direct. Cela leur permet d'introduire un terme supplémentaire, quadratique en σ et d'ordre 0, destiné à rendre la solution plus stable numériquement. En 94, Cohen-Bacrie [5], qui utilise une linéarisation pour le problème direct, justifie, par une formulation bayésienne de l'inversion [7], d'opérer la minimisation d'un critère régularisé. L'emploi d'un modèle *a priori* gaussien avec uniformisation de la variance lui permet d'améliorer sensiblement les résultats des méthodes

TIÉ linéarisées.

Nous proposons ici d'étendre les méthodes bayésiennes à l'utilisation des modèles directs non linéaires. Nous considérons une incertitude gaussienne, blanche et centrée \bar{v}^k pour le modèle des observations $k = 1, \dots, K$,

$$\bar{v}^k = \mathbf{P}\mathbf{A}(\sigma)^{-1}\mathbf{P}^\top\mathbf{D}\bar{v}^k + \bar{b}^k. \quad (5)$$

Avant d'introduire une loi *a priori*, il est important de préciser la variable de reconstruction. En effet, le problème étant non linéaire, rien n'interdit d'utiliser une autre variable que la conductivité pour la reconstruction. De fait, nous proposons l'utilisation de la log-conductivité $\gamma = \log(\sigma)$. Cette variable présente plusieurs avantages. Elle a déjà été utilisée par Barber et Brown [2] car elle permet de simplifier l'écriture des équations de Maxwell et constitue ainsi une bonne transformation avant une linéarisation. D'autre part, elle présente l'avantage d'être réelle, sans être contrainte à la positivité comme σ . Enfin, le changement de variable de σ à γ ne complique pas le calcul du critère ni de son gradient. À partir d'une loi *a priori* $p(\gamma)$ sur la distribution de log-conductivité, nous pouvons calculer la loi *a posteriori* grâce à la règle de Bayes :

$$p(\gamma|\bar{v}^k; \bar{v}^k) \propto p(\bar{v}^k|\gamma; \bar{v}^k)p(\gamma). \quad (6)$$

Le choix de l'estimateur du *maximum a posteriori* :

$$\hat{\gamma}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\gamma} p(\gamma|\bar{v}^k; \bar{v}^k) \quad (7)$$

revient [7] à minimiser le critère :

$$J(\gamma) = \sum_{k=1}^K \|\bar{v}^k - \mathbf{P}\mathbf{A}(\exp(\gamma))^{-1}\mathbf{P}^\top\mathbf{D}\bar{v}^k\|^2 + \Phi(\gamma), \quad (8)$$

expression dans laquelle le terme de gauche correspond à la vraisemblance des observations et le terme de droite est la fonction de régularisation provenant de l'*a priori*. L'existence de ce terme, déjà pleinement justifiée pour des problèmes inverses mal posés, l'est ici d'autant plus que le problème est non linéaire et à large support, se traduisant en particulier par une forte atténuation de la réponse en tension aux éléments situés à l'intérieur du domaine et, pour tout γ , par un nombre de condition élevé de $\mathbf{A}(\exp(\gamma))$.

Le choix de l'estimateur étant posé, quelle loi *a priori* utiliser? Les applications de TIÉ, en particulier dans le domaine médical, font souvent apparaître des structures homogènes séparées par des discontinuités. L'utilisation de la fonction convexe de Huber $h_T(t)$:

$$h_T(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } |t| < T \\ (2Tt - T^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

sur les différences entre pixels, fournit un *a priori* markovien qui, tout en favorisant par sa partie quadratique l'homogénéité de la reconstruction, autorise, grâce à ses parties linéaires, la restauration de discontinuités [4]. La partie régularisante du critère s'écrit donc :

$$\Phi_{\lambda, T}(\gamma) = \frac{\lambda^2}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{q \in v(p)} h_T(\gamma_p - \gamma_q) \quad (9)$$

où " $q \in v(p)$ " désigne l'appartenance de la maille numérotée q au voisinage de la maille numérotée p . Nous avons réalisé

une discrétisation du milieu reposant sur des mailles triangulaires. Nous avons donc choisi comme système de voisinage les trois éléments contigus aux côtés d'une maille, ce qui correspond à un voisinage d'ordre 1 en coordonnées cartésiennes.

