



**ESTIMATION PAR RÉGIONS DE CONFIANCE
EN TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE**

Jean-Michel Passerieux

THOMSON-SINTRA ASM, BP.157, 06903 SOPHIA-ANTIPOLIS CEDEX, FRANCE

RÉSUMÉ

En calculant de véritables régions de confiance, on montre qu'en Trajectographie Passive à partir d'Azimuts (TPA) les ellipses d'incertitude habituelles dans le plan (X, Y) donnent souvent des indications erronées sur la précision effective. On propose ensuite une approximation en $1/R$ des régions de confiance en TPA, moins coûteuse à obtenir que les véritables régions, mais plus précise que les ellipses habituelles.

INTRODUCTION

Avec les méthodes actuelles de trajectographie passive [1], on arrive assez souvent à déterminer de manière relativement précise la trajectoire des sources détectées à partir des mesures d'azimuts délivrées par un sonar passif. Le problème traité ici tient à ce que, en pratique, le besoin ne se limite pas à savoir, par exemple, que la distance la plus vraisemblable pour une source donnée est égale à 10 km. Il faut plutôt savoir si, avec une probabilité donnée, par exemple 95%, cette distance est comprise entre 9.5 km et 10.5 km, ou bien entre 1 et 20 km, bref obtenir un intervalle ou une région de confiance.

Ce problème (estimation en temps réel de la précision de la TPA) est résolu aujourd'hui, de manière parfois peu satisfaisante, en utilisant des ellipses d'incertitude estimées (calculés à partir de la matrice de Fisher estimée), souvent trop petites et sans lien avec la précision réelle de la TPA.

A notre avis ce manque de fiabilité des ellipses d'incertitude s'explique en TPA par deux raisons :

- la précision des mesures d'azimut en entrée est mal connue, souvent surestimée ce qui conduit à des ellipses d'incertitude trop petites,
- plus fondamentalement, surtout dans des situations difficiles (mesures imprécises et peu nombreuses), la distribution des estimés n'est pas gaussienne (ce qui justifierait le tracé des ellipses habituelles) mais plus complexe.

C'est à ce deuxième point qu'on va s'intéresser dans la suite en calculant, par deux approches différentes, de véritables régions de confiance (ce qui avait déjà été fait en [2] par des techniques de filtrage non linéaire, mais uniquement dans le cas d'une source fixe), puis en proposant une nouvelle approximation des régions de confiance, plus précise que l'approximation habituelle par les ellipses d'incertitude et différente de l'approximation proposée en [3].

1. RAPPELS THEORIQUES

Notons $\theta^m \in R^N$ le vecteur des N observations disponibles et $X \in R^p$ le vecteur des p paramètres inconnus (vecteur d'état). Supposons aussi que la vraisemblance des observations, $p(\theta^m/X)$, est connue.

1.1. Approche Bayésienne

On suppose que les paramètres inconnus sont aléatoires, de den-

ABSTRACT

True confidence regions for Bearings-Only-Tracking (BOT) are computed and shown to be sometimes very different from conventional uncertainty ellipses. It results that these uncertainty ellipses sometimes provide a very poor estimation of actual BOT accuracy. Another approximation of true confidence regions in BOT, easy to compute and more accurate than uncertainty ellipses, is finally proposed.

sité de probabilité a priori connue $p(X)$. Pour simplifier on prend ici $p(X)$ uniforme dans un domaine $\Omega \subset R^p$ assez grand. Par la règle de Bayes la densité de probabilité a posteriori du vecteur d'état X (qui contient toute l'information disponible sur X) est égale à :

$$p(X/\theta^m) = k_1 \cdot p(\theta^m/X) , \quad (1)$$

où k_1 est une constante de normalisation telle que $\int p(X/\theta^m) = 1$.

Par définition une région de confiance de niveau α est une fonction qui, à tout ensemble d'observations θ^m , associe un domaine $\omega(\theta^m) \in R^p$ tel que

$$\text{proba}(X \in \omega(\theta^m)/\theta^m) = \int_{\omega} p(X/\theta^m) dx_1 \dots dx_p = \alpha . \quad (2)$$

Par abus de langage, comme dans la deuxième approche ci-dessous, c'est souvent le domaine $\omega(\theta^m) \subset R^p$, et non pas la fonction ω elle-même, qui est désigné par région de confiance.

Quoi qu'il en soit il est facile de voir que les régions de confiance définies par (2) ne sont pas uniques. Etant donnés des observations θ^m et un niveau de confiance α , on peut en effet trouver une infinité de domaines $\omega(\theta^m) \subset R^p$ qui vérifient (2). Aussi, en pratique, on considère souvent des régions de confiance de volume minimal ce qui conduit à

$$X \in \omega(\theta^m) \Leftrightarrow p(X/\theta^m) \geq \eta , \quad (3)$$

où η est un seuil fixé par la condition (2).

Supposons pour terminer qu'on s'intéresse uniquement à q paramètres parmi les p éléments de X (les q premiers pour simplifier). Partitionnons X comme indiqué ci-dessous

$$X \triangleq \begin{pmatrix} X^q \\ X^r \end{pmatrix} . \quad (4)$$

On obtient alors simplement la densité de probabilité a posteriori de X^q seul, $p(X^q/\theta^m)$, en intégrant $p(X/\theta^m)$ par rapport aux composantes de X^r . En appliquant (3) avec cette densité $p(X^q/\theta^m)$, on en déduit les régions de confiance en X^q seul.

1.2. Maximum de Vraisemblance (MV)

On suppose maintenant que le vecteur d'état X inconnu est déterministe. Par définition [4, 5] une région de confiance de niveau α est alors une fonction qui à tout ensemble d'observations



θ^m associe un domaine $\omega(\theta^m) \subset R^p$, aléatoire et censé contenir X avec une probabilité donnée α . Soit :

$$\text{proba}\{X \in \omega(\theta^m)/X\} = \alpha . \quad (5)$$

Supposons maintenant que, sur la base des observations θ^m , on veuille tester l'hypothèse $H(X_0)$: $X = X_0$ (avec X_0 donné, arbitraire). Il est facile de vérifier que, si $\omega(\theta^m)$ est une région de confiance de niveau α (au sens de la définition (5)), le test qui consiste à retenir

$$\begin{array}{ll} H(X_0) & \text{si } X_0 \in \omega(\theta^m) , \\ \bar{H}_0 & \text{sinon} , \end{array} \quad (6)$$

résoud ce problème avec une probabilité de fausse alarme $1 - \alpha$.

Les régions de confiance n'étant pas définies de manière unique par (5), on s'efforce de plus, dans la mesure du possible, de construire des régions de confiance sans biais [5] (en gros telle que le test (6) rejette plus des hypothèses $H(X_0)$ erronées que l'hypothèse vraie) et les plus sélectives possible.

1.3. Approximation par rapport de vraisemblance généralisé (RVG)

En pratique il n'existe pas, à notre connaissance, de méthodes générales utilisables en TPA pour construire, dans l'approche Maximum de Vraisemblance, des régions de confiance, de niveau α donné, sans biais et les plus sélectives. Aussi une méthode simple, que nous utiliserons par la suite, consiste à bâtir les régions de confiance approchées (de niveau de confiance parfaitement égal à α seulement asymptotiquement) au moyen de tests de rapport de vraisemblance généralisé [6]. Soit :

$$X_0 \in \omega(\theta^m) \Leftrightarrow \Lambda(X_0; \theta^m) \leq \eta , \quad (7)$$

avec

$$\Lambda(X_0; \theta^m) \triangleq -2 \ln \frac{p(\theta^m/X_0)}{p(\theta^m/\hat{X})} , \quad (8)$$

et où

- $\hat{X} \triangleq \text{Arg Sup } p(\theta^m/X)$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de X à partir des observations θ^m ,
- le seuil η est fixé (pour un niveau α donné) en utilisant le fait que, sous $H(X_0)$, la quantité test $\Lambda(X_0; \theta^m)$ est distribuée selon une loi du χ^2 centré à p degrés de liberté.