Le critère $J(\gamma)$ se présente donc comme la somme d'un terme non convexe, éventuellement multimodal, et d'un terme convexe. L'*a priori* $\Phi_{\lambda,T}(\gamma)$ présente ainsi l'intérêt de réduire la non convexité globale du critère ; il en facilite donc la minimisation, même locale. Hua *et al.* [9] utilisent une variante de la méthode de Newton-Raphson [13] pour minimiser le critère. Cette méthode d'ordre 2 présente d'une part, l'inconvénient d'être extrêmement lourde car elle requiert le calcul d'une approximation du hessien ; d'autre part, elle semble très peu justifiée du fait de l'allure non convexe du critère de vraisemblance qui approche très peu celle d'un parabolioïde. La complexité et la lenteur d'un recuit simulé étant rédhibitoires, nous avons utilisé une méthode de descente d'ordre 1 de type gradient conjugué [13], qui s'avère simple et rapide.

4. MISE EN ŒUVRE ET RÉSULTATS

Nous présentons ici les résultats obtenus après simulations. Nous étudions la reconstruction d'un objet circulaire comprenant deux discontinuités de contraste élevé. Le milieu est discrétisé avec $\bar{N} = 32$ points à la frontière, $N = 145$ nœuds et $P = 256$ mailles. Nous avons donc imposé à la frontière du domaine $256/32 = 8$ distributions de courant indépendantes, correspondant à une même fonction (une période de sinussoïde) pivotée 8 fois de $2\pi/8$ par rapport au centre du domaine. Cette fonction est celle qui, sur un domaine circulaire, donne les meilleures réponses puisqu'elle génère des lignes de courant rectilignes lorsque la conductivité du milieu est homogène [8]. De manière générale, quelque soit la forme du domaine, il est primordial, étant donné la forte atténuation de l'information provenant de l'intérieur du milieu, d'imposer des distributions de basse fréquence spatiale, susceptibles de générer de lignes de courant qui pénètrent profondément le milieu.

En raison du caractère extrêmement mal posé du problème (le nombre de conditionnement du hessien de la partie fidélité aux données du critère dépasse les 10^8 quel que soit γ), la plupart des auteurs ont, dans leurs simulations, soit omis d'ajouter du bruit [16], soit ajouté un bruit extrêmement faible. Hua *et al.* [9], qui travaillent sur des objets réels, ont estimé l'incertitude de leurs mesures à $1/2000$ (66 dB), et utilisent comme point de départ de leur minimisation une distribution de conductivité uniforme correspondant au fond de l'image originale. (La connaissance de cette valeur est tout à fait plausible en génie biomédical). Nous utilisons ici un RSB égal à 1000 (60 dB), et initialisons notre algorithme de minimisation par gradient de la même manière. L'objet utilisé pour la simulation comporte un fond homogène, de conductivité $10 S.m^{-1}$, et deux fortes inhomogénéités de $100 S.m^{-1}$ et $1000 S.m^{-1}$.

Nous présentons ici les résultats obtenus avec trois reconstructions différentes : une reconstruction sans régularisation, une obtenue avec un *a priori* gaussien, et une reconstruction obtenue avec l'*a priori* de Huber. L'ensemble des calculs ont été effectués grâce au logiciel *Matlab 4.2* sur une station HP 712. Le temps de calcul d'une reconstruction est de l'ordre d'une heure. Les hy-

perparamètres (*i.e.* λ pour l'*a priori* gaussien et λ, T pour l'*a priori* de Huber) ont été déterminé empiriquement, de façon à obtenir visuellement la meilleure reconstruction possible.

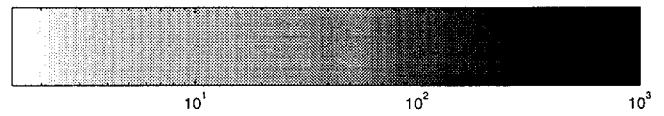


Figure 1: Échelle utilisée pour la conductivité.

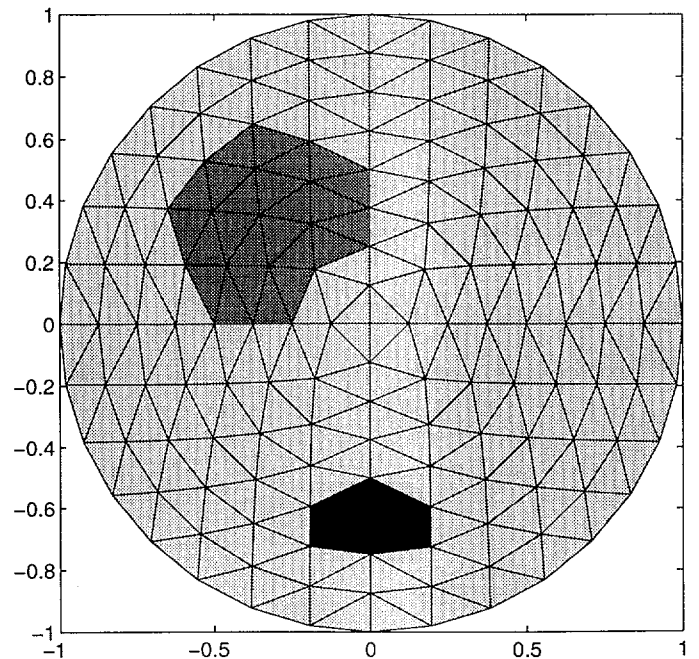


Figure 2: l'objet original composé d'un fond homogène, de conductivité $10 S.m^{-1}$, et de deux fortes inhomogénéités de $100 S.m^{-1}$ et $1000 S.m^{-1}$.