Supposons pour terminer que, comme en §1.1., on s'intéresse uniquement aux q premières composantes du vecteur X . Une région de confiance pour X^q est alors une fonction ω^q qui, à tout ensemble d'observation θ^m , associe un domaine $\omega^q(\theta^m) \subset R^q$ (et non pas R^p) tel que $\text{proba}\{X^q \in \omega^q(\theta^m)\} = \alpha$.

Pour construire dans ce cas des régions de confiance approchées, en X^q uniquement, on peut aussi utiliser un test de rapport de vraisemblance généralisé et prendre :

$$X_0^q \in \omega^q(\theta^m) \Leftrightarrow \Lambda^q(X_0^q; \theta^m) \leq \eta' , \quad (9)$$

avec

$$\Lambda^q(X_0^q; \theta^m) \triangleq -2 \ln \frac{p(\theta^m/X_0^q, \hat{X}^r(X_0^q))}{p(\theta^m/\hat{X})} , \quad (10)$$

où

- $\hat{X}^r(X_0^q)$ désigne l'estimateur du maximum de vraisemblance de X^r seul, X^q étant fixé à X_0^q ,
- le seuil η' est fixé en utilisant le fait que, sous l'hypothèse H^q ($X^q = X_0^q$), la quantité $\Lambda^q(X_0^q; \theta^m)$ est distribuée selon une loi du χ^2 centré à q degrés de liberté.

2. APPLICATION A LA TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE PAR AZIMUTS (TPA)

2.1. Rappels

On suppose que la source trajectographiée est en mouvement rectiligne uniforme dans le plan horizontal (X, Y) . Le vecteur d'état X (de dimension $p = 4$) contient donc sa position et sa vitesse dans ce plan. Pour déterminer ce vecteur X , on dispose d'un ensemble θ^m de mesures d'azimuts, recueillies sur une (TPA), deux (TP2A) ou plusieurs antennes. Ces mesures sont perturbées par des erreurs de mesures gaussiennes, centrées et décorréelées, de variances connues (ici, pour simplifier, identiques et égales à σ^2 pour toutes les mesures). La position de ces antennes étant parfaitement connues on peut calculer la valeur théorique des azimuts, notée $\theta(X)$, correspondant à une valeur arbitraire X du vecteur d'état.

Avec ces hypothèses la vraisemblance des observations θ^m s'écrit [1]:

$$p(\theta^m/X) = (2\pi)^{-N/2} \sigma^{-N} \exp -\frac{1}{2} Q(X; \theta^m) , \quad (11)$$

avec :

$$Q(X; \theta^m) \triangleq \frac{1}{\sigma^2} \|\theta^m - \theta(X)\|^2 . \quad (12)$$

On constate donc que, à condition que l'a priori (approche bayésienne) soit uniforme, les estimateurs MAP (approche bayésienne) et du Maximum de Vraisemblance coïncident. Ils minimisent tous deux le critère (12) et peuvent être obtenus très simplement en utilisant des algorithmes standard de moindres carrés [7].

2.2. Ellipsoïdes et ellipses d'incertitude

Les ellipsoïdes (ou ellipses) d'incertitude habituels sont basés sur un développement limité du critère (12) au voisinage de l'estimé \hat{X} . Au voisinage de \hat{X} on a en effet :

$$\begin{aligned} \theta^m &= \theta^m - \theta(\hat{X}) - (\theta(X) - \theta(\hat{X})) \\ &\simeq \theta^m - \theta(\hat{X}) - A(\hat{X}) \cdot (X - \hat{X}) , \end{aligned} \quad (13)$$

où $A(\hat{X})$ est la matrice jacobienne $d\theta/dX$ calculée en \hat{X} .

En substituant (13) dans (12) et en utilisant le fait que (12) est minimum en \hat{X} , il vient :

$$Q(X) \simeq Q(\hat{X}) + (X - \hat{X})^t \cdot C^{-1}(\hat{X}) \cdot (X - \hat{X}) , \quad (14)$$

où $C(\hat{X})$ est l'inverse de la matrice de Fisher estimée (i.e. calculée pour la trajectoire estimée \hat{X}) $F(\hat{X}) \triangleq \sigma^{-2} A^t(\hat{X}) A(\hat{X})$. C'est cette approximation du critère (12), valable uniquement lorsque $\hat{X} \simeq X$ (c'est à dire lorsque la TPA est précise) qui permet de justifier la forme des ellipsoïdes et des ellipses d'incertitude habituels. En effet :

- Substituant (14) dans (11), on montre facilement que la distribution a posteriori de X (approche bayésienne) est gaussienne, de moyenne \hat{X} et de covariance $C(\hat{X})$.
- On montre de même que les quantités test (8) et (10) (approche du Maximum de Vraisemblance) sont approximativement égales à :

$$\Lambda(X_0; \theta^m) \simeq (X_0 - \hat{X})^t \cdot C^{-1}(\hat{X}) \cdot (X_0 - \hat{X}) , \quad (15)$$

et :

$$\Lambda^q(X_0^q; \theta^m) \simeq (X_0^q - \hat{X}^q)^t \cdot C_{qq}^{-1}(\hat{X}) \cdot (X_0^q - \hat{X}^q) , \quad (16)$$

où $C_{qq}(\hat{X})$ est la sous-matrice $q \times q$ extraite de $C(\hat{X})$ pour les composantes de X^q .

2.3. Véritables régions de confiance

Le calcul de véritables régions de confiance, toujours basées sur les équations du §1., est plus compliqué et, surtout, nécessite des calculs beaucoup plus coûteux.

Avec l'approche bayésienne, il faut en effet :

- calculer le critère (12) et son exponentielle sur un maillage de R^4 suffisamment fin pour ne pas manquer le maximum de la densité a posteriori $p(X/\theta^m)$ et limiter les erreurs numériques,
- normaliser $p(X/\theta^m)$ et, si nécessaire, sommer sur les composantes X^r auxquelles on ne s'intéresse pas (pour obtenir $p(X^q/\theta^m)$),
- finalement calculer le seuil η (équation (3)) ce qui nécessite de trier et d'intégrer les valeurs de $p(X/\theta^m)$ calculées sur les points du maillage.

Avec l'approche Maximum de Vraisemblance, en appliquant les équations du §1.3, on montre que :

- si on s'intéresse au vecteur d'état X tout entier, il faut calculer le critère (12) pour les points X_{ijkl} d'un maillage de R^4 , les régions de confiance étant telles que :

$$X_{ijkl} \in \omega(\theta^m) \Leftrightarrow Q(X_i) - Q(\hat{X}) \leq \eta, \quad (17)$$

- si on s'intéresse seulement à une partie X^q du vecteur d'état, il faut mailler R^q , puis, pour chacun des points, X_{ij}^q , de ce maillage, minimiser un critère de moindres carrés en X^r , les régions de confiance dans R^q étant telles que :

$$X_{ij}^q \in \omega^q(\theta^m) \Leftrightarrow Q(X_{ij}^q, \hat{X}^r(X_{ij}^q)) - Q(\hat{X}) \leq \eta'. \quad (18)$$

2.4. Résultats expérimentaux

Pour illustrer ce qui précède, on présente figure 1 à 3 les ellipses d'incertitude (à 1, 2 ou 3 σ) et les véritables régions de confiance (de niveaux 0.393, 0.865 et 0.989) obtenues pour le scénario ci-dessous :

- l'observateur décrit, à 3 m/s, deux tronçons rectilignes, de caps respectifs 150 et 30 degrés et de même durée 5 minutes, de sorte que, en $t = 10$ minutes, il est en $(0,0)$,
- la source se déplace à 1.5 m/s au cap 90 de sorte que, en $t = 10$ minutes, elle est en $(x = 6 \text{ km}, y = 0)$,
- l'azimut est mesuré toutes les 30 secondes avec une précision de mesure σ égale à 2 degrés.