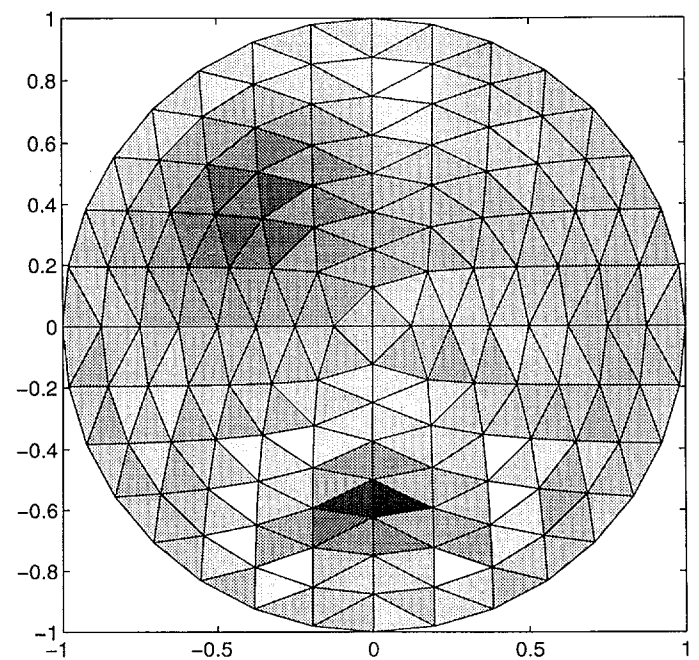


Figure 3: reconstruction sans régularisation.

Pour comparer la qualité des reconstructions obtenues $\hat{\gamma}$, nous mesurons l'écart de celles-ci avec l'original γ grâce à la norme L_1 connue pour sa bonne adéquation qualitative avec



une appréciation visuelle. Plus précisément, nous utilisons la grandeur δ_1 définie par :

$$\delta_1(\gamma, \hat{\gamma}) = \frac{\|\gamma - \hat{\gamma}\|_1}{\|\gamma\|_1} \quad (10)$$

Méthode	λ	T	$\delta_1(\gamma, \hat{\gamma})$
Moindres carrés	$\lambda = 0$	$T = \infty$	1,161
Gaussien	$\lambda = 8.10^{-4}$	$T = \infty$	0.959
Huber	$\lambda = 2,5.10^{-3}$	$T = 0.25$	0.589

Le tableau ci-dessus, ainsi que les reconstructions, montrent d'une part, l'utilité de la régularisation et d'autre part la pertinence du choix de la fonction convexe de Huber pour reconstruire les discontinuités.

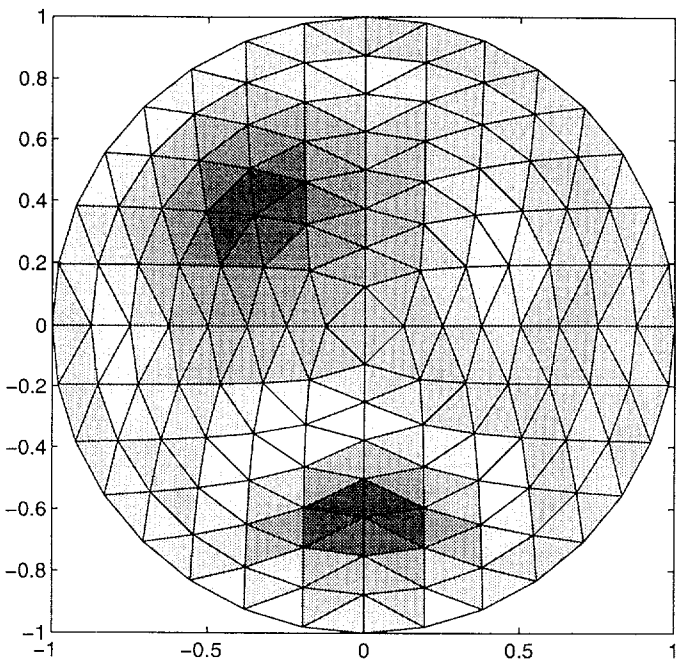


Figure 4: reconstruction avec *a priori* Gauss-Markov.