On constate sur ces figures que, dans ces conditions (TPA peu précise), les ellipses d'incertitude habituelles approximent assez mal les véritables régions de confiance (elles-même légèrement différentes selon l'approche utilisée).

3. APPROXIMATION "EN 1/R" DES REGIONS DE CONFIANCE

3.1. Cas de la triangulation

Pour simplifier intéressons nous maintenant au problème de la localisation par triangulation d'une source fixe. Notons $X \triangleq (x, y)$ le vecteur position source (inconnu) et $X_A \triangleq (-L/2, 0)$ et $X_B \triangleq (L/2, 0)$ les deux positions où sont relevés les azimuts mesurés θ_A^m et θ_B^m . Supposons pour finir que les erreurs de mesure sont gaussiennes, centrées et décorréllées, de même variance σ^2 et que $y > 0$.

Pour résoudre ce problème de localisation, très simple, et calculer des régions de confiance, on peut procéder que la même manière qu'en TPA habituellement, c'est à dire :

- calculer $\hat{X} \triangleq (\hat{x}, \hat{y})$ (estimateur MAP ou MV), intersection des deux lignes de visées qui correspondent aux mesures θ_A^m et θ_B^m ,
- tracer, dans le plan (X, Y) , des ellipses d'incertitude, centrées sur \hat{X} et dont le calcul ne pose aucune difficulté.

Cette approche, très simple, se révèle néanmoins complètement inopérante lorsque les deux lignes de visée se coupent dans la direction opposée à celle de la source (ici dans le demi-plan $y < 0$). Il est clair en effet que, dans cette situation (qui se produit avec une probabilité égale à 0.5 lorsque $R/L \rightarrow \infty$), l'intersection des deux lignes de visée n'est pas une bonne estimation de la position de la source et que tracer une ellipse autour de cette intersection est absurde. Plus fondamentalement, dans cette situation, les estimateurs habituels (MAP ou MV) n'existent pas, le critère de moindres carrés, analogue à (12), à minimiser ici n'admettant pas de minimum à distance finie dans le demi-plan $y > 0$.

Pour résoudre cette difficulté, il est facile de montrer qu'il faut raisonner en (θ, r^{-1}) et non pas en (x, y) . Plus précisément on montre, moyennant quelques calculs (plus simples si on suppose comme ici $\sigma \ll L/R$ et $L \ll R$) que le critère de moindres carrés à minimiser est approximativement tel que

$$Q(X) = \frac{\cos^4 \bar{\theta}}{\sigma^2} \left(\left(\frac{x}{y} - \tan \bar{\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{4} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\bar{y}} \right)^2 \right), \quad (19)$$

où (\bar{x}, \bar{y}) tel que

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &\triangleq \arctan \bar{x}/\bar{y} = \frac{1}{2}(\theta_A^m + \theta_B^m), \\ \frac{1}{\bar{y}} &= \frac{\theta_A^m - \theta_B^m}{L \cos^2 \bar{\theta}}, \end{aligned} \quad (20)$$

désigne la position de l'intersection des lignes de visée. Dans le domaine $(\arctan x/y, 1/y; y > 0)$ (et pas le plan (X, Y)), les régions de confiance sont approximativement limitées par des ellipses, centrées sur $(\bar{\theta}, 1/\bar{y})$. En revanche, lorsqu'on les trace dans le plan (X, Y) , ces régions de confiance approchées sont limitées par des ellipses (pas centrées sur \hat{X}) pour des valeurs faibles de α , par des hyperboles pour des valeurs plus grandes de α .

3.2. Cas de la TPA

Des problèmes analogues se posent en TPA (ou TP2A) lorsque la source est à grande distance et que les mesures d'azimuts sont peu nombreuses. Néanmoins il n'est pas possible dans ce cas d'obtenir des régions de confiance en $1/R$ par une méthode aussi simple qu'en §3.1. On y parvient seulement dans le cas particulier, en pratique très fréquent (une manoeuvre unique de l'observateur en TPA, pas de manoeuvre en TP2A) où la trajectoire de l'observateur est formée de deux "jambes" (i.e. deux tronçons rectilignes parcourus à vitesse constante), notées A et B.

On sait en effet que, à partir des mesures θ_A^m recueillies sur la jambe A, il n'est pas possible d'estimer la trajectoire X de la source mais seulement une famille de trajectoires possibles, $\hat{X}_A(\lambda_A)$, homothétiques dans un référentiel lié à l'observateur sur la jambe A (avec λ_A comme rapport d'homothétie). A partir des mesures θ_B^m recueillies sur la jambe B on obtient de même une deuxième famille $\hat{X}_B(\lambda_B)$. On montre alors [8, 9] qu'il est possible, par des calculs analogues à ceux qui conduisent à (19) de recombinaison ces deux familles pour obtenir une approximation de l'estimé global \hat{X} (dans ces calculs ces deux familles jouent le même rôle que les deux lignes de visée en triangulation). Un point important est qu'au cours de ces calculs on obtient une approximation du critère (12), plus compliquée que (19) mais assez similaire formellement et qui peut être utilisée pour construire, en TPA ou en TP2A, des régions de confiance approchées en $1/R$



analogues à celles obtenues dans le cas de la triangulation d'une source fixe.

L'intérêt de cette approximation est illustré par les résultats de simulations de TP2A présentés tables 1 et 2 (probabilités, évaluées sur 200 tirages indépendants des erreurs de mesure, pour que les régions de confiance, vraies ou approchées, contiennent la position vraie de la source - approche du Maximum de Vraisemblance). Pour ces simulations, la source est fixe, à 10 kilomètres sur le travers des deux antennes (elles-même séparées de 1000 mètres). Sur chacune des antennes, l'azimut est mesuré toutes les 30 secondes pendant 5 minutes.

seuil	1.0	2.0	3.0
niveau théorique	0.393	0.865	0.989
régions exactes	0.400	0.875	0.995
approchées en 1/R	0.400	0.870	0.990
ellipses (en R)	0.415	0.890	0.970

Table 1. Ecart-type de mesure : 2 deg

seuil	1.0	2.0	3.0
niveau théorique	0.393	0.865	0.989
régions exactes	0.395	0.860	0.990
approchées en 1/R	0.405	0.845	0.970
ellipses (en R)	0.520	0.830	0.915

Table 2. Ecart-type de mesure : 5 deg

On constate que lorsque la précision des mesures se dégrade (table 2), la probabilité pour que les ellipses d'incertitude habituelles (à 1, 2 ou 3 σ) contiennent la position vraie de la source diffère de sa valeur théorique. Cette différence est surtout importante lorsque le niveau de confiance théorique est proche de 1, c'est à dire justement lorsqu'on voudrait être "quasiment" sûr que la région de confiance contient la position vraie de la source. En revanche l'accord est bien meilleur avec les régions de confiance approchées en 1/R.

CONCLUSION

Une suite intéressante des travaux présentés ici consisterait à étendre les résultats présentés ici à d'autres méthodes de trajectographie passive. Il est vraisemblable que, dans ce cas, comme dans le cas général en TPA et TP2A, il sera difficile de calculer des régions de confiance autrement que par les méthodes lourdes exposées en §2.3. Il serait donc utile d'examiner plus en détails diverses techniques envisageables pour réduire la masse de calcul nécessaire à l'obtention de véritables régions de confiance. (moyennage préalable des mesures, choix du repère et du système de coordonnées utilisé pour le vecteur état, ...)