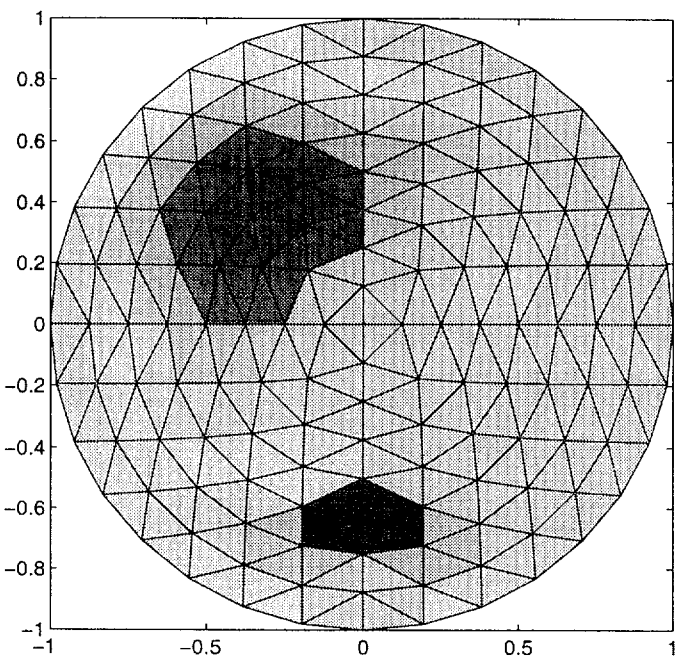


Figure 5: reconstruction avec *a priori* de Huber.

5. CONCLUSION

Nous proposons ici une méthode de reconstruction originale en tomographie d'impédance électrique reposant sur une formulation bayésienne de l'inversion. Le choix de la méthode des éléments finis pour la résolution du problème direct et l'apport de l'*a priori* markovien de Huber pour la régularisation contribuent grandement à l'amélioration de la résolution de ce problème inverse non linéaire et mal posé. À titre de perspectives, nous envisageons, afin de minimiser le critère de façon plus optimale, d'utiliser, pour la partie fidélité aux données, la *non convexité graduelle* [3, 12] : construire une suite de critères permettant de passer continûment d'un critère convexe au critère exact non convexe. Nous étudions aussi la mise en œuvre d'un raffinement du maillage en vue d'une approche multi-échelle de la reconstruction.

Le premier auteur remercie chaleureusement Andrew Adler, de l'Institut de génie biomédical de Montréal, de lui avoir fourni le code d'éléments finis utilisé pour cette publication.

6. RÉFÉRENCES

- [1] G. Alessandrini. Stable determination of conductivity by boundary measurements. *Applicable Analysis*, 27:153-172, 1988.
- [2] D. Barber and B. Brown. Recent developments in applied potential tomography. *APT Information Processing in Medical Imaging*, pages 106-121, 1986.
- [3] A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction*. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.
- [4] C. Bouman and K. Sauer. A generalized gaussian image model for edge-preserving map estimation. *IEEE Trans. Image. Proc.*, 2:296-310, 1993.
- [5] C. Cohen-Bacrie. Régularisation du problème inverse de tomographie d'impédance électrique. Master's thesis, École polytechnique de Montréal, December 1994.
- [6] A. J. Davies. *The Finite Element Method: A First Approach*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1980.
- [7] G. Demoment. Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structure and problems. *IEEE ASSP*, 37(12):2024-2036, December 1989.
- [8] D.G. Gisser, D. Isaacson, and J.C. Newell. Current topics in impedance imaging. *Clin. Phys. Physiol. Meas.*, 8 Suppl. A:39-46, 1987.
- [9] P. Hua, E.J. Woo, J.G. Webster, and W.J. Tompkins. Iterative reconstruction methods using regularization and optimal current patterns in electrical impedance tomography. *IEEE trans. Med. Imag.*, pages 621-628, dec 1991.
- [10] Webster J.G. *Electrical Impedance Tomography*. Adam Hilger, IOP Publishing Ltd, 1990.
- [11] R. V. Kohn and A. McKenney. Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, pages 389-414, 1990.
- [12] M. Nikolova. *Inversion markovienne de problèmes linéaires mal posés; application à l'imagerie tomographique*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, 2 1995.
- [13] B.T. Polyak. *Introduction to optimization*. Optimization Software, Inc., 1987.
- [14] M. Renardy and R.C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1993.
- [15] J. Sylvester and G. Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. Math.*, 125:153-169, 1987.
- [16] M. Tasto and H. Schomberg. Object reconstruction from projections and some non-linear extensions. *Pattern Recognition and Signal Processing (ed. C. H. Chen)*, pages 485-503, 1978.