REFERENCES

[1] S.C.Nardone, A.G.Lindgren, and K.F.Gong. Fundamental properties of conventional bearings-only target motion analysis. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-29(9):775-787, Sept 1984.

[2] F.Campillo et F.Legland. Application du filtrage non linéaire en trajectographie passive. In *Proc. GRETSI*, Juan-Les-Pins, Sept 1989.

[3] M.L.Graham, K.F.Gong, N.A.Jackson, and J.G.Baylog. Lower bounds analysis for large errors in non linear state estimation. In *Proceedings of 22nd Asilomar Conf. on SSC*, November 1988.

[4] C.Fourgeaud et A.Fuchs. *Statistique*. Dunod, Paris, 1967.

[5] S.Kotz and N.L.Johnson. *Encyclopedia of Statistical Sciences*. Wiley& Sons, 1982.

[6] H.L.Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I*. Wiley& Sons, New York, 1968.

[7] *IMSL Math Library User's manual*, September 1991.

[8] J.M.Passerieux, D.Pillon, and P.Verveur. Track to track association performed on mahalanobis distance in both observable and nonobservable situations. In *Proceedings of 23rd Asilomar Conf. on SSC*, November 1989.

[9] J.M.Passerieux. Régions de confiance en trajectographie passive à partir d'azimuts. En préparation.

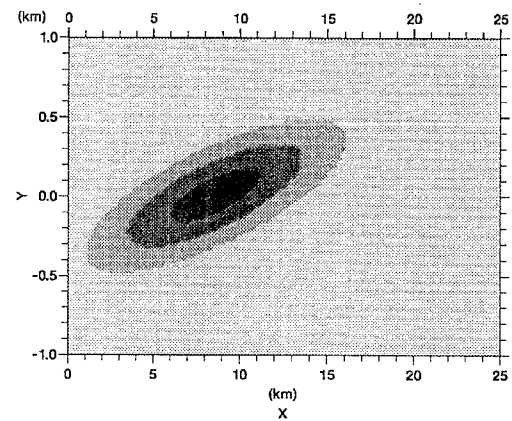


Figure 1. Ellipses d'incertitude

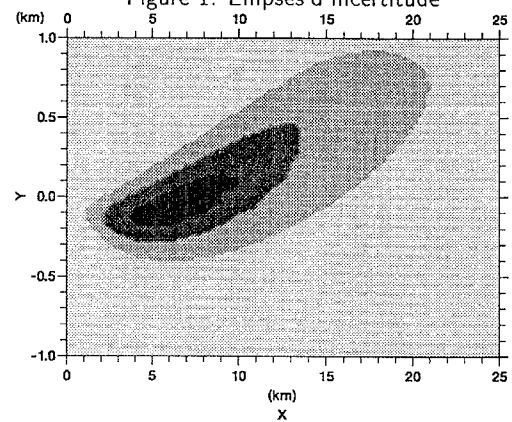


Figure 2. Régions bayésiennes

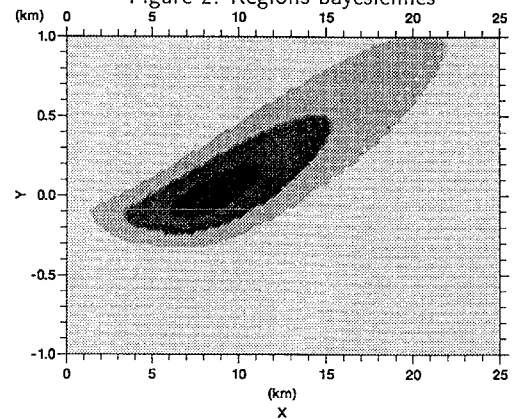


Figure 3. Régions - Max. Vrais.